Exercice 44. *Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$ on note $C^\infty_{\mathbb{C}}(U)$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur U et $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes définies sur U. Si $\mathfrak{I}$ un ensemble totalement ordonné on note $\mathfrak{I}^{[n]} = \{(i_1, \dots, i_n) \in \mathfrak{I}^n,\ i_1 < \dots < i_n\}$;*

(1) *Montrer que $C^\infty_{\mathbb{C}}$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ sont des faisceaux.*

(2) *Soit $\mathfrak{I}$ un ensemble totalement ordonné et $(U_i)_{i\in\mathfrak{I}}$ une famille d'ouvert de $\mathbb{C}$. Montrer que la suite :*

$$\prod_{i\in\mathfrak{I}} \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}(U_i) \xrightarrow{\varphi} \prod_{(i,j)\in\mathfrak{I}^{[2]}} \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}(U_{ij}) \xrightarrow{\psi} \prod_{(i,j,k)\in\mathfrak{I}^{[3]}} \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}(U_{ijk})$$

avec :
$$\varphi\big((f_i)_{i\in\mathfrak{I}}\big) = (f_{j|_{U_{ij}}} - f_{i|_{U_{ij}}})_{(i,j)\in\mathfrak{I}^{[2]}}$$
et :
$$\psi\big((f_{ij})_{(i,j)\in\mathfrak{I}^{[2]}}\big) = (f_{ij|_{U_{ijk}}} + f_{jk|_{U_{ijk}}} - f_{ik|_{U_{ijk}}})_{(i,j,k)\in\mathfrak{I}^{[3]}}$$

est exacte. (Indication : on admettra qu'il existe une partition de l'unité C^∞, localement finie et subordonnée à la partition $(U_i)_{i\in\mathfrak{I}}$, c'est à dire une famille $(\alpha_i)_{i\in\mathfrak{I}}$ de fonctions C^∞ définies sur $\bigcup_{i\in\mathfrak{I}} U_i$ telle que :

(a) *$\forall i \in \mathfrak{I} : \mathrm{supp}(\alpha_i) \subset U_i$ ($\mathrm{supp}(\alpha_i)$ est un fermé, adhérence de $\{x \in \mathbb{C},\ \alpha_i(x) \neq 0\}$),*

(b) *$\forall x \in \bigcup_{i\in\mathfrak{I}} U_i$ l'ensemble $\{i \in \mathfrak{I},\ \alpha_i(x) \neq 0\}$ est fini,*

(c) *$\sum_{i\in\mathfrak{I}} \alpha_i = 1$,*

et on montrera que $(f_{ij})_{(i,j)\in\mathfrak{I}^{[2]}} \in \ker\psi$ admet pour antécédant par φ la famille $(f_i)_{i\in\mathfrak{I}}$ définie par $f_i = \sum_{k\in\mathfrak{I}} \alpha_k f_{ki}$ (avec la convention $f_{ki} = -f_{ik}$ si $k > i$ et $f_{ii} = 0$). (On veillera à montrer que les fonctions $\alpha_k f_{ki}$ ont un prolongement C^∞ à U_i.)

(3) *Soit $(U_i)_{i\in\mathfrak{I}}$ une famille d'ouvert de $\mathbb{C}$. Montrer qu'on a une suite exacte :*

$$\prod_{i\in\mathfrak{I}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U_i) \xrightarrow{\varphi} \prod_{(i,j)\in\mathfrak{I}^{[2]}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U_{ij}) \xrightarrow{\psi} \prod_{(i,j,k)\in\mathfrak{I}^{[3]}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U_{ijk})$$

(Indication : on admettra que la suite $0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}(U) \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}(U) \longrightarrow 0$ est exacte pour tout ouvert $U \subset \mathbb{C}$.)

