Exercice 38.

(1) Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et F un faisceaux de k-espaces vectoriels sur $I \cup J$ tel que $F_{|_I} \simeq k_I$ et $F_{|_J} \simeq k_J$. Montrer que $F \simeq k_{I\cup J}$.

(2) Soit F un faisceau de k-espaces vectoriels localement constant sur $I =]0,1[\subset \mathbb{R}$. Montrer que $F \simeq k_I$.

(3) Montrer le même résultat pour $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$.

Solution :

(1) Le résultat est trivial si $I \cap J = \emptyset$. On supposera donc $I \cap J \neq \emptyset$. F est obtenu par recollement des faisceaux k_I et k_J à l'aide d'un isomorphisme

$$k_{J|_{I\cap J}} = k_{I\cap J} \xrightarrow[\sim]{\varphi_{IJ}} k_{I\cap J} = k_{I|_{I\cap J}}$$

Or I et J sont des intervalles donc $I \cap J$ l'est aussi et alors, d'après l'exercice 37, cet isomorphisme est la multiplication par un élément $a \in k^*$ et on a pour tout ouvert U de $I \cup J$ le diagramme commutatif dans lequel les lignes sont des suites exactes (la première ligne est donnée par la définition du recollement de l'exercice 34) :

$$\begin{tikzcd}
 & & (s,t) \arrow[r, mapsto] & (s_{|_{U\cap I\cap J}} - at_{|_{U\cap I\cap J}}) \\
0 \arrow[r] & F(U) \arrow[r] & k_I(U\cap I) \times k_J(U\cap J) \arrow[r] \arrow[d, "\wr", "(s,t)\mapsto(s,at)"'] & k_I(U\cap I\cap J) \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & k_{I\cup J}(U) \arrow[r] & k_{I\cup J}(U\cap I) \times k_{I\cup J}(U\cap J) \arrow[r] & k_{I\cup J}(U\cap I\cap J) \\
 & & (s,t) \arrow[r, mapsto] & (s_{|_{U\cap I\cap J}} - t_{|_{U\cap I\cap J}})
\end{tikzcd}$$

d'où pour tout ouvert $U \subset I \cup J$ un isomorphisme $\varphi_U : F(U) \xrightarrow{\sim} k_{I\cup J}(U)$. Le lecteur vérifiera par la méthode utilisée dans l'exercice 34 que ces isomorphismes commuttent avec les morphismes de retriction. On obtient donc ainsi un isomorphisme de faisceaux $\varphi : F \xrightarrow{\sim} k_{I\cup J}$.

(2) On considère un intervalle ouvert $J =]a,b[\subset]0,1[= I$ maximal tel que $F_{|_J} \simeq k_J$. Si $J \neq I$ alors $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.

On va traiter le cas $a \neq 0$: comme F est localement constant, il existe un intervalle ouvert J' contenant a tel que $F_{|_{J'}} \simeq k_{J'}$, mais alors d'après la question (1) $F_{|_{J\cup J'}} \simeq k_{J\cup J'}$ ce qui contredit la maximalité de J.

Le cas $b \neq 1$ se traite exactement de la même façon.

On a donc nécessairement $J =]0,1[$ d'où le résultat.

(3) D'après la question (2) on sait que $F_{|_{]0,1[}} \simeq k_{]0,1[}$. De plus existe des voisinages $[0,\alpha[$ de 0 et $]\beta,1]$ de 1 tels que $F_{|_{[0,\alpha[}} \simeq k_{[0,\alpha[}$ et $F_{|_{]\beta,1]}} \simeq k_{]\beta,1]}$ et on conclut grâce à la question (1).