Exercice 51. *Soit $\mathbb{S}^1$ le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{T}^n = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_{n \text{ fois}}$. On note $\mathbb{S}^{1+}$ le demi-cercle : $\{(x,y) \in \mathbb{S}^1,\ x \geq 0\}$ et $\mathbb{S}^{1-}$ le demi-cercle : $\{(x,y) \in \mathbb{S}^1,\ x \leq 0\}$ et on pose $Z_1 = \mathbb{S}^{1+} \times \mathbb{T}^{n-1}$ et $Z_2 = \mathbb{S}^{1-} \times \mathbb{T}^{n-1}$ de sorte que $\mathbb{T}^n = Z_1 \cup Z_2$.*

(1) Montrer que $Z_1 \cap Z_2$ a deux composantes connexes que l'on notera Y_1 et Y_2. À quoi sont homotopes Z_1, Z_2, Y_1 et Y_2 ?

(2) Soit k un corps commutatif ; calculer les modules $H^j(\mathbb{T}^n, k_{\mathbb{T}^n})$ pour $n \geq 1$ et $j \geq 0$.

(3) Calculer $H^j(\mathbb{T}^n, \mathbb{Z}_{\mathbb{T}^n})$ pour $n \geq 1$ et $j \geq 0$.

Solution :

(1) $Z_1 \cap Z_2 = \{-1,+1\} \times \mathbb{T}^{n-1} = Y_1 \sqcup Y_2$ où $Y_1 = \{-1\} \times \mathbb{T}^{n-1}$ et $Y_2 = \{+1\} \times \mathbb{T}^{n-1}$.
Z_1 et Z_2 sont homotopes à $\mathbb{T}^{n-1}$, car $\mathbb{S}^{1+}$ et $\mathbb{S}^{1-}$ sont contractiles.
Y_1 et Y_2 sont égaux à $\mathbb{T}^{n-1}$.

(2) On va montrer par récurrence que $H^j(\mathbb{T}^n, k_{\mathbb{T}^n}) \simeq k^{C_n^j}$ où $C_n^j = \dfrac{n!}{j!(n-j)!}$.
Pour $n = 1$ le résultat est vrai et connu puisque $\mathbb{T}^1 = \mathbb{S}^1$.
On suppose donc le résultat vrai pour $\mathbb{T}^{n-1}$ et on écrit la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite de Mayer-Vietoris :

$$0 \longrightarrow k_{\mathbb{T}^n} \longrightarrow k_{\mathbb{T}^n,Z_1} \oplus k_{\mathbb{T}^n,Z_2} \longrightarrow k_{\mathbb{T}^n,Y_1} \oplus k_{\mathbb{T}^n,Y_2} \longrightarrow 0$$

c'est à dire :

$$\cdots\to H^j(\mathbb{T}^n, k_{\mathbb{T}^n}) \longrightarrow \begin{matrix} H^j(\mathbb{T}^n, k_{\mathbb{T}^n,Z_1}) \\ \oplus \\ H^j(\mathbb{T}^n, k_{\mathbb{T}^n,Z_2}) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} H^j(\mathbb{T}^n, k_{\mathbb{T}^n,Y_1}) \\ \oplus \\ H^j(\mathbb{T}^n, k_{\mathbb{T}^n,Y_2}) \end{matrix} \longrightarrow H^{j+1}(\mathbb{T}^n, k_{\mathbb{T}^n}) \to\cdots$$

ou encore :

$$\cdots\to H^j(\mathbb{T}^n, k_{\mathbb{T}^n}) \longrightarrow \begin{matrix} H^j(Z_1, k_{Z_1}) \\ \oplus \\ H^j(Z_2, k_{Z_2}) \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} -i_{11}^{\sharp j} & i_{21}^{\sharp j} \\ -i_{12}^{\sharp j} & i_{22}^{\sharp j} \end{pmatrix}} \begin{matrix} H^j(Y_1, k_{Y_1}) \\ \oplus \\ H^j(Y_2, k_{Y_2}) \end{matrix} \longrightarrow H^{j+1}(\mathbb{T}^n, k_{\mathbb{T}^n}) \to\cdots$$

où i_{ab} désigne l'injection de Y_b dans Z_a et $i_{ab}^{\sharp j}$ le morphisme entre les modules de cohomologie défini page 128 du polycopié ($a, b = 1, 2$).

