Exercice 28. *Soient $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $D : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ deux foncteurs.*

(1) On suppose que G est adjoint à gauche de D. Montrer qu'il existe des morphismes de foncteurs $\varepsilon : Id_{\mathcal{C}} \to DG$ et $\eta : GD \longrightarrow Id_{\mathcal{D}}$ tels que les morphismes composés

$$D(Y) \xrightarrow{\varepsilon(D(Y))} DGD(Y) \xrightarrow{D(\eta(Y))} D(Y) \quad \text{et} \quad G(X) \xrightarrow{G(\varepsilon(X))} GDG(X) \xrightarrow{\eta(G(X))} G(X)$$

soient des identités.

(2) Réciproquement, montrer que s'il existe ε et η vérifiant les propriétés de la question (1) alors G est adjoint à gauche de D.

(3) Montrer que G est pleinement fidèle si et seulement si ε est un isomorphisme, et que D est pleinement fidèle si et seulement si η est un isomorphisme.

Solution : On rappelle que $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $D : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ sont adjoints si et seulement si on a un isomorphisme de bifoncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(\cdot), \cdot) \underset{\Psi}{\overset{\Phi}{\rightleftarrows}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, D(\cdot))$ ($\sim$), c'est à dire pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X')$ et $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, Y')$ un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X), Y) \arrow[r, shift left, "\Phi(X,Y)"] \arrow[d, "g\circ"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, D(Y)) \arrow[l, shift left, "\Psi(X,Y)", "\sim"'] \arrow[d, "D(g)\circ"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X), Y') \arrow[r, shift left, "\Phi(X,Y')"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, D(Y')) \arrow[l, shift left, "\Psi(X,Y')", "\sim"'] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X'), Y') \arrow[r, shift left, "\Phi(X',Y')"] \arrow[u, "\circ G(f)"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', D(Y')) \arrow[l, shift left, "\Psi(X',Y')", "\sim"'] \arrow[u, "\circ f"']
\end{tikzcd} \qquad (A)$$

(1) Pour tout objet X de C on peut alors construire :

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X), G(X)) & \xrightarrow{\Phi(X,G(X))} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, DG(X)) \\
\mathrm{Id}_{G(X)} & \longmapsto & \varepsilon(X) = \Phi(X, G(X))(\mathrm{Id}_{G(X)})
\end{array}$$

et pout tout objet Y de $\mathcal{D}$:

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D(Y), D(Y)) & \xrightarrow{\Psi(D(Y),Y)} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(GD(Y), Y) \\
\mathrm{Id}_{D(Y)} & \longmapsto & \eta(Y) = \Psi(D(Y), Y)(\mathrm{Id}_{D(Y)})
\end{array}$$

Pour montrer que ε et η sont des morphismes de foncteurs $\varepsilon : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to DG$ et $\eta : GD \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$, il suffit de vérifier que pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X')$ et $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, Y')$ les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varepsilon(X)"] \arrow[d, "f"'] & DG(X) \arrow[d, "DG(f)"] \\
X' \arrow[r, "\varepsilon(X')"] & DG(X')
\end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}
GD(Y) \arrow[r, "\eta(Y)"] \arrow[d, "GD(g)"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
GD(Y') \arrow[r, "\eta(Y')"] & Y'
\end{tikzcd}$$

De la commutativité du diagramme suivant — obtenu en remplaçant $g : Y \to Y'$ par $G(f) : G(X) \to G(X')$ dans le diagramme (A) :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X), G(X)) \arrow[r, "\Phi(X,G(X))"] \arrow[d, "G(f)\circ"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, DG(X)) \arrow[d, "DG(f)\circ"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X), G(X')) \arrow[r, "\Phi(X,G(X'))"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, DG(X')) \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X'), G(X')) \arrow[r, "\Phi(X',G(X'))"] \arrow[u, "\circ G(f)"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', DG(X')) \arrow[u, "\circ f"']
\end{tikzcd}$$

on déduit que :

$$\varepsilon(X') \circ f = \Big(\Phi\big(X', G(X')\big)(\mathrm{Id}_{G(X')})\Big) \circ f = \Phi\big(X, G(X')\big)\big(\mathrm{Id}_{G(X')} \circ G(f)\big)$$
$$= \Phi\big(X, G(X')\big)\big(G(f) \circ \mathrm{Id}_{G(X)}\big) = GD(f) \circ \Big(\Phi\big(X, G(X)\big)(\mathrm{Id}_{G(X)})\Big) = DG(f) \circ \varepsilon(X)$$

et de la commutativité du diagramme suivant — obtenu en remplaçant $f : X \to X'$ par $D(g) : D(Y) \to D(Y')$ dans le diagramme (A) :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(GD(Y), Y) \arrow[d, "g\circ"'] & \mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(D(Y), D(Y)) \arrow[l, "\Psi(D(Y),Y)"'] \arrow[d, "D(g)\circ"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(GD(Y), Y') & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D(Y), D(Y')) \arrow[l, "\Psi(D(Y),Y')"'] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(GD(Y'), Y') \arrow[u, "\circ GD(g)"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D(Y'), D(Y')) \arrow[l, "\Psi(D(Y'),Y')"'] \arrow[u, "\circ D(g)"']
\end{tikzcd}$$

