**Exercice 29.** *Soient $A$ un anneau et $I$ et $J$ deux idéaux de $A$.*

*(1) Montrer que* $\mathrm{Tor}_1^A(A, A/J) = 0$.
*(2) Montrer que* $I \otimes (A/J) \simeq I/IJ$.
*(3) Montrer que* $\mathrm{Tor}_1^A(A/I, A/J) \simeq \dfrac{I \cap J}{IJ}$.

**Solution :**

(1) Pour tout $A$-module $M$ libre, projectif ou plat, le foncteur $M \otimes_A \cdot$ est exact, donc les foncteurs dérivés $\mathrm{Tor}_1^A(M, \cdot)$ sont nuls. Comme $A$ est lui-même libre (de rang 1), on a $\mathrm{Tor}_1^A(A, A/J) = 0$.

(2) On part de la suite exacte $0 \longrightarrow J \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A/J \longrightarrow 0$ qu'on tensorise par $I$ à gauche. On obtient la suite exacte $I \otimes_A J \xrightarrow{\mathrm{Id}_I \otimes i} I \otimes_A A \xrightarrow{\mathrm{Id}_I \otimes \pi} I \otimes_A (A/J) \longrightarrow 0$. On rappelle l'isomorphisme : $I \otimes_A A \xrightarrow{\sim} I$ défini par $x \otimes y = xy \otimes 1 \mapsto xy$. On en déduit que la suite exacte précédente est isomorphe à : $I \otimes_A J \xrightarrow{\varphi} I \xrightarrow{\psi} I \otimes_A (A/J) \longrightarrow 0$, où l'on a $\varphi(x \otimes y) = xy$ et $\psi(z) = z \otimes \bar{1}$. On en déduit que $I \otimes_A (A/J)$ est isomorphe à $I/\operatorname{im}\varphi = I/IJ$.

(3) On part de la suite exacte $0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A/I \longrightarrow 0$ qu'on tensorise par $A/J$ à droite. On en déduit la suite exacte longue : $\mathrm{Tor}_1^A(A, A/J) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(A/I, A/J) \longrightarrow$ $\longrightarrow I \otimes_A (A/J) \xrightarrow{i \otimes \mathrm{Id}_J} A \otimes_A (A/J) \xrightarrow{\pi \otimes \mathrm{Id}_J} (A/I) \otimes_A (A/J) \longrightarrow 0$. Or $\mathrm{Tor}_1^A(A, A/J) = 0$, $I \otimes_A (A/J) \simeq I/IJ$ et $A \otimes_A (A/J) \simeq A/J$. Le morphisme $i \otimes \mathrm{Id}_J$ s'identifie ainsi au morphisme $\varphi : I/IJ \to A/J$ défini par $\varphi\big(x \pmod{IJ}\big) = x \pmod{J}$ et $\mathrm{Tor}_1^A(A/I, A/J)$ à $\ker\varphi = \big\{x \pmod{IJ},\ x \in I \text{ et } x = 0 \pmod{J}\big\} = \big\{x \pmod{IJ},\ x \in I \text{ et } x \in J\big\} = (I \cap J)/IJ$.