(4) *Soit ω un ouvert de $\mathbb{R}$ et Ω_1 et Ω_2 deux ouverts de $\mathbb{C}$ tel que $\Omega_1 \cap \mathbb{R} = \Omega_2 \cap \mathbb{R} = \omega$. Montrer que $\dfrac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega_1 \setminus \omega)}{\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega_1)} \simeq \dfrac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega_2 \setminus \omega)}{\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega_2)}$.*

(5) *Si ω est un ouvert de $\mathbb{R}$ on pose $B(\omega) = \dfrac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega \setminus \omega)}{\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega)}$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$ tel que $\Omega \cap \mathbb{R} = \omega$. Montrer que B est un faisceau flasque.*

(6) *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $\omega = \Omega \cap \mathbb{R}$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k(z) \dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}$ un opérateur différentiel holomorphe sur Ω ($\forall k : a_k(z) \in \mathcal{O}(\Omega)$). Montrer que P induit un morphisme surjectif $P : B(\omega) \longrightarrow B(\omega)$. (On rappelle le théorème de Cauchy : si $a_n(z)$ ne s'annule pas et si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$ dont chaque composante connexe est simplement connexe alors l'application $P : \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega)$ est surjective.)*

Solution :

(1) $C^\infty_{\mathbb{C}}$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ sont évidement des faisceaux car :

— Une fonction, C^∞ ou holomorphe, nulle sur tous les U_i est nulle sur $\displaystyle\bigcup_{i\in\mathfrak{I}} U_i$.

— Des fonctions f_i ($i \in \mathfrak{I}$) telles que pour tout $i \in \mathfrak{I}$, f_i soit C^∞ ou holomorphe sur U_i, et telles que pour tout $(i,j) \in \mathfrak{I}^2$ on ait $f_{i|_{U_{ij}}} = f_{j|_{U_{ij}}}$ se recollent en une fonction f, C^∞ ou holomorphe sur $\displaystyle\bigcup_{i\in\mathfrak{I}} U_i$ telle que pour tout $i \in \mathfrak{I}$: $f_{|_{U_i}} = f_i$.

On a donc deux suites exactes :

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}\left(\bigcup_{i\in\mathfrak{I}} U_i\right) \xrightarrow{\rho} \prod_{i\in\mathfrak{I}} \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}(U_i) \xrightarrow{\varphi} \prod_{(i,j)\in\mathfrak{I}^{[2]}} \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}(U_{ij})$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}}\left(\bigcup_{i\in\mathfrak{I}} U_i\right) \xrightarrow{\rho} \prod_{i\in\mathfrak{I}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U_i) \xrightarrow{\varphi} \prod_{(i,j)\in\mathfrak{I}^{[2]}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U_{ij})$$

avec :
$$\rho(f) = (f_{|_{U_i}})_{i\in\mathfrak{I}}$$
et :
$$\varphi\big((f_i)_{i\in\mathfrak{I}}\big) = (f_{j|_{U_{ij}}} - f_{i|_{U_{ij}}})_{(i,j)\in\mathfrak{I}^{[2]}}$$

(2) On a $\psi\circ\varphi\big((f_i)_{i\in\mathfrak{I}}\big) = \big((f_{j|_{U_{ijk}}} - f_{i|_{U_{ijk}}}) + (f_{k|_{U_{ijk}}} - f_{j|_{U_{ijk}}}) - (f_{k|_{U_{ijk}}} - f_{i|_{U_{ijk}}})\big)_{(i,j,k)\in\mathfrak{I}^{[3]}} = 0$ donc $\operatorname{im}\varphi \subset \ker\psi$.

Réciproquement, on considère une famille $(f_{ij})_{(i,j)\in\mathfrak{I}^{[2]}} \in \ker\psi$ et suivant l'indication, on remarque que les fonctions $\alpha_k f_{ki}$ définies sur U_{ki} se prolongent par 0 sur $U_i \setminus U_{ki}$ de façon $\mathcal{C}^\infty$ car le support de α_k ne rencontre pas $U_i \setminus U_{ki}$. De plus pour tout $x \in U_i$ la somme $\displaystyle\sum_{k\in\mathfrak{I}} (\alpha_k f_{ki})(x)$ est une somme finie d'après la propriété (b), donc la fonction $f_i = \displaystyle\sum_{k\in\mathfrak{I}} \alpha_k f_{ki}$ est bien définie sur U_i.

