Exercice 45. *Soit X l'espace topologique formé de la réunion des arêtes du tétraèdre de $\mathbb{R}^3$ de sommets $A = (0,0,0)$, $B = (1,0,0)$, $C = (0,1,0)$ et $D = (0,0,1)$*

(1) Soit k un corps commutatif ; calculer $H^j(X, k_X)$ pour $j \geq 0$.

(2) Calculer $H^j(X, \mathbb{Z}_X)$ pour $j \geq 0$.

Solution :

(1) On écrit X comme réunion des 2 fermés $Z_1 = [A,B] \cup [B,C] \cup [C,D]$ et $Z_2 = [B,D] \cup [D,A] \cup [A,C]$. On a $Z_1 \cap Z_2 = \{A,B,C,D\}$. Ainsi, ces deux fermés sont contractiles et les composantes connexes de leur intersection le sont aussi. D'après le théorème 6.4.7 du cours, le module de cohomologie $H^j(X, k_X)$ est donc égal au j-éme module de cohomologie du complexe $\Gamma(X, k^\bullet_{X,\mathcal{Z}})$

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, k_{X,Z_1}) \oplus \Gamma(X, k_{X,Z_2}) \xrightarrow{M} \Gamma(X, k_{X,Z_1\cap Z_2}) \longrightarrow 0$$

(obtenu à partir ducomplexe de Čech $k^\bullet_{X,\mathcal{Z}} : 0 \to k_{X,Z_1} \oplus k_{X,Z_2} \to k_{X,Z_1\cap Z_2} \to 0$ défini au paragraphe 6.3). Cependant : $\Gamma(X, k_{X,Z_i}) = \Gamma(Z_i, k_{Z_i}) = k$ car Z_i est connexe ($i = 1, 2$), $\Gamma(X, k_{X,Z_1\cap Z_2}) = \Gamma(X, k_{X,\{A,B,C,D\}}) = \Gamma(\{A,B,C,D\}, k_{\{A,B,C,D\}}) = k^4$ et

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

— On a : $H^0(X, k_X) \simeq \Gamma(X, k_X) = k$.
— Comme M est de rang 1, on obtient : $H^1(X, k_X) \simeq H^1(\Gamma(X, k^\bullet_{X,\mathcal{Z}})) \simeq \operatorname{coker} M \simeq k^3$.
— Enfin on a : $H^j(X, k_X) \simeq H^j(\Gamma(X, k^\bullet_{X,\mathcal{Z}})) = 0$ pour $j \geq 2$.

(2) Comme dans la question précédente, le module de cohomologie $H^j(X, \mathbb{Z}_X)$ est égal au j-éme module de cohomologie du complexe $\Gamma(X, \mathbb{Z}^\bullet_{X,\mathcal{Z}})$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{M} \mathbb{Z}^4 \longrightarrow 0$$

— On a : $H^0(X, \mathbb{Z}_X) \simeq \Gamma(X, \mathbb{Z}_X) = \mathbb{Z}$,
— Le rang de M ne suffit pas à déterminer son conoyau car un $\mathbb{Z}$-module peut avoir une composante de torsion ; on raisonne alors en remarquant que $\operatorname{im} M$ est engendré par le vecteur $(1,1,1,1)$, qu'on peut compléter en une base de $\mathbb{Z}^4$:

$$\{(1,1,1,1); (0,1,0,0); (0,0,1,0); (0,0,0,1)\}$$

ainsi $H^1(X, \mathbb{Z}_X) \simeq H^1(\Gamma(X, \mathbb{Z}^\bullet_{X,\mathcal{Z}})) \simeq \operatorname{coker} M \simeq \mathbb{Z}^3$.
— Enfin on a : $H^j(X, k_X) \simeq H^j(\Gamma(X, k^\bullet_{X,\mathcal{Z}})) = 0$ pour $j \geq 2$.