Exercice 26. *On rappelle que tout groupe abélien fini est isomorphe à un unique groupe du type* $\bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$ *où les entiers strictement positifs* n_i *vérifient* $n_1 \mid n_2 \mid \ldots \mid n_r$.

(1) Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ *; montrer que* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/\operatorname{pgcd}(n,p)\mathbb{Z}$ *; en déduire l'existence d'un isomorphisme de groupe* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ *et le décrire explicitement.*

(2) Soient $n, p, q \in \mathbb{N}^*$ *; montrer que le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \arrow[r, "\circ"] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \arrow[d, "\wr"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r, "\circ"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

(3) Soient G *et* H *des groupes abéliens finis ; établir l'existence d'un isomorphisme de groupe* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, H) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, G)$.

(4) Soient G, H *et* K *des groupes abéliens finis ; montrer que le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, H) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, K) \arrow[r, "\circ"] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, K) \arrow[d, "\wr"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K, H) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, G) \arrow[r, "\circ"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K, G)
\end{tikzcd}$$

(5) Montrer que la catégorie $\mathbf{Ab^f}$ *des groupe abéliens finis est équivalente à la catégorie opposée* $\left(\mathbf{Ab^f}\right)^{op}$.

Solution :

(1) On note $d = \operatorname{pgcd}(n,p)$, $n' = n/d$ et $p' = p/d$ de sorte que $\operatorname{pgcd}(n', p') = 1$. Un morphisme de groupe $f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est déterminé par $a = f(1)$ (avec $a \in \{0, \ldots, p-1\}$) ; de plus on doit avoir $0 = f(0) = f(n) = na$ donc $p|na$ donc $p'|n'a$ donc $p'|a$ car $\operatorname{pgcd}(n', p') = 1$. Ainsi $a = \alpha p'$ avec $\alpha \in \{0, \ldots, d-1\}$ et il en découle les isomorphismes

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) & \xleftrightarrow{\quad\sim\quad} & \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} & \xleftrightarrow{\quad\sim\quad} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \\
f & \longmapsto & \dfrac{f(1)}{p'} \qquad \dfrac{g(1)}{n'} & \longleftarrow\!\!\!\shortmid & g \\
(\ k \mapsto kp'\alpha\ ) & \longleftarrow\!\!\!\shortmid & \alpha & \longmapsto & (\ k \mapsto kn'\alpha\ )
\end{array}$$

Ainsi on a l'isomorphisme :

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \\
f & \longmapsto & g : k \mapsto k\dfrac{n'}{p'}f(1) = k\dfrac{n}{p}f(1)
\end{array}$$

(2) On calcule l'image de (f, g) par les morphismes

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \arrow[r, "\circ"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \arrow[d, "\wr"] \\
& \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

D'après (1) on obtient le morphisme $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ défini par $k \mapsto k\dfrac{n}{q}\big(g \circ f(1)\big)$.
On calcule ensuite l'image de (f, g) par les morphismes

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \arrow[d, "\wr"] & \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r, "\circ"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

Le résultat est la composition des deux morphismes $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ défini par $k \mapsto k\dfrac{p}{q}g(1)$ et $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ défini par $k \mapsto k\dfrac{n}{p}f(1)$ c'est à dire le morphisme $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ défini par $k \mapsto k\dfrac{p}{q}g(1)\dfrac{n}{p}f(1) = k\dfrac{n}{q}f(1)g(1) = k\dfrac{n}{q}\big(g \circ f(1)\big)$.
Le diagramme donné est donc commutatif.

(3) On utilise les formes canoniques de G et H : $G \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$ et $H \simeq \bigoplus_{j=1}^{s} \mathbb{Z}/p_j\mathbb{Z}$. On a alors $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, H) \simeq \bigoplus_{i,j} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p_j\mathbb{Z}) \simeq \bigoplus_{i,j} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p_j\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, G)$.

(4) On utilise les formes canoniques de G, H et K pour se ramener à la situation de la question (2).

(5) On définit $F : \mathbf{Ab^f} \to \big(\mathbf{Ab^f}\big)^{op}$ par $F(G) = G$ et

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab^f}}(G, H) \to \mathrm{Hom}_{\left(\mathbf{Ab^f}\right)^{op}}(F(G), F(H)) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab^f}}(H, G)$$

par l'isomorphisme donné à la question (3). Le résultat de la question (4) signifie que F est un foncteur. De plus F est pleinement fidèle (car F induit un ismorphisme de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab^f}}(G, H)$ dans $\mathrm{Hom}_{\left(\mathbf{Ab^f}\right)^{op}}(F(G), F(H))$) et essentiellement surjectif (car surjectif) (définition 2.1.6) donc F est une équivalence de catégories (théorème 2.1.10).