On a alors pour $(i,j) \in \mathfrak{I}^{[2]}$: $f_{j|_{U_{ij}}} - f_{i|_{U_{ij}}} = \displaystyle\sum_{k\in\mathfrak{I}} \alpha_k (f_{kj} - f_{ki})$ mais pour tout $(i,j,k) \in \mathfrak{I}^3$ on a $f_{kj} - f_{ki} = f_{ij}$ car $(f_{ij})_{(i,j)\in\mathfrak{I}^{[2]}} \in \ker\psi$ (et grâce à la convention adoptée) donc $f_{j|_{U_{ij}}} - f_{i|_{U_{ij}}} = \displaystyle\sum_{k\in\mathfrak{I}} \alpha_k f_{ij} = f_{ij}$ car $\displaystyle\sum_{k\in\mathfrak{I}} \alpha_k = 1$. Ceci montre que $(f_{ij})_{(i,j)\in\mathfrak{I}^{[2]}} \in \operatorname{im}\varphi$.

On a donc bien l'égalité cherchée $\operatorname{im}\varphi = \ker\psi$

(3) On considère le diagramme commutatif suivant, dans lequel les lignes et les deux colonnes de droite sont des suites exactes :

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}\left(\bigcup_{i\in\mathfrak{I}} U_i\right) \arrow[r, "\overline{\partial}"] \arrow[d, "\rho"] & \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}\left(\bigcup_{i\in\mathfrak{I}} U_i\right) \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & 0 \\
 & \prod_{i\in\mathfrak{I}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U_i) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\varphi"] & \prod_{i\in\mathfrak{I}} \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}(U_i) \arrow[r, "\overline{\partial}"] \arrow[d, "\varphi"] & \prod_{i\in\mathfrak{I}} \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}(U_i) \arrow[d, "\varphi"] & \\
0 \arrow[r] & \prod_{(i,j)\in\mathfrak{I}^{[2]}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U_{ij}) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\psi"] & \prod_{(i,j)\in\mathfrak{I}^{[2]}} \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}(U_{ij}) \arrow[r, "\overline{\partial}"] \arrow[d, "\psi"] & \prod_{(i,j)\in\mathfrak{I}^{[2]}} \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}(U_{ij}) & \\
0 \arrow[r] & \prod_{(i,j,k)\in\mathfrak{I}^{[3]}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U_{ijk}) \arrow[r] & \prod_{(i,j,k)\in\mathfrak{I}^{[3]}} \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}(U_{ijk}) & &
\end{tikzcd}$$

On en déduit formellement l'exactitude de la suite :

$$\prod_{i\in\mathfrak{I}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U_i) \xrightarrow{\varphi} \prod_{(i,j)\in\mathfrak{I}^{[2]}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U_{ij}) \xrightarrow{\psi} \prod_{(i,j,k)\in\mathfrak{I}^{[3]}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U_{ijk})$$

Pour cela on considère le diagramme commutatif générique suivant, dans lequel les objets sont des A-modules (où A est un anneau commutatif unitaire) :

$$\begin{tikzcd}
 & & N_0 \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, "\beta_0"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_0"] & 0 \\
 & M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha_1"] & N_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\beta_1"] & P_1 \arrow[d, "\gamma_1"] & \\
0 \arrow[r] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\alpha_2"] & N_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "\beta_2"] & P_2 & \\
0 \arrow[r] & M_3 \arrow[r, "f_3"] & N_3 & &
\end{tikzcd}$$

On a $f_3 \circ \alpha_2 \circ \alpha_1 = \beta_2 \circ \beta_1 \circ f_1 = 0$ donc $\alpha_2 \circ \alpha_1 = 0$ car f_3 est injectif ; ceci montre l'inclusion $\operatorname{im}\alpha_1 \subset \ker\alpha_2$.

