**Exercice 50.** *Soient $n \geq 2$, $P_1, \dots, P_m$ des points de $\mathbb{R}^n$ et $X = \mathbb{R}^n \setminus \{P_1, \dots, P_m\}$.*

*(1) Soit $k$ un corps commutatif ; calculer $H^j(X, k_X)$ pour $j \geq 0$.*

*(2) Calculer $H^j(X, \mathbb{Z}_X)$ pour $j \geq 0$.*

**Solution :** Les question (1) et (2) se traitent de la même façon. On se contentera de traiter ici la question (1). Le résultat de la question (2) se trouve en substituant simplement $k$ par $\mathbb{Z}$.
On remarque tout d'abord que $X$ est connexe donc $H^0(X, k_X) = \Gamma(X_m, k_X) = k$.
Nous allons montrer par récurrence sur $m$ que $H^{n-1}(X, k_X) \simeq k^m$ et $H^j(X, k_X) = 0$ pour $j \neq 0, n-1$.
Le résultat est connu pour $m = 1$ puisque dans ce cas $X = \mathbb{R}^n \setminus \{P_1\}$ est homotope à $\mathbb{S}^{n-1}$.
Supposons le résultat vrai au rang $m - 1$.
Considérons les deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ : $U_1 = \mathbb{R}^n \setminus \{P_1, \dots, P_{m-1}\}$ et $U_2 = \mathbb{R}^n \setminus \{P_m\}$. On a $U_1 \cap U_2 = X$ et $U_1 \cup U_2 = \mathbb{R}^n$ d'où la suite exacte longue :

$$\cdots \to H^j(\mathbb{R}^n, k_{\mathbb{R}^n}) \longrightarrow H^j(U_1, k_{U_1}) \oplus H^j(U_2, k_{U_2}) \longrightarrow H^j(X, k_X) \longrightarrow H^{j+1}(\mathbb{R}^n, k_{\mathbb{R}^n}) \cdots$$

c'est à dire, comme $H^{n-1}(U_1, k_{U_1}) \simeq k^{m-1}$ (hypothèse de récurence) et $H^{n-1}(U_2, k_{U_2}) \simeq k$ :

$$
\begin{array}{rcccccl}
0 \longrightarrow & k & \longrightarrow & k^2 & \longrightarrow & k & \longrightarrow \\
\longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H^1(X, k_X) & \cdots \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
\cdots \to & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H^{n-2}(X, k_X) & \longrightarrow \\
\longrightarrow & 0 & \longrightarrow & k^m & \longrightarrow & H^{n-1}(X, k_X) & \longrightarrow \\
\longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H^n(X, k_X) & \cdots \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

d'où le résultat annoncé.