Exercice 25.

(1) Montrer que la catégorie des ensembles n'est pas équivalente à sa catégorie opposée.

(2) Montrer que la catégorie des relations est équivalente à sa catégorie opposée. (Voir la définition, exemple 2.1.4.)

Solution :

(1) Dans la catégorie des ensembles **Set**, l'ensemble vide $\{\}$ est un objet initial (c'est à dire $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\{\}, Z)$ est un singleton pour tout Z), et tout singleton $\{\cdot\}$ est un objet terminal (c'est à dire $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(Z, \{\cdot\})$ est un singleton pour tout Z)

Supposons l'existence d'un foncteur $F : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Set^{op}}$ qui soit une équivalence de catégories. D'après le théorème 2.1.14, F est essentiellement surjectif et pleinement fidéle.

Soit $\{a\}$ un singleton et $X = F(\{a\})$ et soit Z un ensemble. Comme F est essentiellement surjectif il existe Y tel que Z soit isomorphe (ou en bijection) avec $F(Y)$ et alors $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set^{op}}}(Z, X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set^{op}}}(F(Y), X) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set^{op}}}(F(Y), F(\{a\})) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(Y, \{a\})$, la dernière bijection résultant du fait que F est pleinement fidèle. Cependant $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(Y, \{a\})$ est un singleton, donc $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set^{op}}}(Z, X)$ aussi, mais $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set^{op}}}(Z, X) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, Z)$ donc $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, Z)$ est un singleton pour tout Z, ce qui montre que $F(\{a\}) = X = \{\}$.

Mais alors : considérons une paire $\{b, c\}$ et soit $W = F(\{b, c\})$; on a $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\{a\}, \{b, c\}) \simeq \{b, c\}$ et comme F est pleinement fidèle on doit donc avoir $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set^{op}}}(\{\}, W) \simeq \{b, c\}$ c'est à dire $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(W, \{\}) \simeq \{b, c\}$ ce qui est impossible car $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(W, \{\})$ est vide si W est non vide et est un singleton si W est vide.

(2) Les objets de la catégorie des relations sont les ensembles et $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Rel}}(X, Y) = \mathcal{P}(X \times Y)$

On a donc des bijections naturelles $\theta_{XY} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Rel}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Rel}}(Y, X)$. (Si $Z \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Rel}}(X, Y)$, càd $Z \subset X \times Y$, on pose $\theta_{XY}(Z) = \{(y, x),\ (x, y) \in Z\}$).

Le foncteur $F : \mathbf{Rel} \longrightarrow \mathbf{Rel^{op}}$ tel que $F(X) = X$ pour tout X et tel que $F : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Rel}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Rel^{op}}}(X, Y)$ soit la bijection θ_{XY} est une équivalence de catégories.