Exercice 35. *Soit X un espace topologique et $X = \bigcup_{i\in\mathfrak{I}} X_i$ un recouvrement de X par des ouverts. Nous noterons $X_{ij} = X_i \cap X_j$ et $X_{ijk} = X_i \cap X_j \cap X_k$.*
On considère pour chaque $i \in \mathfrak{I}$ un faisceau F_i sur X_i et pour chaque couple $(i,j) \in \mathfrak{I}^2$ un isomorphisme $\varphi_{ij} : F_{j|X_{ij}} \longrightarrow F_{i|X_{ij}}$. Pour tout ouvert U de X on définit :

$$\begin{aligned}\Phi_U : \prod_{i\in\mathfrak{I}} F_i(X_i\cap U) &\longrightarrow \prod_{(i,j)\in\mathfrak{I}^2} F_i(X_{ij}\cap U)\\ (s_i)_{i\in\mathfrak{I}} &\longmapsto \big(s_{i|X_{ij}\cap U} - \varphi_{ij}(s_{j|X_{ij}\cap U})\big)_{(i,j)\in\mathfrak{I}^2}\end{aligned}$$

et on pose $F(U) = \ker \Phi_U$.

(1) Montrer que F est un faisceau.

On suppose désormais que pour tout $i \in \mathfrak{I}$ on a $\varphi_{ii} = \mathrm{Id}_{F_i}$ et que pour tout $(i,j,k) \in \mathfrak{I}^3$ on a $\varphi_{ij|X_{ijk}} \circ \varphi_{jk|X_{ijk}} = \varphi_{ik|X_{ijk}}$.

(2) Montrer pour tout $i \in \mathfrak{I}$ l'existence d'un unique isomorphisme de faisceau $F_i \overset{\varphi_i}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} F_{|X_i}$ tel que pour tout $(i,j) \in \mathfrak{I}^2$ on ait : $\varphi_{i|X_{ij}} \circ \varphi_{ij} = \varphi_{j|X_{ij}}$.

(3) Soit G est un faisceau sur X ; on suppose que pour tout $i \in \mathfrak{I}$ il existe un isomorphisme $F_i \overset{\psi_i}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} G_{|X_i}$ et que pour tout $(i,j) \in \mathfrak{I}^2$ on a $\psi_{j|X_{ij}} = \psi_{i|X_{ij}} \circ \varphi_{ij}$; montrer qu'il existe un unique isomorphisme $F \xrightarrow{\psi} G$ tel que pour tout $i \in \mathfrak{I}$ on ait $\psi_i = \psi_{|X_i} \circ \varphi_i$.

(On dit que F est le recollement des faisceaux F_i à l'aide des isomorphismes φ_{ij}.)

Solution :

(1) Soit $V \subset U$ deux ouverts de X ; le diagramme suivant, dans lequel les flèches verticales sont données par les morphismes de restriction des faisceaux F_i, est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \prod_{i\in\mathfrak{I}} F_i(X_i\cap U) \arrow[r, "\Phi_U"] \arrow[d, "\sigma_{VU}"] & \prod_{(i,j)\in\mathfrak{I}^2} F_i(X_{ij}\cap U) \arrow[d, "\tau_{VU}"] \\ \prod_{i\in\mathfrak{I}} F_i(X_i\cap V) \arrow[r, "\Phi_V"] & \prod_{(i,j)\in\mathfrak{I}^2} F_i(X_{ij}\cap V) \end{tikzcd}$$

$$\sigma_{VU}\big((s_i)_{i\in\mathfrak{I}}\big) = (s_{i|X_i\cap V})_{i\in\mathfrak{I}}$$
$$\tau_{VU}\big((s_{ij})_{(i,j)\in\mathfrak{I}^2}\big) = (s_{ij|X_{ij}\cap V})_{i\in\mathfrak{I}^2}$$

En effet (on rappelle que φ_{ij} commute avec les morphismes de restriction car c'est un morphisme de faisceau.) :

$$\begin{aligned}\tau_{VU}\circ\Phi_U\big((s_i)_{i\in\mathfrak{I}}\big) = \tau_{VU}\Big(\big(s_{i|X_{ij}\cap U} - \varphi_{ij}(s_{j|X_{ij}\cap U})\big)_{(i,j)\in\mathfrak{I}^2}\Big) = \\ \big(s_{i|X_{ij}\cap V} - \varphi_{ij}(s_{j|X_{ij}\cap V})\big)_{(i,j)\in\mathfrak{I}^2} = \Phi_V\big((s_{i|V})_{i\in\mathfrak{I}}\big) = \Phi_V\circ\sigma_{VU}\big((s_i)_{i\in\mathfrak{I}}\big)\end{aligned}$$

