Exercice 39. *Soient $X = \mathbb{S}^1$, X_1, X_2 et X_3 trois arcs de cercle et $F_i = k_{X_i}$ avec k un corps. Nous supposerons que les intersections $X_{12} = X_1 \cap X_2$, $X_{23} = X_2 \cap X_3$ et $X_{31} = X_3 \cap X_1$ sont non vides et connexes et que $X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \emptyset$.*
Soient $\varphi_{12} : F_{2|X_{12}} \xrightarrow{\times\alpha} F_{1|X_{12}}$, $\varphi_{23} : F_{3|X_{23}} \xrightarrow{\times\beta} F_{2|X_{23}}$, $\varphi_{31} : F_{1|X_{31}} \xrightarrow{\times\gamma} F_{3|X_{31}}$ et F le faisceau sur X obtenu par recollement des F_i à l'aide des isomorphismes φ_{ij} (voir exercice 35)
De même soient $\varphi'_{12} : F_{2|X_{12}} \xrightarrow{\times\alpha'} F_{1|X_{12}}$, $\varphi'_{23} : F_{3|X_{23}} \xrightarrow{\times\beta'} F_{2|X_{23}}$, $\varphi'_{31} : F_{1|X_{31}} \xrightarrow{\times\gamma'} F_{3|X_{31}}$ et F' le faisceau sur X obtenu par recollement des F_i à l'aide des isomorphismes φ'_{ij}

(1) *Montrer que $F \simeq F'$ si et seulement si $\alpha\beta\gamma = \alpha'\beta'\gamma'$*

(2) *Donner une condition nécessaire et suffisante sur α, β et γ pour que F soit un faisceau constant.*

Solution :

(1) On suppose qu'il existe un isomorphisme $\varphi : F \to F'$; celui-ci induit alors des isomorphismes $\varphi_i : F_{|X_i} \to F'_{|X_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ mais pour tout i on a : $F_{|X_i} \simeq F_i \simeq k_{X_i}$ et $F'_{|X_i} \simeq F_i \simeq k_{X_i}$, donc les morphismes φ_i sont des multiplications par des éléments $a, b, c \in k^*$ (cf. exercice 37). On a alors pour tout ouvert U un diagramme commutatif, dans lequel les lignes sont exactes et données par la construction de F et F' par recollement (cf. exercice 35) (on note $U_i = U \cap X_i$ et $U_{ij} = U \cap X_i \cap X_j$.) :

$$\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=huge]
0 \arrow[r] & F(U) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi(U)"', "\wr"] & F_1(U_1) \times F_2(U_2) \times F_3(U_3) \arrow[r, "{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\gamma \\ -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & -\beta & 1 \end{pmatrix}}"] \arrow[d, "{\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}}"] & F_1(U_{12}) \times F_2(U_{23}) \times F_3(U_{31}) \arrow[d, "{\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}}"'] \\
0 \arrow[r] & F'(U) \arrow[r] & F_1(U_1) \times F_2(U_2) \times F_3(U_3) \arrow[r, "{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\gamma' \\ -\alpha' & 1 & 0 \\ 0 & -\beta' & 1 \end{pmatrix}}"] & F_1(U_{12}) \times F_2(U_{23}) \times F_3(U_{31})
\end{tikzcd}$$

On a donc $\begin{pmatrix} a & 0 & -a\gamma \\ -b\alpha & b & 0 \\ 0 & -c\beta & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & -c\gamma' \\ -a\alpha' & b & 0 \\ 0 & -b\beta' & c \end{pmatrix}$ d'où $b\alpha = a\alpha'$, $c\beta = b\beta'$ et $a\gamma = c\gamma'$; il en résulte que $abc\alpha\beta\gamma = abc\alpha'\beta'\gamma'$ et $\alpha\beta\gamma = \alpha'\beta'\gamma'$ car $abc \neq 0$.
Réciproquement, si l'on a $\alpha\beta\gamma = \alpha'\beta'\gamma'$ on construit un isomorphisme de faisceaux $F \xrightarrow{\varphi} F'$ à l'aide du diagramme qui précède en prenant par exemple $a = \dfrac{1}{\alpha'}$, $b = \dfrac{1}{\alpha}$ et $c = \beta'\gamma$. (Avec ce choix, le carré de droite dans le diagramme est commutatif ; les détails de la construction de φ sont dans l'exercice 34.)

(2) F est constant si et seulement si $\alpha\beta\gamma = 1$.