on déduit que :

$$g \circ \eta(Y) = g \circ \Big(\Psi\big(D(Y), Y\big)(\mathrm{Id}_{D(Y)})\Big) = \Psi\big(D(Y), Y'\big)\big(D(g) \circ \mathrm{Id}_{D(Y)}\big) =$$
$$\Psi\big(D(Y), Y'\big)\big(\mathrm{Id}_{D(Y')} \circ D(g)\big) = \Big(\Psi\big(D(Y'), Y'\big)(\mathrm{Id}_{D(Y')})\Big) \circ GD(g) = \eta(Y') \circ GD(g)$$

Pour montrer que le morphisme composé $D(Y) \overset{\varepsilon(D(Y))}{\longrightarrow} DGD(Y) \overset{D(\eta(Y))}{\longrightarrow} D(Y)$ est l'identité, on considère le diagramme commutatif suivant, obtenu en remplaçant X par $D(Y)$ et $g : Y \to Y'$ par $\eta(Y) : GD(Y) \to Y$ dans la partie supérieure du diagramme (A) :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(GD(Y), GD(Y)) \arrow[r, "\Phi(D(Y),GD(Y))"] \arrow[d, "\eta(Y)\circ"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D(Y), DGD(Y)) \arrow[d, "D(\eta(Y))\circ"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(GD(Y), Y) \arrow[r, "\Phi(D(Y),Y)"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D(Y), D(Y))
\end{tikzcd}$$

On a alors :

$$D\big(\eta(Y)\big) \circ \varepsilon\big(D(Y)\big) = D\big(\eta(Y)\big) \circ \Big(\Phi\big(D(Y), GD(Y)\big)(\mathrm{Id}_{GD(Y)})\Big)$$
$$= \Phi\big(D(Y), Y\big)\big(\eta(Y)\big) = \mathrm{Id}_{D(Y)}$$

par construction de $\eta(Y)$.

Pour montrer que le morphisme composé $G(X) \xrightarrow{G(\varepsilon(X))} GDG(X) \xrightarrow{\eta(G(X))} G(X)$ est l'identité, on considère le diagramme commutatif suivant, obtenu en remplaçant Y' par $G(X)$ et $f : X \to X'$ par $\varepsilon(X) : X \to DG(X)$ dans la partie inférieure du diagramme (A) :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X), G(X)) & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, DG(X)) \arrow[l, "\Psi(X,G(X))"'] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(GDG(X), G(X)) \arrow[u, "\circ G(\varepsilon(X))"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(DG(X), DG(X)) \arrow[l, "\Psi(DG(X),G(X))"'] \arrow[u, "\circ\varepsilon(X)"']
\end{tikzcd}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\eta\big(G(X)\big) \circ G\big(\varepsilon(X)\big) &= \Big(\Psi\big(DG(X), G(X)\big)(\mathrm{Id}_{DG(X)})\Big) \circ G\big(\varepsilon(X)\big) \\
&= \Psi\big(X, G(X)\big)\big(\varepsilon(X)\big) = \mathrm{Id}_{G(X)}
\end{aligned}$$

par construction de $\varepsilon(X)$.

(2) On supoose que G, D, ε et η sont donnés et on définit :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X), Y) \underset{\Psi(X,Y)}{\overset{\Phi(X,Y)}{\rightleftarrows}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, D(Y))$$

par $\Phi(X,Y)(\varphi) = D(\varphi) \circ \varepsilon(X)$ et $\Psi(X,Y)(\psi) = \eta(Y) \circ G(\psi)$.

Par la commutativité du diagramme (vérifiée car η est un morphisme de foncteurs) :

$$\begin{tikzcd}
GDG(X) \arrow[r, "\eta(G(X))"] \arrow[d, "GD(\varphi)"'] & G(X) \arrow[d, "\varphi"] \\
GD(Y) \arrow[r, "\eta(Y)"] & Y
\end{tikzcd}$$

et la relation $\eta(G(X)) \circ G(\varepsilon(X)) = \mathrm{Id}_{G(X)}$ on a :

$$\begin{aligned}
\big(\Psi(X,Y) \circ \Phi(X,Y)\big)(\varphi) &= \eta(Y) \circ G\big(D(\varphi) \circ \varepsilon(X)\big) = \Big(\eta(Y) \circ GD(\varphi)\Big) \circ G(\varepsilon(X)) \\
&= \Big(\varphi \circ \eta(G(X))\Big) \circ G(\varepsilon(X)) = \varphi \circ \Big(\eta(G(X)) \circ G(\varepsilon(X))\Big) = \varphi
\end{aligned}$$