Soit alors $x_2 \in \ker\alpha_2$; on a $\beta_2 \circ f_2(x_2) = f_3 \circ \alpha_2(x_2) = 0$ donc il existe $y_1 \in N_1$ tel que $\beta_1(y_1) = f_2(x_2)$; on a alors $\gamma_1 \circ g_1(y_1) = g_2 \circ \beta_1(y_1) = g_2 \circ f_2(x_2) = 0$ donc il existe $z_0 \in P_0$ tel que $\gamma_0(z_0) = g_1(y_1)$; or g_0 est surjectif donc il existe $y_0 \in N_0$ tel que $g_0(y_0) = z_0$; on pose alors $y_1' = y_1 - \beta_0(y_0)$ et on a $g_1(y_1') = g_1(y_1) - g_1 \circ \beta_0(y_0) = g_1(y_1) - \gamma_0 \circ g_0(y_0) = g_1(y_1) - \gamma_0(z_0) = 0$ donc il existe $x_1 \in M_1$ tel que $f_1(x_1) = y_1'$; de plus $\beta_1(y_1') = \beta_1(y_1) = f_2(x_2)$ donc $f_2 \circ \alpha_1(x_1) = \beta_1 \circ f_1(x_1) = \beta_1(y_1') = f_2(x_2)$ d'où $\alpha_1(x_1) = x_2$ car f_2 est injectif. Ceci établit l'exactitude de la suite

$$M_1 \xrightarrow{\alpha_1} M_2 \xrightarrow{\alpha_2} M_3$$

(4) Il suffit de montrer le résultat pour les ouverts $\Omega_1 \cap \Omega_2$ et Ω_2 d'une part et $\Omega_1 \cap \Omega_2$ et Ω_1 d'autre part ; on peut donc supposer sans restriction de généralité que $\Omega_1 \subset \Omega_2$.

On remarque tout d'abord que si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\omega = \Omega \cap \mathbb{R}$ alors $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega \setminus \omega)$ car une fonction holomorphe, définie sur Ω et nulle sur $\Omega \setminus \omega$ est évidement nulle sur tout Ω. Ceci justifie la notation de quotient $\dfrac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega \setminus \omega)}{\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega)}$.

On considère l'application $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega_2 \setminus \omega) \xrightarrow{\lambda} \dfrac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega_1 \setminus \omega)}{\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega_1)}$ définie par $f \mapsto \overline{f_{|\Omega_1 \setminus \omega}}$; on remarque que $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega_2) \in \ker\pi$ car une fonction définie sur Ω_2 et nulle sur $\Omega_1 \setminus \omega$ est évidement nulle sur tout Ω_1. On peut donc factoriser λ par un morphisme unique

$$\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega_2 \setminus \omega)}{\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega_2)} \xrightarrow{\mu} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega_1 \setminus \omega)}{\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega_1)}$$

Soit alors $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega_2 \setminus \omega)$ telle que $\mu(\overline{f}) = 0$; il existe donc une fonction $g \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega_1)$ telle que $g_{|\Omega_1 \setminus \omega} = f_{|\Omega_1 \setminus \omega}$ mais alors il existe une fonction $h \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega_2)$ (car $\Omega_2 = (\Omega_2 \setminus \omega) \cup \Omega_1$) telle que $h_{|\Omega_2 \setminus \omega} = f$ ce qui montre que $\overline{f} = 0$ dans $\dfrac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega_2 \setminus \omega)}{\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega_2)}$ et que μ est injectif.

Remarque : pour montrer l'injectivité de μ on a utilisé l'exactitude de la suite :

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega_2) \xrightarrow{\rho} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega_2 \setminus \omega) \times \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega_1) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega_1 \setminus \omega)$$

qui est une des propriétés qui caractérise le fait que $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ soit un faisceau. Pour la surjectivité on va utiliser l'exactitude de la suite :

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega_2 \setminus \omega) \times \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega_1) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega_1 \setminus \omega) \xrightarrow{\psi} 0$$

sui vient du résultat de la question (3) appliqué au 2 ouverts $\Omega_2 \setminus \omega$ et Ω_1. En effet, soit $g \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega_1 \setminus \omega)$; d'après la suite exacte qui précède il existe $(f, h) \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega_2 \setminus \omega) \times \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega_1)$ tel que $g = f_{|\Omega_1 \setminus \omega} - h_{|\Omega_1 \setminus \omega}$ ce qui signifie que $\overline{g} = \mu(\overline{f})$ et montre que μ est surjectif.

