**Exercice 27.** *Soit $\mathcal{I}$ et $\mathcal{C}$ deux catégories. On suppose que tout foncteur de $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{C}$ admet une limite inductive. On note $\Delta$ le foncteur de $\mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathcal{I}}$ qui a $X \in \mathcal{C}$ associe le foncteur constant $F_X$.*

*(1) Montrer que $\varinjlim : \mathcal{C}^{\mathcal{I}} \to \mathcal{C}$ est un foncteur.*

*(2) Soit $\alpha \in \mathcal{C}^{\mathcal{I}}$ et $Y \in \mathcal{C}$ ; montrer que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\varinjlim \alpha, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathcal{I}}}(\alpha, \Delta Y)$.*

*On suppose maintenant que tout foncteur de $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{C}$ admet une limite projective.*

*(3) Montrer que $\varprojlim : \mathcal{C}^{\mathcal{I}} \to \mathcal{C}$ est un foncteur.*

*(4) Soit $\beta \in \mathcal{C}^{\mathcal{I}}$ et $X \in \mathcal{C}$ ; montrer que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \varprojlim \beta) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathcal{I}}}(\Delta X, \beta)$.*

**Solution :** Pour faciliter la compréhension on note $\varinjlim\limits_i \alpha(i)$ au lieu de $\varinjlim \alpha$.

(1) Montrer que $\varinjlim$ est un foncteur revient à vérifier que :

(A) si $\alpha$ est un foncteur de $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{C}$ alors $\varinjlim\limits_i(\mathrm{Id}_{\alpha(i)}) = \mathrm{Id}_{\varinjlim\limits_i \alpha(i)}$ ;

(B) si $\theta : \alpha \to \beta$ et $\eta : \beta \to \gamma$ sont deux morphismes de foncteurs de $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{C}$, alors $\varinjlim\limits_i(\eta \circ \theta)(i) = (\varinjlim\limits_i \eta(i)) \circ (\varinjlim\limits_i \theta(i))$.

On rappelle tout d'abord quelques définitions.

(i) Soient $\alpha$ et $\beta$ deux foncteurs de $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{C}$ (c'est à dire deux objets de $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$). Un morphisme $\theta : \alpha \to \beta$ consiste en la donnée pour tout objet $i$ de $\mathcal{I}$ d'un morphisme $\theta(i) : \alpha(i) \to \beta(i)$ tels que pour tout morphisme $s(j,i) : i \to j$ le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\alpha(i) \arrow[r, "\theta(i)"] \arrow[d, "\alpha(s(j,i))"'] & \beta(i) \arrow[d, "\beta(s(j,i))"] \\
\alpha(j) \arrow[r, "\theta(j)"] & \beta(j)
\end{tikzcd}$$

(ii) $\varinjlim \alpha$ est caractérisé par des isomorphismes, pour tout objet $X$ de $\mathcal{C}$ :

$$\varprojlim_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha(i), X) \xrightarrow[\sim]{\Phi(\alpha,X)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\varinjlim_i \alpha(i), X)$$

tel que pour tout morphisme $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim\limits_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha(i), X) \arrow[r, "\Phi(\alpha,X)", "\sim"'] \arrow[d, "f\circ"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\varinjlim\limits_i \alpha(i), X) \arrow[d, "f\circ"] \\
\varprojlim\limits_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha(i), Y) \arrow[r, "\Phi(\alpha,Y)", "\sim"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\varinjlim\limits_i \alpha(i), Y)
\end{tikzcd}$$

Pour vérifier les propriétés (A) et (B) il faut tout d'abord définir $\varinjlim_i \theta(i)$ pour un morphisme de foncteur $\theta : \alpha \to \beta$. On obtient en remplaçant $\alpha$ par $\beta$ et $X$ par $\varinjlim_j \beta(j)$ dans l'isomorphisme qui précède :

$$\varprojlim_i \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(\beta(i), \varinjlim_j \beta(j)\big) \xrightarrow[\sim]{\Phi(\beta, \varinjlim_i \beta(i))} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(\varinjlim_i \beta(i), \varinjlim_j \beta(j)\big)$$

De l'existence de l'identité dans le terme de droite on déduit pour tout $i$ l'existence de morphismes naturels $\psi(i) : \beta(i) \to \varinjlim_j \beta(j)$ tels que pour tout $s(j,i) : j \to i$ on ait $\psi(j) \circ \beta(s(j,i)) = \psi(i)$. On a donc pour tout $i$ des morphismes $\psi(i) \circ \theta(i) : \alpha(i) \to \varinjlim_j \beta(j)$ tels que pour tout $s(j,i) : j \to i$ on ait $\psi(j) \circ \theta(j) \circ \alpha(s(i,j)) = \psi(j) \circ \beta(s(i,j)) \circ \theta(i) = \psi(i) \circ \theta(i)$ ; ces morphismes forment donc un élément de $\varprojlim_i \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(\alpha(i), \varinjlim_j \beta(j)\big)$ et par l'isomorphisme :

$$\varprojlim_i \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(\alpha(i), \varinjlim_j \beta(j)\big) \xrightarrow[\sim]{\Phi(\alpha, \varinjlim_i \beta(i))} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(\varinjlim_i \alpha(i), \varinjlim_j \beta(j)\big)$$

on obtient un élément de $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(\varinjlim_i \alpha(i), \varinjlim_j \beta(j)\big)$ qu'on note $\varinjlim_i \theta(i)$.

La propriété (A) est vérifiée par construction même de $\varinjlim_i \operatorname{Id}_{\alpha(i)}$.

Pour vérifier la propriété (B) il suffit de constater que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\alpha(i) \arrow[r, "\theta(i)"] \arrow[d, "\varphi(i)"'] \arrow[dr, dotted, "\psi(i)\circ\theta(i)"'] \arrow[drr, dotted, "\omega(i)\circ\eta(i)\circ\theta(i)"] & \beta(i) \arrow[r, "\eta(i)"] \arrow[d, "\psi(i)"] & \gamma(i) \arrow[d, "\omega(i)"] \\
\varinjlim_j \alpha(j) \arrow[r, "\varinjlim_i \theta(i)"'] & \varinjlim_j \beta(j) \arrow[r, "\varinjlim_i \eta(i)"'] & \varinjlim_j \gamma(j)
\end{tikzcd}$$

et que le morphisme $\varinjlim_i (\eta \circ \theta)(i)$ est construit à partir des morphismes $\omega(i) \circ \eta(i) \circ \theta(i)$ tandis que le morphisme $(\varinjlim_i \eta(i)) \circ (\varinjlim_i \theta(i))$ est construit à partir des morphismes $(\varinjlim_i \eta(i)) \circ \psi(i) \circ \theta(i)$.

(2) Ce résultat découle simplement de la définition :

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\varinjlim_i \alpha(i), Y) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha(i), Y) = \varprojlim_i \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha(i), (\Delta Y)(i)) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathcal{I}}}(\alpha, \Delta Y)$$