On définit alors le morphisme de restriction : $F(U) \xrightarrow{\rho_{VU}} F(V)$ en complétant ce diagramme de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & F(U) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\rho_{VU}"'] & \prod_{i\in\mathfrak{I}} F_i(X_i\cap U) \arrow[r, "\Phi_U"] \arrow[d, "\sigma_{VU}"] & \prod_{(i,j)\in\mathfrak{I}^2} F_i(X_{ij}\cap U) \arrow[d, "\tau_{VU}"] \\ 0 \arrow[r] & F(V) \arrow[r] & \prod_{i\in\mathfrak{I}} F_i(X_i\cap V) \arrow[r, "\Phi_V"] & \prod_{(i,j)\in\mathfrak{I}^2} F_i(X_{ij}\cap V) \end{tikzcd}$$

De plus si $W \subset V \subset U$ sont trois ouverts de X on vérifie que $\rho_{WU} = \rho_{WV} \circ \rho_{VU}$ grâce au diagramme commutatif suivant, dans lequel on remarque que $\sigma_{WU} = \sigma_{WV} \circ \sigma_{VU}$ (on notera en conséquence $s_{|_V} = \rho_{VU}(s)$) :

$$\begin{tikzcd}
F(U) \arrow[r, hook, "\alpha_U"] \arrow[d, dashed, "\rho_{VU}"'] \arrow[dd, dashed, bend right=60, "\rho_{WU}"'] & \prod\limits_{i\in\mathfrak{I}} F_i(X_i\cap U) \arrow[d, "\sigma_{VU}"] \arrow[dd, bend left=60, "\sigma_{WU}"] \\
F(V) \arrow[r, hook, "\alpha_V"] \arrow[d, dashed, "\rho_{WV}"'] & \prod\limits_{i\in\mathfrak{I}} F_i(X_i\cap V) \arrow[d, "\sigma_{WV}"] \\
F(W) \arrow[r, hook, "\alpha_W"] & \prod\limits_{i\in\mathfrak{I}} F_i(X_i\cap W)
\end{tikzcd}$$

En effet $\alpha_W \circ \rho_{WV} \circ \rho_{VU} = \sigma_{WV} \circ \alpha_V \circ \rho_{VU} = \sigma_{WV} \circ \sigma_{VU} \circ \alpha_U = \sigma_{WU} \circ \alpha_U = \alpha_W \circ \rho_{WU}$ or α_W est injective donc $\rho_{WV} \circ \rho_{VU} = \rho_{WU}$.

Soit $(U_k)_{k\in\mathfrak{K}}$ une famille d'ouvert de X ; on note $U_{kl} = U_k \cap U_l$; on considère le diagramme commutatif suivant, dans lequel les lignes sont des suites exactes données par la définition de F, el les deux colonnes de droite des suites exactes car les F_i sont des faisceaux :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & F\left(\bigcup\limits_{k\in\mathfrak{K}} U_k\right) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \prod\limits_{i\in\mathfrak{I}} F_i\left(X_i \cap \bigcup\limits_{k\in\mathfrak{K}} U_k\right) \arrow[r] \arrow[d] & \prod\limits_{(i,j)\in\mathfrak{I}^2} F_i\left(X_{ij} \cap \bigcup\limits_{k\in\mathfrak{K}} U_k\right) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \prod\limits_{k\in\mathfrak{K}} F(U_k) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \prod\limits_{\substack{i\in\mathfrak{I}\\ k\in\mathfrak{K}}} F_i(X_i\cap U_k) \arrow[r] \arrow[d] & \prod\limits_{\substack{(i,j)\in\mathfrak{I}^2\\ k\in\mathfrak{K}}} F_i(X_{ij}\cap U_k) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \prod\limits_{(k,l)\in\mathfrak{K}^2} F(U_{kl}) \arrow[r] & \prod\limits_{\substack{i\in\mathfrak{I}\\ (k,l)\in\mathfrak{K}^2}} F_i(X_i\cap U_{kl}) \arrow[r] & \prod\limits_{\substack{(i,j)\in\mathfrak{I}^2\\ (k,l)\in\mathfrak{K}^2}} F_i(X_{ij}\cap U_{kl})
\end{tikzcd}$$