(5) Soit $\mathfrak{I}$ un ensemble ordonné, et $(\omega_i)_{i \in \mathfrak{I}}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}$; Pour chaque i on considère un ouvert Ω_i de $\mathbb{C}$ tel que $\omega_i = \Omega_i \cap \mathbb{R}$ (par exemple $\Omega_i = \{z \in \mathbb{C}, \Re e(z) \in \omega_i\}$). On considère le diagramme commutatif suivant, dans lequel les lignes et les deux colonnes de gauche sont des suites exactes :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d, dashed] & \\
 & \mathcal{O}_{\mathbb{C}}\left(\bigcup\limits_{i \in \mathfrak{I}} \Omega_i\right) \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & \mathcal{O}_{\mathbb{C}}\left(\bigcup\limits_{i \in \mathfrak{I}} \Omega_i \setminus \omega_i\right) \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & B\left(\bigcup\limits_{i \in \mathfrak{I}} \omega_i\right) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\rho"] & 0 \\
 & \prod\limits_{i \in \mathfrak{I}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega_i) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & \prod\limits_{i \in \mathfrak{I}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega_i \setminus \omega_i) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & \prod\limits_{i \in \mathfrak{I}} B(\omega_i) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\varphi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \prod\limits_{(i,j) \in \mathfrak{I}^{[2]}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega_{ij}) \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & \prod\limits_{(i,j) \in \mathfrak{I}^{[2]}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega_{ij} \setminus \omega_{ij}) \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & \prod\limits_{(i,j) \in \mathfrak{I}^{[2]}} B(\omega_{ij}) & \\
0 \arrow[r] & \prod\limits_{(i,j,k) \in \mathfrak{I}^{[3]}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega_{ijk}) \arrow[r] & \prod\limits_{(i,j,k) \in \mathfrak{I}^{[3]}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega_{ijk} \setminus \omega_{ijk}) & &
\end{tikzcd}$$

On en déduit formellement l'exactitude de la suite

$$0 \longrightarrow \prod_{i \in \mathfrak{I}} B(\omega_i) \xrightarrow{\rho} \prod_{i \in \mathfrak{I}} B(\omega_i) \xrightarrow{\varphi} \prod_{(i,j) \in \mathfrak{I}^{[2]}} B(\omega_{ij})$$

ce qui montre que B est un faisceau. Pour cela on considère le diagramme commutatif générique suivant, dans lequel les objets sont des A-modules (où A est un anneau commutatif unitaire) :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & M_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\alpha_0"] & N_0 \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, "\beta_0"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_0"] & 0 \\
 & M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha_1"] & N_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\beta_1"] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\alpha_2"] & N_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "\beta_2"] & P_2 & \\
0 \arrow[r] & M_3 \arrow[r, "f_3"] & N_3 & &
\end{tikzcd}$$

On a $\gamma_1 \circ \gamma_0 \circ g_0 = g_2 \circ \beta_1 \circ \beta_0 = 0$ donc $\gamma_1 \circ \gamma_0 = 0$ car g_0 est surjectif ; ceci montre l'inclusion $\operatorname{im} \gamma_0 \subset \ker \gamma_1$.

Soit alors $z_1 \in \ker \gamma_1$; comme g_1 est surjectif, il existe $y_1 \in N_1$ tel que $z_1 = g_1(y_1)$; on a alors $g_2 \circ \beta_1(y_1) = \gamma_1 \circ g_1(y_1) = \gamma_1(z_1) = 0$, donc il existe $x_2 \in M_2$ tel que $\beta_1(y_1) = f_2(x_2)$; on a alors $f_3 \circ \alpha_2(x_2) = \beta_2 \circ f_2(x_2) = \beta_2 \circ \beta_1(y_1) = 0$ donc $\alpha_2(x_2) = 0$ car f_3 est injective ; il existe donc $x_1 \in M_1$ tel que $x_2 = \alpha_1(x_1)$; on pose $y_1' = y_1 - f_1(x_1)$; on a $\beta_1(y_1') = \beta_1(y_1) - \beta_1 \circ f_1(x_1) = \beta_1(y_1) - f_2 \circ \alpha_1(x_1) = \beta_1(y_1) - f_2(x_2) = 0$ donc il existe $y_0 \in N_0$ tel que que $y_1' = \beta_0(y_0)$; on pose $z_0 = g_0(y_0)$ et on a $\gamma_0(z_0) = \gamma_0 \circ g_0(y_0) = g_1 \circ \beta_0(y_0) = g_1(y_1') = g_1(y_1) = z_1$; ceci établit l'exactitude de la suite :

