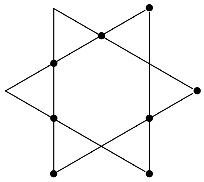
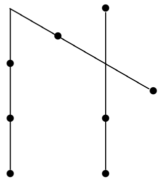
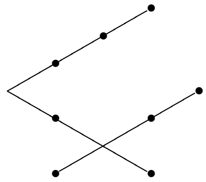
Exercice 46. *Soit* $\omega = \exp(2i\pi/3) \in \mathbb{C}$, X_1 *l'espace topologique formé de la réunion des arêtes du triangle de sommets* 1, ω *et* ω^2, X_2 *l'espace topologique formé de la réunion des arêtes du triangle de sommets* -1, $-\omega$ *et* $-\omega^2$, *et* $X = X_1 \cup X_2$.

(1) Soit k *un corps commutatif ; calculer* $H^j(X, k_X)$ *pour* $j \geq 0$.

(2) Calculer $H^j(X, \mathbb{Z}_X)$ *pour* $j \geq 0$.

Solution : On raisonne comme dans l'exercice précédent en écrivant $X = Z_1 \cup Z_2$ avec :

$X =$  $Z_1 =$  $Z_2 =$ 

L'intersection de Z_1 et de Z_2 est formé de 8 points (marqués par des " • " sur la figure). On trouve alors :

— $H^0(X, k_X) = k$, $H^1(X, k_X) \simeq k^7$ et $H^j(X, k_X) = 0$ pour $j \geq 2$,

— $H^0(X, \mathbb{Z}_X) = \mathbb{Z}$, $H^1(X, \mathbb{Z}_X) \simeq \mathbb{Z}^7$ et $H^j(X, \mathbb{Z}_X) = 0$ pour $j \geq 2$.

Le lecteur pourra se convaincre que la cohomologie de ce type d'espace topologique dépend uniquement du nombre de "trou" visible dans le dessin plan (3 trou pour l'exercice précédent et 7 trou pour celui-ci).