Exercice 49. *Soient $n > p \geq 0$ deux entiers, $X_1 = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$, $X_2 = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ x_0^2 + \cdots + x_p^2 + 2(x_{p+1}^2 + \cdots + x_n^2) = 1\}$ et $X = X_1 \cup X_2$.*

(1) Soit k un corps commutatif ; calculer $H^j(X, k_X)$ pour $j \geq 0$.

(2) Calculer $H^j(X, \mathbb{Z}_X)$ pour $j \geq 0$.

Solution : Les question (1) et (2) se traitent de la même façon. On se contentera de traiter ici la question (1). Le résultat de la question (2) se trouve en substituant simplement k par $\mathbb{Z}$.
On a $X_{12} = X_1 \cap X_2 = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ x_0^2 + \cdots + x_p^2 = 1 \text{ et } x_{p+1} = \cdots = x_n = 0\} = \mathbb{S}^p$.
On en déduit que $H^j(X, k_{X,X_{12}}) \simeq H^j(\mathbb{S}^p, k_{\mathbb{S}^p})$
De plus $X_1 = \mathbb{S}^n$, X_2 est homéomorphe à $\mathbb{S}^n$ d'où $H^j(X, k_{X,X_1}) \simeq H^j(X, k_{X,X_2}) \simeq H^j(\mathbb{S}^n, k_{\mathbb{S}^n})$.
On remarque enfin que comme $X_1 \cap X_2$ est non vide, X est connexe donc $H^0(X, k_X) = \Gamma(X, k_X) = k$.
Considérons la suite exacte :

$$0 \longrightarrow k_X \longrightarrow k_{X,X_1} \oplus k_{X,X_2} \longrightarrow k_{X,X_{12}} \longrightarrow 0$$

- Si $n > p+1$ et $p > 0$ la suite exacte longue de cohomologie associée est :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & k \arrow[r, "\binom{1}{1}"] & k^2 \arrow[r, "(-1\ 1)"] & k \arrow[dll, rounded corners] \\
& H^1(X,k_X) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \cdots\cdots \\
& \vdots & \vdots & \vdots \\
\cdots\cdots \arrow[r, dashed] & H^{p-1}(X,k_X) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[dll, rounded corners] \\
& H^p(X,k_X) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & k \arrow[dll, rounded corners] \\
& H^{p+1}(X,k_X) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \cdots\cdots \\
& \vdots & \vdots & \vdots \\
\cdots\cdots \arrow[r, dashed] & H^{n-1}(X,k_X) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[dll, rounded corners] \\
& H^n(X,k_X) \arrow[r] & k^2 \arrow[r] & 0 \arrow[dll, rounded corners] \\
& H^{n+1}(X,k_X) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \cdots\cdots
\end{tikzcd}$$

D'où : $H^{p+1}(X, k_X) \simeq k$, $H^n(X, k_X) \simeq k^2$ et $H^j(X, k_X) = 0$ pour $j \neq 0, p+1, n$

- Si $n > p+1$ et $p = 0$ la suite exacte longue de cohomologie associée est :

$$0 \longrightarrow k \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)} k^2 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}-1&1\\-1&1\end{smallmatrix}\right)} k^2 \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^1(X,k_X) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \cdots\cdots$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$\cdots\cdots\to H^{n-1}(X,k_X) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^n(X,k_X) \longrightarrow k^2 \longrightarrow 0 \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^{n+1}(X,k_X) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \cdots\cdots$$

D'où : $H^1(X,k_X) \simeq k$, $H^n(X,k_X) \simeq k^2$ et $H^j(X,k_X) = 0$ pour $j \neq 0,1,n$

- Si $n = p+1$ et $p > 0$ la suite exacte longue de cohomologie associée est :

$$0 \longrightarrow k \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)} k^2 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}-1&1\end{smallmatrix}\right)} k \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^1(X,k_X) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \cdots\cdots$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$\cdots\cdots\to H^{p-1}(X,k_X) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^p(X,k_X) \longrightarrow 0 \longrightarrow k \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^n(X,k_X) \longrightarrow k^2 \longrightarrow 0 \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^{n+1}(X,k_X) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \cdots\cdots$$

D'où : $H^n(X,k_X) \simeq k^3$, et $H^j(X,k_X) = 0$ pour $j \neq 0,n$

- Si $n = 1$ et $p = 0$ la suite exacte longue de cohomologie associée est :

$$0 \longrightarrow k \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)} k^2 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}-1&1\\-1&1\end{smallmatrix}\right)} k^2 \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^1(X,k_X) \longrightarrow k^2 \longrightarrow 0 \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^2(X,k_X) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \cdots\cdots$$

D'où : $H^1(X,k_X) \simeq k^3$, et $H^j(X,k_X) = 0$ pour $j \neq 0,1$