$$P_0 \xrightarrow{\gamma_0} P_1 \xrightarrow{\gamma_1} P_2$$

De même soit $z_0 \in \ker \gamma_0$; comme g_0 est surjectif, il existe $y_0 \in N_0$ tel que $z_0 = g_0(y_0)$; on a alors $g_1 \circ \beta_0(y_0) = \gamma_0 \circ g_0(y_0) = \gamma_0(z_0) = 0$, donc il existe $x_1 \in M_1$ tel que $\beta_0(y_0) = f_1(x_1)$; on a alors $f_2 \circ \alpha_1(x_1) = \beta_1 \circ f_1(x_1) = \beta_1 \circ \beta_0(y_0) = 0$ donc $\alpha_1(x_1) = 0$ car f_2 est injective ; il existe donc $x_0 \in M_0$ tel que $x_1 = \alpha_0(x_0)$; on a alors $\beta_0 \circ f_0(x_0) = f_1 \circ \alpha_0(x_0) = f_1(x_1) = \beta_0(y_0)$ donc $f_0(x_0) = y_0$ car β_0 est injectif ; mais alors $z_0 = g_0 \circ f_0(x_0) = 0$ ce qui montre l'injectivité de γ_0 d'où l'exactitude de la suite :

$$0 \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\gamma_0} P_1 \xrightarrow{\gamma_1} P_2$$

Il reste à montrer que B est flasque, ce qui signifie que pour tout couple d'ouverts $\omega_1 \subset \omega_2$ le morphisme de restriction $B(\omega_2) \to B(\omega_1)$ est surjectif. On fixe deux ouvert Ω_1 et Ω_2 tels que $\Omega_1 \cap \mathbb{R} = \omega_1$ et $\Omega_2 \cap \mathbb{R} = \omega_2$ et on procède comme dans la question (4) en utilisant l'exactitude de la suite :

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega_2 \setminus \omega_2) \times \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega_1) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega_1 \setminus \omega_1) \xrightarrow{\psi} 0$$

sui vient du résultat de la question (3) appliqué au 2 ouverts $\Omega_2 \setminus \omega_2$ et Ω_1. Les détails de cette démonstration sont laissés au lecteur.

(6) Pour tout $x \in \omega$ on fixe Ω_x une boule ouverte de centre x incluse dans Ω qui ne contient aucun zéro de la fonction holomorphe $a_n(z)$ hors de l'axe des réels ; ceci est possible car les zéros d'une fonction holomorphe forment un ensemble discret dans son domaine de définition. Pour tout composante connexe ω_i de ω on pose $\Omega_i = \displaystyle\bigcup_{x \in \omega_i} \Omega_x$. On pose également $\Omega' = \displaystyle\bigcup_i \Omega_i$ de sorte que :

- $\Omega' \subset \Omega$,
- $\omega = \Omega' \cap \mathbb{R}$,
- les composantes connexes Ω_i de Ω' sont simplement connexes, et en conséquence, les composantes connexes de $\Omega' \setminus \omega$ aussi,
- la fonction holomorphe $a_n(z)$ ne s'annule pas sur $\Omega' \setminus \omega$

On a donc un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega') \arrow[r] \arrow[d, "P"] & \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega' \setminus \omega) \arrow[r] \arrow[d, "P"] & B(\omega) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega') \arrow[r] & \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega' \setminus \omega) \arrow[r] & B(\omega) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

duquel découle la définition et la surjectivité d'un morphisme $P : B(\omega) \longrightarrow B(\omega)$.