Exercice 37. *Soit X un espace topologique connexe A un anneau commutatif unitaire et M un A-module. Montrer que si $M_X \xrightarrow{\varphi} M_X$ est un morphisme de faisceau alors il existe $f \in \hom_A(M, M)$ tel que pour tout ouvert U de X le morphisme $M_X(U) \xrightarrow{\varphi(U)} M_X(U)$ soit défini par $s \mapsto f \circ s$.*

Solution : Comme X est connexe et M_X est le faisceau associé au pré-faisceau constant M (défini par $M(U) = M$ pour tout ouvert U et $\rho_{VU} = \mathrm{Id}$ pour tout $V \subset U$) Il suffit de montrer l'énoncé pour ce pré-faisceau.
On a $M(U) = M$ pour tout ouvert U. On pose $f_U = \varphi(U) : M \to M$. On a alors un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, equal] \arrow[d, "f_X"'] & M(X) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\varphi(X)"'] & M(U) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\varphi(U)"] & M \arrow[d, "f_U"] \\ M \arrow[r, equal] & M(X) \arrow[r, equal] & M(U) \arrow[r, equal] & M \end{tikzcd}$$

ce qui montre que pour tout ouvert U on a $f_U = f_X$.
De plus si φ est un isomorphisme alors f_X est nécessairement inversible.