Exercice 30. *Soit A un anneau, M un A-module et $x \in A$ non diviseur de zéro.*

(1) Calculer $\mathrm{Ext}^1_A(A/(x), M)$.
(2) En particulier calculer $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$.
(3) Montrer qu'un groupe abelien de type fini G est libre si et seulement si $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Z}) = 0$.

Solution :

(1) Le foncteur $\mathrm{Hom}_A(\cdot, M)$ est contravariant exact à gauche. Pour calculer les modules $\mathrm{Ext}^j_A(N, M)$, on considère une résolution projective de N : $\cdot \to P_{-2} \to P_{-1} \to P_0 \to 0$, on applique le foncteur $\mathrm{Hom}_A(\cdot, M)$, ce qui nous donne le complexe : $0 \to \mathrm{Hom}_A(P_0, M) \to \mathrm{Hom}_A(P_{-1}, M) \to \mathrm{Hom}_A(P_{-2}, M) \to \cdot$, et $\mathrm{Ext}^j_A(N, M)$ est isomorphe au j-ième module de cohomologie de ce complexe. (Il faut faire attention à la numérotation : bien que dans une résolution projective, tous les indices soient négatifs, après avoir appliqué un foncteur contravariant, les indices sont tous positif, ainsi $\mathrm{Hom}_A(P_{-j}, M)$ est le j-ième objet du le complexe.)

On applique cette méthode à notre exemple : une résolution libre (donc projective de $A/(x)$ est : $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\times x} A \longrightarrow 0$. (Le premier "A" est l'objet d'indice -1 du complexe et le deuxième l'objet d'indice 0.) On applique le foncteur $\mathrm{Hom}_A(\cdot, M)$: comme $\mathrm{Hom}_A(A, M) \simeq M$ on obtient le complexe $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\times x} M \longrightarrow 0$. (Le premier "M" est l'objet d'indice 0 du complexe et le deuxième l'objet d'indice 1.) On en déduit que $\mathrm{Ext}^1_A(A/(x), M)$ est isomorphe au conoyau de l'application $M \xrightarrow{\times x} M$ c'est à dire M/xM. (Et on a aussi $\mathrm{Ext}^j_A(A/(x), M) = 0$ pour $j > 1$.)

(2) $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est isomorphe à $\dfrac{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}{n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})} = \dfrac{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}{(n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z})/m\mathbb{Z}} = \dfrac{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}{d\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ avec $d = \mathrm{pgcd}(m, n)$. (voir l'exercice 3 pour l'égalité $n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = (n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z})/m\mathbb{Z}$.)

(3) On utilise le théorème de structure des groupes abélien de type fini : $G \simeq \mathbb{Z}^k \oplus \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$ (avec $n_1|n_2|\cdots|n_r$). On a $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$. On en déduit $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Z}) \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$. Le résultat cherché est alors immédiat.