Exercice 34. *Soient X un espace topologique, k un corps, et F et G deux faisceaux de k-espace vectoriel sur X. Soit $X = \bigcup_{i\in\mathfrak{I}} X_i$ un recouvrement ouvert de X et pour chaque $i \in \mathfrak{I}$: $\varphi_i \in \hom(F_{|X_i}, G_{|X_i})$ tels que $\forall (i,j) \in \mathfrak{I}^2 : \varphi_{i|X_i\cap X_j} = \varphi_{j|X_i\cap X_j}$. Montrer qu'il existe un unique $\varphi \in \hom(F,G)$ tel que $\varphi_{|X_i} = \varphi_i$.*

Solution : On rappelle que F est un faisceau de k-espace vectoriel sur X si et seulement si pour toute famille d'ouvert $(U_i)_{i\in\mathfrak{I}}$ la suite suivante est exacte :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & F\left(\bigcup_{i\in\mathfrak{I}} U_i\right) & \longrightarrow & \prod_{i\in\mathfrak{I}} F(U_i) & \longrightarrow & \prod_{(i,j)\in\mathfrak{I}^2} F(U_i\cap U_j) \\
& s & \longmapsto & (s_{|U_i})_{i\in\mathfrak{I}} & & \\
& & & (s_i)_{i\in\mathfrak{I}} & \longmapsto & \left(s_{i|U_i\cap U_j} - s_{j|U_i\cap U_j}\right)_{(i,j)\in\mathfrak{I}^2}
\end{array}$$

Soit alors U un ouvert et pour tout $i \in \mathfrak{I}$: $U_i = X_i \cap U$. Si φ est un morphisme de faiceaux, on a alors un diagramme commutatif dans lequel les lignes horizontales sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F(U) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi(U)"'] & \prod_{i\in\mathfrak{I}} F(U_i) \arrow[r] \arrow[d, "\left(\varphi(U_i)\right)_{i\in\mathfrak{I}}"] & \prod_{(i,j)\in\mathfrak{I}^2} F(U_i\cap U_j) \arrow[d, "\left(\varphi(U_i\cap U_j)\right)_{(i,j)\in\mathfrak{I}^2}"] \\
0 \arrow[r] & G(U) \arrow[r] & \prod_{i\in\mathfrak{I}} G(U_i) \arrow[r] & \prod_{(i,j)\in\mathfrak{I}^2} G(U_i\cap U_j)
\end{tikzcd}$$

Si de plus $\varphi_{|X_i} = \varphi_i$ alors $\forall i \in \mathfrak{I} : \varphi(U_i) = \varphi_i(U_i)$ et $\forall (i,j) \in \mathfrak{I}^2 : \varphi(U_i \cap U_j) = \varphi_i(U_i\cap U_j) = \varphi_j(U_i \cap U_j)$. On a donc un diagramme commutatif dans lequel les lignes horizontales sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F(U) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi(U)"'] & \prod_{i\in\mathfrak{I}} F(U_i) \arrow[r] \arrow[d, "\left(\varphi_i(U_i)\right)_{i\in\mathfrak{I}}"] & \prod_{(i,j)\in\mathfrak{I}^2} F(U_i\cap U_j) \arrow[d, "\left(\varphi_i(U_i\cap U_j)\right)_{(i,j)\in\mathfrak{I}^2}"] \\
0 \arrow[r] & G(U) \arrow[r] & \prod_{i\in\mathfrak{I}} G(U_i) \arrow[r] & \prod_{(i,j)\in\mathfrak{I}^2} G(U_i\cap U_j)
\end{tikzcd}$$

On remarque que dans ce diagramme, le carré commutatif de droite détermine $\varphi(U)$ car $F(U)$ et $G(U)$ sont les noyaux des deux flèches horizontales de ce carré.

Il reste à vérifier que φ ainsi construit est bien un morphisme de faisceaux. Pour cela il faut que pour tous ouverts $U \supset V$ de X le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
F(U) \arrow[r, "|_V"] \arrow[d, "\varphi(U)"'] & F(V) \arrow[d, "\varphi(V)"] \\
G(U) \arrow[r, "|_V"'] & G(V)
\end{tikzcd}$$

Ceci se fait en observant le diagramme suivant, dans lequel tous les carrés — et les parallélogrammes — sont commutatifs sauf a priori le parallélogramme en pointillé à gauche :

$$\begin{tikzcd}
 & & F(U) \arrow[r, hook, "\alpha_1"] \arrow[d, dashed, "\beta_1"] \arrow[ddll, dashed, "\gamma_1"'] & \prod_{i\in\mathfrak{I}} F(U_i) \arrow[d, "\beta_3"] \arrow[ddll, "\gamma_2"] \\
 & & G(U) \arrow[r, hook, "\alpha_2"] \arrow[ddll, dashed, "\gamma_3"] & \prod_{i\in\mathfrak{I}} G(U_i) \arrow[ddll, "\gamma_4"] \\
F(V) \arrow[r, hook, "\alpha_3"] \arrow[d, dashed, "\beta_2"] & \prod_{i\in\mathfrak{I}} F(V_i) \arrow[d, "\beta_4"] & & \\
G(V) \arrow[r, hook, "\alpha_4"] & \prod_{i\in\mathfrak{I}} G(V_i) & &
\end{tikzcd}$$

(Dans ce diagramme les morphismes notés α_i, β_i et γ_i sont donnés par construction qui précède.)

On veut justement vérifier que $\beta_2 \circ \gamma_1 = \gamma_3 \circ \beta_1$; comme α_4 est injectif, il suffit de vérifier que $\alpha_4 \circ \beta_2 \circ \gamma_1 = \alpha_4 \circ \gamma_3 \circ \beta_1$; ceci est immédiat :

$$\alpha_4 \circ \beta_2 \circ \gamma_1 = \beta_4 \circ \alpha_3 \circ \gamma_1 = \beta_4 \circ \gamma_2 \circ \alpha_1 = \gamma_4 \circ \beta_3 \circ \alpha_1 = \gamma_4 \circ \alpha_2 \circ \beta_1 = \alpha_4 \circ \gamma_3 \circ \beta_1$$

Ceci montre donc que φ est un morphisme de faisceaux.

De plus si $U \subset X_i$, alors $U_i = U$ et on a alors un carré commutatif, extrait du diagramme qui détermine $\varphi(U)$:

$$\begin{tikzcd}
F(U) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\varphi(U)"'] & F(U_i) \arrow[d, "\varphi_i(U_i)"] \\
G(U) \arrow[r, "\sim"] & G(U_i)
\end{tikzcd}$$

ce qui montre que $\varphi(U) = \varphi_i(U)$. Ainsi pour tout $i \in \mathfrak{I}$ on a $\varphi_{|X_i} = \varphi_i$.