Exercice 43. *Soient X et Y deux espaces topologiques et $f : Y \longrightarrow X$ une application continue, surjective vérifiant la condition suivante :*

(*) Tout point de X admet un voisinage ouvert U tel que $f^{-1}(U) = V_1 \sqcup V_2$ et $f_{|V_i} : V_i \longrightarrow U$ soit un homéomorphisme ($i = 1, 2$)

(Une telle application et appelée revêtement étale de degré 2.) Soit k un corps.

(1) Décrire une application naturelle $\mathrm{nat} : k_X \longrightarrow f_* k_Y$.

(2) Montrer qu'il existe un morphisme $\mathrm{tr} : f_* k_Y \longrightarrow k_X$ *tel que* $\mathrm{tr} \circ \mathrm{nat} = 2\,\mathrm{Id}_{k_X}$. *(Utiliser l'exercice 1.)*

(3) En déduire que si k est de caractéristique différente de 2 alors il existe un faisceau de k-espace vectoriel L sur X localement constant de dimension 1, tel que $f_* k_Y \simeq k_X \oplus L$.

(4) Montrer que si Y est connexe, le faisceau L n'est pas constant.

(5) Construire un exemple...

Solution :

(1) On pose $\mathrm{nat}(s) = s \circ f$. (On rappelle que s est une fonction de X dans k.)

(2) D'après l'hypothèse $(*)$, X admet un recouvrement par des ouverts U_i tels que $f^{-1}(U_i) = V_{i,1} \sqcup V_{i,2}$ et $f_{|V_{i,j}} : V_{i,j} \longrightarrow U_i$ soit un homéomorphisme. Pour fabriquer le morphisme tr il suffit de le définir sur ces ouverts U_i. (On obtient tr par recollement grâce à l'exercice 34.)
On a $f_* k_Y(U_i) = k_Y(V_{i,1}) \times k_Y(V_{i,2})$. Soit alors $t = (t_1, t_2) \in f_* k_Y(U_i)$; on pose $\mathrm{tr}(t_1, t_2) = t_1 \circ f^{-1} + t_2 \circ f^{-1}$.
Si $s \in k_X(U_i)$, on a alors $\mathrm{tr} \circ \mathrm{nat}(s) = \mathrm{tr}(s \circ f, s \circ f) = 2s$.

(3) Soit $L = \ker(\mathrm{tr})$. On déduit des 2 questions précédentes que la suite exacte $0 \to L \to f_* k_Y \to k_X \to 0$ est scindée. Donc $f_* k_Y \simeq k_X \oplus L$.
De la question (2) on déduit aisément que $L_{|U_i} \simeq k_{U_i}$ donc L est localement constant.

(4) On a $L(X) = \ker\big((f_* k_Y)(X) \overset{\mathrm{tr}}{\to} k_X(X)\big) = \ker\big((k_Y)(Y) \overset{\mathrm{tr}}{\to} k_X(X)\big)$. Si Y est connexe alors X l'est aussi et alors $L(X) = \ker(k \overset{\times 2}{\to} k) = 0$ Donc L n'est pas constant.
(On pourra vérifier que L est le faisceau défini dans l'exercice 39 avec $\alpha\beta\gamma = -1$.)

(5) $X = Y = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$ et $f : z \mapsto z^2$.