Exercice 36. *Soit K un corps et X un espace topologique connexe et localement connexe et F un faisceau de K-espaces vectoriels localement constant sur X tel que $F(X) \neq (0)$ et tel que pour tout $x \in X$ on ait $F_x \simeq K$. Montrer que F est constant.*

On rappelle que X est localement connexe si et seulement si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

(a) *pour tout $x \in X$, tout voisinage de x contient un voisinage connexe de x,*

(b) *les composantes connexes d'un ouvert de X sont des ouverts.*

Solution : On montre d'abord l'équivalence des conditions (a) et (b) :

(a) $\Rightarrow$ (b) Soit U un ouvert de X et $(U_i)_{i\in\mathfrak{I}}$ ses composantes connexes ; on considère pour tout i un point $x_i \in U_i$ et V_{x_i} un voisinage connexe de x_i ; nécessairement $V_i \subset U_i$ car V_i est connexe, donc U_i est un voisinage de x_i ; ceci montre que U_i est un ouvert puisqu'il est voisinage de tous ses points.

(b) $\Rightarrow$ (a) Soit $x \in X$, V un vosinage de x, U l'intérieur de V et $(U_i)_{i\in\mathfrak{I}}$ les composantes connexes de U ; $x \in U$ car V est un voisinage de x, donc il existe $i_0 \in \mathfrak{I}$ tel que $x \in U_{i_0}$ et comme U_{i_0} est ouvert, c'est un voisinage de x ; de plus il est connexe et inclus dans U.

Soit $(X_i)_{i\in\mathfrak{I}}$ un recouvrement de X tel que pour tout $i \in \mathfrak{I}$, $F_{|X_i} \xrightarrow[\sim]{\varphi_i} K_{X_i}$; quitte à remplacer cette famille par la famille de toutes les composantes connexes des X_i, on peut supposer que pour tout $i \in \mathfrak{I}$, X_i est connexe. On note $\varphi_{ij} = \varphi_{i|X_i\cap X_j} \circ \varphi^{-1}_{j|X_i\cap X_j} : K_{X_i\cap X_j} \xrightarrow{\sim} K_{X_i\cap X_j}$.

On va montrer que si U est un ouvert de X alors l'application de restriction $F(X) \to F(U)$ est injective.
On note $U_i = U \cap X_i$; soit $\sigma \in F(X)$ tel que $\sigma \neq 0$, $f_i = \varphi_i(\sigma_{|X_i})$, $\tau = \sigma_{|U}$ et pour tout $i \in \mathfrak{I}$: $g_i = \varphi_i(\tau_{|U_i}) = f_{i|U_i}$:

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[rrr, hook] \arrow[ddd] & & & \prod_{i\in\mathfrak{I}} K_{X_i}(X_i) \arrow[ddd] \\
& \sigma \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (f_i)_{i\in\mathfrak{I}} \arrow[d, mapsto] & \\
& \tau \arrow[r, mapsto] & (g_i)_{i\in\mathfrak{I}} & \\
F(U) \arrow[rrr, hook] & & & \prod_{i\in\mathfrak{I}} K_{X_i}(U_i)
\end{tikzcd}$$

Pour montrer que $\tau \neq 0$ il suffit de montrer qu'il existe $i \in \mathfrak{I}$ tel que $g_i \neq 0$ car l'application $F(U) \to \prod_{i\in\mathfrak{I}} F(U_i) \simeq \prod_{i\in\mathfrak{I}} K_{X_i}(U_i)$ est injective (car F est un faisceau).

On pose $\mathfrak{J} = \{j \in \mathfrak{I},\ U_j = \emptyset \text{ et } f_j \neq 0\}$ et $\mathfrak{K} = \{k \in \mathfrak{I},\ U_k \neq \emptyset \text{ ou } f_k = 0\}$ et $V = \bigcup_{j\in\mathfrak{J}} U_j$ et $W = \bigcup_{k\in\mathfrak{K}} U_k$.

