Exercice 48. *Soit $\mathbb{S}^n$ la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$.*
On pose $Z_1 = \mathbb{S}^n \cap \big(\mathbb{R}^n \times]-\infty, 0]\big)$ et $Z_2 = \mathbb{S}^n \cap \big(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty[\big)$.

(1) Montrer que Z_1 et Z_2 sont contractiles et que $Z_1 \cap Z_2 = \mathbb{S}^{n-1}$ pour $n \geq 1$.

(2) Soit k un corps commutatif ; calculer par récurrence sur n les modules $H^j(\mathbb{S}^n, k_{\mathbb{S}^n})$ pour $n \geq 0$ et $j \geq 0$.

(3) Calculer $H^j(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}_{\mathbb{S}^n})$ pour $n \geq 0$ et $j \geq 0$.

(4) Montrer que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est homotope à $\mathbb{S}^{n-1}$. En déduire que $\mathbb{R}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^p$ si et seulement si $n = p$.

Solution :

(1) La projection de $\mathbb{R}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}^n$ définie par $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$ induit des homéomorphismes de Z_1 et Z_2 avec la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ qui est contractile, donc Z_1 et Z_2 le sont aussi, et on a $Z_1 \cap Z_2 = \mathbb{S}^n \cap \big(\mathbb{R}^n \times \{0\}\big) = \mathbb{S}^{n-1}$.

(2) Pour tout $n \geq 1$ on a :

— $H^0(\mathbb{S}^n, k_{\mathbb{S}^n}) \simeq \Gamma(\mathbb{S}^n, k_{\mathbb{S}^n}) = k$ car $\mathbb{S}^n$ est connexe.

— $H^0(\mathbb{S}^n, k_{\mathbb{S}^n, Z_i}) \simeq \Gamma(\mathbb{S}^n, k_{\mathbb{S}^n, Z_i}) \simeq \Gamma(Z_i, k_{Z_i}) = k$ et $H^j(\mathbb{S}^n, k_{\mathbb{S}^n, Z_i}) = 0$ pour $j \geq 1$ car Z_i est contractile ($i = 1, 2$).

— pour tout $j \geq 0$: $H^j(\mathbb{S}^n, k_{\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^{n-1}}) \simeq H^j(\mathbb{S}^{n-1}, k_{\mathbb{S}^{n-1}})$.

De plus :

— $\mathbb{S}^0 = \{-1, +1\}$, donc $H^0(\mathbb{S}^0, k_{\mathbb{S}^0}) \simeq \Gamma(\mathbb{S}^0, k_{\mathbb{S}^0}) = k^2$ et $H^j(\mathbb{S}^0, k_{\mathbb{S}^0}) = 0$ pour $j \geq 1$.

— Pour $n = 1$ on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow k_{\mathbb{S}^1} \longrightarrow k_{\mathbb{S}^1, Z_1} \oplus k_{\mathbb{S}^1, Z_2} \longrightarrow k_{\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^0} \longrightarrow 0$$

dont la suite longue de cohomologie associée est

$$\begin{aligned}
&0 \longrightarrow k \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)} k^2 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)} k^2 \longrightarrow \\
&\longrightarrow H^1(\mathbb{S}^1, k_{\mathbb{S}^1}) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \\
&\longrightarrow H^2(\mathbb{S}^1, k_{\mathbb{S}^1}) \longrightarrow 0 \cdots\cdots
\end{aligned}$$

et de laquelle on déduit que $H^1(\mathbb{S}^1, k_{\mathbb{S}^1}) \simeq k$ et $H^j(\mathbb{S}^1, k_{\mathbb{S}^1}) = 0$ pour $j \neq 0, 1$.

— Pour $n = 2$ on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow k_{\mathbb{S}^2} \longrightarrow k_{\mathbb{S}^2, Z_1} \oplus k_{\mathbb{S}^2, Z_2} \longrightarrow k_{\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^1} \longrightarrow 0$$

dont la suite longue de cohomologie associée est

$$\begin{aligned}
&0 \longrightarrow k \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)} k^2 \xrightarrow{(-1\ 1)} k \longrightarrow\\
&\longrightarrow H^1(\mathbb{S}^2, k_{\mathbb{S}^2}) \longrightarrow 0 \longrightarrow k \longrightarrow\\
&\longrightarrow H^2(\mathbb{S}^2, k_{\mathbb{S}^2}) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow\\
&\longrightarrow H^3(\mathbb{S}^2, k_{\mathbb{S}^2}) \longrightarrow 0 \cdots\cdots
\end{aligned}$$

et de laquelle on déduit que $H^2(\mathbb{S}^2, k_{\mathbb{S}^2}) \simeq k$ et $H^j(\mathbb{S}^2, k_{\mathbb{S}^2}) = 0$ pour $j \neq 0, 2$.

Par une récurrence facile, on trouve ainsi que $H^n(\mathbb{S}^n, k_{\mathbb{S}^n}) \simeq k$ et $H^j(\mathbb{S}^n, k_{\mathbb{S}^n}) = 0$ pour $j \neq 0, n$.

(3) De la même manière on trouve que $H^0(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}_{\mathbb{S}^n}) \simeq \Gamma(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}_{\mathbb{S}^n}) = \mathbb{Z}$, $H^n(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}_{\mathbb{S}^n}) \simeq \mathbb{Z}$ et $H^j(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}_{\mathbb{S}^n}) = 0$ pour $j \neq 0, n$.

(4) L'application $\mathbb{S}^{n-1} \times]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ telle que $\big((x_1, \ldots, x_n), t\big) \mapsto (tx_1, \ldots, tx_n)$ est un homéomorphisme. Or $]0, +\infty[$ est homotope à un point, donc $\mathbb{S}^{n-1} \times]0, +\infty[$ est homotope à $\mathbb{S}^{n-1}$ et il en donc de même pour $\mathbb{R}^n$.
Si $\mathbb{R}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^p$ alors $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ donc $\mathbb{S}^{n-1}$ est homotope à $\mathbb{S}^{p-1}$ mais alors les modules de cohomologie des faisceaux $k_{\mathbb{S}^{n-1}}$ et $k_{\mathbb{S}^{p-1}}$ sont isomorphes. D'après le résultat de la question (2), ce n'est le cas que si $n = p$.