On en déduit l'exactitude de la suite :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F\left(\bigcup\limits_{k\in\mathfrak{K}} U_k\right) \arrow[r] & \prod\limits_{k\in\mathfrak{K}} F(U_k) \arrow[r] & \prod\limits_{(k,l)\in\mathfrak{K}^2} F(U_{kl}) \\
 & s \arrow[r, mapsto] & (s_{|_{U_k}})_{k\in\mathfrak{K}} & \\
 & & (s_k)_{k\in\mathfrak{K}} \arrow[r, mapsto] & (s_{k|_{U_{kl}}} - s_{l|_{U_{kl}}})_{(k,l)\in\mathfrak{K}^2}
\end{tikzcd}$$

donc F est un faisceau.

(2) Si $U \subset X_{i_0}$ et si $(s_i)_{i\in\mathfrak{I}} \in F(U)$ (avec $s_i \in F_i(X_i \cap U)$) alors, d'après la définition de $F(U)$, on a pour tout $i \in \mathfrak{I}$: $s_{i|_{X_{i,i_0}\cap U}} = \varphi_{i,i_0}(s_{i_0|_{X_{i,i_0}\cap U}})$; or $U \subset X_{i_0}$ donc $X_{i,i_0} \cap U = X_i \cap U$ d'où $s_{i|_{X_{i,i_0}\cap U}} = s_{i|_{X_i\cap U}} = s_i$ et $s_{i_0|_{X_{i,i_0}\cap U}} = s_{i_0|_{X_i\cap U}}$ et donc pour tout $i \in \mathfrak{I}$ on a : $s_i = \varphi_{i,i_0}(s_{i_0|_{X_i\cap U}})$.

Réciproquement, on suppose que pour tout $i \in \mathfrak{I}$ on ait $s_i = \varphi_{i,i_0}(s_{i_0|X_i \cap U})$. On a alors : $\Phi_U\big((s_i)_{i\in\mathfrak{I}}\big) = \big(s_{i|X_{ij}\cap U} - \varphi_{ij}(s_{j|X_{ij}\cap U})\big)_{(i,j)\in\mathfrak{I}^2} = \big(\varphi_{i,i_0}(s_{i_0|X_{ij}\cap U}) - \varphi_{ij}\circ\varphi_{j,i_0}(s_{i_0|X_{ij}\cap U})\big)_{(i,j)\in\mathfrak{I}^2}$ or $U \subset X_{i_0}$ donc $X_{ij} \cap U = X_{i,j,i_0} \cap U$ et comme $\varphi_{ij|X_{i,j,i_0}} \circ \varphi_{j,i_0|X_{i,j,i_0}} = \varphi_{i,i_0|X_{i,j,i_0}}$ on en déduit $\Phi_U\big((s_i)_{i\in\mathfrak{I}}\big) = 0$.

On a donc pour tout ouvert $U \subset X_{i_0}$ un isomorphisme $F_{i_0}(U) \xrightarrow{\sim} F(U)$ défini par : $s \longmapsto \big(\varphi_{i,i_0}(s_{|X_i\cap U})\big)_{i\in\mathfrak{I}}$ d'où l'isomorphisme de faisceaux $F_{|X_{i_0}} \simeq F_{i_0}$.

(3) Il suffit d'appliquer l'exercice 34 avec les morphismes $\psi_i \circ \varphi_i^{-1} : F_{|X_i} \to G_{|X_i}$. Pour tout $(i,j) \in \mathfrak{I}^2$ on a $\psi_{j|X_{ij}} = \psi_{i|X_{ij}} \circ \varphi_{ij} = \psi_{i|X_{ij}} \circ \varphi^{-1}_{i|X_{ij}} \circ \varphi_{j|X_{ij}}$ donc $(\psi_j \circ \varphi_j^{-1})_{|X_{ij}} = (\psi_i \circ \varphi_i^{-1})_{|X_{ij}}$; il existe donc un unique morphisme $\psi : F \to G$ tel que pour tout $i \in \mathfrak{I}$ on ait $\psi_{|X_i} = \psi_i \circ \varphi_i^{-1}$.