D'après le lemme 6.3.8, les morphismes $i_{ab}^{\sharp j}$ sont des isomorphismes, et de plus $i_{11}^{\sharp j} = i_{12}^{\sharp j}$ et $i_{21}^{\sharp j} = i_{22}^{\sharp j}$.

(ATTENTION : Il est faut en général que si $i : X \hookrightarrow Y$ est une injection fermée alors $i^{\sharp j}$ soit un isomorphisme. Mais dans le cas étudié ici les hypothèses du lemme sont vérifiées ; en effet : $Z_a \simeq [0,1] \times \mathbb{T}^{n-1}$, car $\mathbb{S}^{1-} \simeq \mathbb{S}^{1+} \simeq [0,1]$, et $Y_b \simeq \{t\} \times \mathbb{T}^{n-1}$.)

En combinant ce qui précède avec le fait que :

$$H^j(Y_1, k_{Y_1}) \simeq H^j(Y_2, k_{Y_2}) \simeq H^j(Z_1, k_{Z_1}) \simeq H^j(Z_2, k_{Z_2}) \simeq H^j(\mathbb{T}^{n-1}, k_{\mathbb{T}^{n-1}}) \simeq k^{C_{n-1}^j}$$

on remarque que la suite exacte longue de cohomologie s'écrit :

$$\cdots \longrightarrow H^{j-1}(\mathbb{T}^n, k_{\mathbb{T}^n}) \longrightarrow \left(k^{C_{n-1}^{j-1}}\right)^2 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} u_{j-1} & v_{j-1} \\ u_{j-1} & v_{j-1} \end{smallmatrix}\right)} \left(k^{C_{n-1}^{j-1}}\right)^2 \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^{j}(\mathbb{T}^n, k_{\mathbb{T}^n}) \longrightarrow \left(k^{C_{n-1}^{j}}\right)^2 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} u_{j} & v_{j} \\ u_{j} & v_{j} \end{smallmatrix}\right)} \left(k^{C_{n-1}^{j}}\right)^2 \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^{j+1}(\mathbb{T}^n, k_{\mathbb{T}^n}) \longrightarrow \cdots$$

où u_{j-1}, v_{j-1} sont des automorphismes de $k^{C_{n-1}^{j-1}}$ et u_j et v_j des automorphismes de $k^{C_{n-1}^{j}}$. On a donc pour tout j une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \operatorname{coker}\left(\begin{smallmatrix} u_{j-1} & v_{j-1} \\ u_{j-1} & v_{j-1} \end{smallmatrix}\right) \longrightarrow H^j(\mathbb{T}^n, k_{\mathbb{T}^n}) \longrightarrow \ker\left(\begin{smallmatrix} u_{j} & v_{j} \\ u_{j} & v_{j} \end{smallmatrix}\right) \longrightarrow 0$$

or il est clair que $\operatorname{coker}\left(\begin{smallmatrix} u_{j-1} & v_{j-1} \\ u_{j-1} & v_{j-1} \end{smallmatrix}\right)$ est de rang C_{n-1}^{j-1} et $\ker\left(\begin{smallmatrix} u_{j} & v_{j} \\ u_{j} & v_{j} \end{smallmatrix}\right)$ est de rang C_{n-1}^{j} d'où $H^j(\mathbb{T}^n, k_{\mathbb{T}^n}) \simeq k^{C_{n-1}^{j-1}} \oplus k^{C_{n-1}^{j}} \simeq k^{C_n^j}$.

(3) Le raisonnement développé en (2) s'applique aussi pour $\mathbb{Z}$. On a donc $H^j(\mathbb{T}^n, \mathbb{Z}_{\mathbb{T}^n}) \simeq \mathbb{Z}^{C_n^j}$.