Exercice 41. *Soit* $X = \mathbb{R}^2$*,* $Y = \mathbb{R}$ *et* $Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ xy \geq 1\}$*. on définit* $f : X \to Y$ *tel que* $f(x, y) = y$*. Calculer* $f_* k_{XZ}$*.*

Solution : Z a deux composantes connexes qui sont fermées dans X :

$$Z^+ = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2,\ xy \geq 1\} \quad \text{et} \quad Z^- = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^-)^2,\ xy \geq 1\}$$

donc $f_* k_{XZ} = f_* k_{XZ^+} \oplus f_* k_{XZ^-}$. Par ailleurs, si I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, alors $f^{-1}(I) = \mathbb{R} \times I$ et on a :

$$\Gamma(I, f_* k_{XZ^+}) = \Gamma(\mathbb{R} \times I, k_{XZ^+}) = \Gamma((\mathbb{R} \times I) \cap Z^+, k_{Z^+}).$$

(La dernière égalité résulte du fait que si S est un fermé de X alors $k_{XS} = j_* k_S$ où $j : S \hookrightarrow X$ est l'injection naturelle.) On voit facilement (faire un dessin) que $(\mathbb{R} \times I) \cap Z^+ = \emptyset$ si $I \subset R^{-*}$ et que $(\mathbb{R} \times I) \cap Z^+$ est connexe sinon, donc :

$$\Gamma((\mathbb{R} \times I) \cap Z^+, k_{Z^+}) = \begin{cases} 0 \text{ si } I \subset \mathbb{R}^{-*} \\ k \text{ sinon} \end{cases}$$

On en déduit que $f_* k_{XZ^+} = k_{Y\mathbb{R}^+}$; on a aussi $f_* k_{XZ^-} = k_{Y\mathbb{R}^-}$ d'où : $f_* k_{XZ} = k_{Y\mathbb{R}^-} \oplus k_{Y\mathbb{R}^+}$.