On a $\mathfrak{K} \neq \emptyset$ sinon $\mathfrak{I} = \mathfrak{J}$ et alors $U = \emptyset$ car pour tout $j \in \mathfrak{J}$: $U_j = \emptyset$. On a donc aussi $W \neq \emptyset$.

On remarque que si $U_i \neq \emptyset$ et $g_i = 0$ alors $f_i = 0$ car f_i est une fonction localement constante sur X_i qui est connexe, donc f_i est une fonction constante, or elle est nulle sur U_i, donc elle est nulle partout.

On raisonne maintenant par l'absurde : si pour tout $i \in \mathfrak{I}$ on a $g_i = 0$ alors $\mathfrak{J} \neq \emptyset$ sinon $\mathfrak{I} = \mathfrak{K}$ et alors $\sigma = 0$ car pour tout $k \in \mathfrak{K}$: $f_k = 0$ d'après la remarque précédente. On a donc aussi $V \neq \emptyset$. Comme $X = V \cup W$ est connexe, on a $V \cap W \neq \emptyset$ donc il existe $j_0 \in \mathfrak{J}$ et $k_0 \in \mathfrak{K}$ tel que $X_{j_0} \cap X_{k_0} \neq \emptyset$ mais alors $f_{k_0|X_{j_0}\cap X_{k_0}} = 0$ car $f_{k_0} = 0$ et $f_{j_0|X_{j_0}\cap X_{k_0}} \neq 0$ car f_{j_0} est une fonction localement constante non nulle sur X_{j_0} qui est connexe, et $X_{j_0} \cap X_{k_0} \neq \emptyset$, Or $f_{j_0|X_{j_0}\cap X_{k_0}} = \varphi_{j_0k_0}\big(f_{k_0|X_{j_0}\cap X_{k_0}}\big)$ d'où la contradiction.

De ce qui précède on déduit que :

— $F(X) \simeq K$ car $0 \neq F(X) \hookrightarrow F(X_i) \simeq K$ (ce dernier isomorphisme vient de ce que X_i est connexe et $F_{|X_i} \simeq K_{X_i}$).

— Pour tout ouvert connexe non vide U on a $F(U) \neq 0$ et donc il existe un isomorphisme $\psi_U : F(U) \xrightarrow{\sim} K$ (Il suffit d'appliquer ce qu'on vient de prouver pour X à l'ouvert U).

— Pour tout couple d'ouverts connexes non vides $V \subset U$ le morphisme de restriction

$$\rho_{UV} : F(U) \to F(V)$$

est un isomorphisme, car il est injectif et $F(U)$ et $F(V)$ dont tout deux isomorphes à K.

Pour chaque ouvert connexe non vide U on note $a_U = \psi(U) \circ \rho_{UX} \circ \psi_X^{-1}(1) \in K^*$ si bien que pour tout couple d'ouverts connexes non vides $U \subset V$ on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "\psi_X"] \arrow[d, "\rho_{VX}"] \arrow[dd, bend right, "\rho_{UX}"'] & K \arrow[r, "\times 1"'] \arrow[d, "\times a_V"] \arrow[dd, bend right, "\times a_U"'] & K \arrow[r, equal] \arrow[d, "\times 1"'] \arrow[dd, bend left, "\times 1"] & K_X(X) \arrow[d] \arrow[dd, bend left] \\
F(V) \arrow[r, "\psi_V"] \arrow[d, "\rho_{UV}"] & K \arrow[r, "\times \frac{1}{a_V}"] \arrow[d, "\times \frac{a_U}{a_V}"] & K \arrow[r, equal] \arrow[d, "\times 1"'] & K_X(V) \arrow[d] \\
F(U) \arrow[r, "\psi_U"] & K \arrow[r, "\times \frac{1}{a_U}"] & K \arrow[r, equal] & K_X(U)
\end{tikzcd}$$

ce qui montre l'isomorphisme $F \simeq K_X$.