Exercice 30. *Soit A un anneau et I un idéal. Montrer que* $\mathrm{Ext}^1_A(A/I, A/I) \simeq \mathrm{Hom}_A(I/I^2, A/I)$.

Solution : On part de la suite exacte $0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A/I \longrightarrow 0$ auquel on applique le foncteur $\mathrm{Hom}_A(\cdot, A/I)$. On obtient la suite exacte longue : $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A/I, A/I) \xrightarrow{\circ\pi}$
$\longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A, A/I) \xrightarrow{\circ i} \mathrm{Hom}_A(I, A/I) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(A/I, A/I) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(A, A/I)$.

Soit $f \in \mathrm{Hom}_A(A, A/I)$; pour tout $x \in I$ on a $f(x) = \bar{0}$ donc $f \circ i = 0$, ce qui montre que l'application $\mathrm{Hom}_A(A, A/I) \xrightarrow{\circ i} \mathrm{Hom}_A(I, A/I)$ (définie par $f \mapsto f \circ i$) est nulle. De plus $\mathrm{Ext}^1_A(A, A/I) = 0$ car A est libre (de rang 1) donc projectif.

On en déduit que le morphisme $\mathrm{Hom}_A(I, A/I) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(A/I, A/I)$ est un isomorphisme. De plus $\mathrm{Hom}_A(I, A/I) \simeq \mathrm{Hom}_A(I/I^2, A/I)$ d'où le résultat.

(Pour l'isomorphisme $\mathrm{Hom}_A(I, A/I) \simeq \mathrm{Hom}_A(I/I^2, A/I)$ on peut partir de la suite exacte $0 \longrightarrow I^2 \xrightarrow{i} I \xrightarrow{\pi} I/I^2 \longrightarrow 0$. On applique le foncteur $\mathrm{Hom}_A(\cdot, A/I)$. On obtient la suite exacte : $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(I/I^2, A/I) \xrightarrow{\circ\pi} \mathrm{Hom}_A(I, A/I) \xrightarrow{\circ i} \mathrm{Hom}_A(I^2, A/I)$. On remarque alors comme précédemment que si $f \in \mathrm{Hom}_A(I, A/I)$ et $x \in I^2$ alors $f(x) = \bar{0}$, donc $f \circ i = 0$, ce qui montre que l'application $\mathrm{Hom}_A(I, A/I) \xrightarrow{\circ i} \mathrm{Hom}_A(I^2, A/I)$ (définie par $f \mapsto f \circ i$) est nulle, d'où l'isomorphisme cherché.)