de même par la commutativité du diagramme (vérifiée car ε est un morphisme de foncteurs) :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varepsilon(X)"] \arrow[d, "\psi"'] & DG(X) \arrow[d, "DG(\psi)"] \\
D(Y) \arrow[r, "\varepsilon(D(Y))"] & DGD(Y)
\end{tikzcd}$$

et la relation $D\big(\eta(Y)\big) \circ \varepsilon\big(D(Y)\big) = \mathrm{Id}_{D(Y)}$, on a :

$$\begin{aligned}
\big(\Phi(X,Y) \circ \Psi(X,Y)\big)(\psi) &= D\big(\eta(Y) \circ G(\psi)\big) \circ \varepsilon(X) = D\big(\eta(Y)\big) \circ \Big(DG(\psi) \circ \varepsilon(X)\Big) \\
&= D\big(\eta(Y)\big) \circ \Big(\varepsilon(D(Y)) \circ \psi\Big) = \Big(D\big(\eta(Y)\big) \circ \varepsilon(D(Y))\Big) \circ \psi = \psi
\end{aligned}$$

ce qui montre que Φ et Ψ sont inverses l'un de l'autre.

Pour montrer que ce sont des isomorphismes de foncteurs, il reste donc à vérifier, pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X')$ et $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, Y')$, la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X), Y) \arrow[r, shift left, "\Phi(X,Y)"] \arrow[r, phantom, "\sim"] \arrow[d, "g\circ"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, D(Y)) \arrow[l, shift left, "\Psi(X,Y)"] \arrow[d, "D(g)\circ"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X), Y') \arrow[r, shift left, "\Phi(X,Y')"] \arrow[r, phantom, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, D(Y')) \arrow[l, shift left, "\Psi(X,Y')"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X'), Y') \arrow[r, shift left, "\Phi(X',Y')"] \arrow[r, phantom, "\sim"] \arrow[u, "\circ G(f)"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', D(Y')) \arrow[l, shift left, "\Psi(X',Y')"] \arrow[u, "\circ f"']
\end{tikzcd}$$

On a en effet, pour $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X), Y)$:

$$\Phi(X, Y')(g \circ \varphi) = D(g) \circ D(\varphi) \circ \varepsilon(X) = D(g) \circ \Phi(X, Y)(g)$$

et pour $\psi' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', D(Y'))$:

$$\Psi(X, Y')(\psi' \circ f) = \eta(Y) \circ G(\psi') \circ G(f) = \Psi(X', Y')(\psi') \circ G(f)$$

(3) On suppose que G est pleinement fidèle ; on a alors pour tout X et X' un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X'), G(X))$$

En particulier on a pour tout X un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(DG(X), X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(GDG(X), G(X))$$

donc par composition avec $\Phi(DG(X), G(X))$ un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(DG(X), X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(DG(X), DG(X))$$

défini par :

$$f \longmapsto \Phi(DG(X), G(X))(G(f)) = DG(f) \circ \varepsilon(DG(X)) = \varepsilon(X) \circ f$$

Pour tout objet X de $\mathcal{C}$, il existe donc un morphisme $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(DG(X), X)$ tel que $\varepsilon(X) \circ f = \mathrm{Id}_{DG(X)}$. On a alors $G(\varepsilon(X)) \circ G(f) = \mathrm{Id}_{GDG(X)}$ donc :

$$G(f) = \Big(\eta(G(X)) \circ G(\varepsilon(X))\Big) \circ G(f) = \eta(G(X)) \circ \Big(G(\varepsilon(X)) \circ G(f)\Big) = \eta(G(X))$$

et donc $G(f \circ \varepsilon(X)) = \eta(G(X)) \circ G(\varepsilon(X)) = \mathrm{Id}_{G(X)}$; mais comme G est pleinement fidèle on a un isomorphisme $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X), G(X))$ d'où $f \circ \varepsilon(X) = \mathrm{Id}_X$.

On a donc montré que pour tout objet X de $\mathcal{C}$, $\varepsilon(X)$ est inversible, ce qui signifie de ε est un isomorphisme de foncteurs.

Réciproquement si pour tout objet X de $\mathcal{C}$, $\varepsilon(X)$ est inversible alors pour tout couple d'objets X et X' de $\mathcal{C}$ on a un isomorphisme :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', DG(X))$$

défini par $f \mapsto \varepsilon(X) \circ f$ et par composition avec $\Psi(X', G(X))$ un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X'), G(X))$$

qui n'est autre que G car défini par

$$f \mapsto \Psi(X', G(X))(\varepsilon(X) \circ f) = \eta(G(X)) \circ G(\varepsilon(X)) \circ G(f) = G(f)$$

ce qui montre que G est pleinement fidèle.

On procède de manière similaire pour montrer que D est pleinement fidèle si et seulement si η est un isomorphisme.