Exercice 53. *Soit Y un nœud, c'est-à-dire l'image d'un plongement $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, et soit $X = \mathbb{R}^3 \setminus Y$.*

(1) Soit k un corps commutatif ; calculer $H^j(X, k_X)$ pour $j \geq 0$.

(2) Calculer $H^j(X, \mathbb{Z}_X)$ pour $j \geq 0$.

(On admettra que Y possède un voisinage tubulaire Y', c'est à dire l'image d'un plongement $f' : \mathrm{D}_2 \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ où $\mathrm{D}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 < 1\}$ et tel que $f'\big((0,0),p\big) = f(p)$ pour tout $p \in \mathbb{S}^1$, et on remarquera que $X = \mathbb{R}^3 \setminus Y$ est homotope à $X' = \mathbb{R}^3 \setminus Y'$.)

Solution : On a $\mathbb{R}^3 = \overline{Y'} \cup X'$ et $\overline{Y'} \cap X' = \partial(\overline{D_2}) \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{T}^2$. ($\overline{Y'}$ désigne l'adhérence de Y' et $\partial(\overline{D_2})$ désigne le bord du disque fermé.) D'où la suite exacte :

$$0 \longrightarrow k_{\mathbb{R}^3} \longrightarrow k_{\mathbb{R}^3, X'} \oplus k_{\mathbb{R}^3, \overline{Y'}} \longrightarrow k_{\mathbb{R}^3, X' \cap \overline{Y'}} \longrightarrow 0$$

$\mathbb{R}^3$ est contractile, $\overline{Y'}$ est homotope à $\mathbb{S}^1$, $X' \cap \overline{Y'} = \mathbb{T}^2$ et X' est homotope à X ; on en déduit la suite exacte longue de cohomologie :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & k \arrow[r, "\binom{1}{1}"] & k \oplus k \arrow[r, "(-1\ 1)"] & k \arrow[dll] \\
& 0 \arrow[r] & H^1(X, k_X) \oplus k \arrow[r] & k^2 \arrow[dll] \\
& 0 \arrow[r] & H^2(X, k_X) \oplus 0 \arrow[r] & k \arrow[dll] \\
& 0 \arrow[r] & H^3(X, k_X) \oplus 0 \arrow[r] & 0 \cdots\cdots \\
& \vdots & \vdots & \vdots
\end{tikzcd}$$

On en déduit que $H^j(X, k_X) \simeq k$ pour $0 \leq j \leq 2$ et $H^j(X, k_X) = 0$ pour $j \geq 3$. Un résultat analogue est valable pour $\mathbb{Z}_X$.