Exercice 54. *On définit sur $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ la relation d'équivalence : $u \sim v \Leftrightarrow (\exists\lambda \in \mathbb{R}^* : v = \lambda u)$. On pose $\mathbb{P}^n\mathbb{R} = \big(\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}\big)/\sim$; c'est l'espace projectif réel de dimension n. On a ainsi une surjection naturelle $\pi : \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\} \to \mathbb{P}^n\mathbb{R}$.*

(1) Soient $X = \big\{(x_0,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ max\{|x_0|,\dots,|x_n|\} = 1\big\}$ l'hypercube unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ et, pour $0 \le i \le n$, $X_i = \{(x_0,\dots,x_n) \in Y,\ x_i = 1\}$. ($X_0,\dots,X_n$ sont des faces de l'hypercube unité.) On pose $Y_i = \pi(X_i)$; les fermés $Y_0,\dots,Y_n$ forment un recouvrement fini de $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$.

Soit k un corps commutatif. Calculer $H^n(\mathbb{P}^n\mathbb{R}, k_{\mathbb{P}^n\mathbb{R}})$, pour n pair, à l'aide de ce recouvrement.

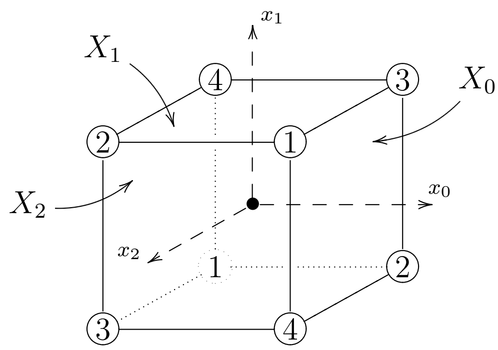
(2) Soient $Z = \big\{(x_0,\dots,x_n),\ x_0^2+\dots+x_n^2 = 1\big\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$, $Z_1 = \{(x_0,\dots,x_n) \in Z,\ |x_0| \ge 1/2\}$ et $Z_2 = \{(x_0,\dots,x_n) \in Z,\ |x_0| \le 1/2\}$. On pose $W_i = \pi(Z_i)$ ($i = 1, 2$).

Soit k un corps commutatif. Calculer $H^j(\mathbb{P}^n\mathbb{R}, k_{\mathbb{P}^n\mathbb{R}})$ pour $j \ge 0$ à l'aide de la suite longue de Mayer-Vietoris associée à W_1 et W_2. (Faire une récurrence sur n)

(3) De la même manière, calculer $H^j(\mathbb{P}^n\mathbb{R}, \mathbb{Z}_{\mathbb{P}^n\mathbb{R}})$ pour $j \ge 0$.

Solution :

(1) Examinons d'abord le cas de $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$. On a alors 3 faces du cube (le cube ordinaire de $\mathbb{R}^3$) X_0, X_1 et X_2 :



Dans ce dessin les sommets opposés sont numérotés avec le même nombre. Le numéro correspond donc à un point de $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$. On a alors : $Y_0 \cap Y_1 = [13] \cup [24]$, $Y_1 \cap Y_2 = [12] \cup [34]$, $Y_0 \cap Y_2 = [14] \cup [23]$ et $Y_0 \cap Y_1 \cap Y_2 = \{1, 2, 3, 4\}$. (Où [AB] désigne l'image dans $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ de l'arête du cube joignant le point A au point B.)

On en déduit une résolution acyclique du faisceau $k_{\mathbb{P}_2\mathbb{R}}$:

$$0 \longrightarrow \begin{matrix} k_{\mathbb{P}_2\mathbb{R},X_0} \\ \oplus \\ k_{\mathbb{P}_2\mathbb{R},X_1} \\ \oplus \\ k_{\mathbb{P}_2\mathbb{R},X_2} \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} k_{\mathbb{P}_2\mathbb{R},[12]} \oplus k_{\mathbb{P}_2\mathbb{R},[23]} \oplus k_{\mathbb{P}_2\mathbb{R},[34]} \\ \oplus \\ k_{\mathbb{P}_2\mathbb{R},[13]} \oplus k_{\mathbb{P}_2\mathbb{R},[14]} \oplus k_{\mathbb{P}_2\mathbb{R},[24]} \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} k_{\mathbb{P}_2\mathbb{R},\{1\}} \oplus k_{\mathbb{P}_2\mathbb{R},\{2\}} \\ \oplus \\ k_{\mathbb{P}_2\mathbb{R},\{3\}} \oplus k_{\mathbb{P}_2\mathbb{R},\{4\}} \end{matrix} \longrightarrow 0$$

Les modules $H^j(\mathbb{P}_2\mathbb{R}, k_{\mathbb{P}_2\mathbb{R}})$ sont alors isomorphes aux modules de cohomologie de l'image de ce complexe par le foncteur $\Gamma(\mathbb{P}_2\mathbb{R}, \cdot)$, c'est à dire la cohomologie du complexe :

$$0 \longrightarrow k^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}} k^6 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}} k^4 \longrightarrow 0$$

$H^2(\mathbb{P}_2\mathbb{R}, k_{\mathbb{P}_2\mathbb{R}})$ n'est donc autre que le conoyau du morphisme $k^6 \longrightarrow k^4$, c'est à dire le quotient de k^4 par le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou de} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(La matrice M n'est autre que la matrice d'incidence entre les projections dans $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ des arêtes et des sommets du cube : les lignes L_i correspondent aux projections des sommets $S_1, \ldots, S_4$, les colonnes C_i correspondent aux projections des arêtes $A_1, \ldots A_6$ et le coefficient $M_{i,j}$ vaut 1 si et seulement si le sommet S_i est une extrémité de l'arête A_j.)

On remarque alors que C_1, C_2, C_3 forment un système libre, que :

$$-(C_4 - C_1 + C_2 - 2C_3) = C_6 - C_2 + C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et que :} \quad C_5 = C_1 + C_2 - C_3$$

On en déduit que les colonnes de M engendrent k^4 et donc $H^2(\mathbb{P}_3\mathbb{R}, k_{\mathbb{P}_3\mathbb{R}}) = 0$.

On généralise la construction précédente pour remarquer que $H^n(\mathbb{P}^n\mathbb{R}, k_{\mathbb{P}^n\mathbb{R}})$ est isomorphe au conoyau du morphisme $k^{(n+1)2^{n-1}} \xrightarrow{\varphi} k^{2^n}$ dont la matrice est la matrice d'incidence entre les projections dans $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ des arêtes et des sommets de l'hypercube unité de $\mathbb{R}^{n+1}$. Pour décrire cette matrice et calculer l'image du morphisme φ on numérote tout d'abord les sommets du cube de la façon suivante :

- les sommets opposés portent le même numéro ; on numérote donc uniquement les sommets de la face Y_n (d'équation $x_n = 1$).
- on procède par récursivité : pour $0 \leq j < n-1$ on numérote d'abord les 2^j sommets de la j-face d'équations $x_j = x_{j+1} = \cdots = x_n = 1$, puis on numérote les sommets de la j-face d'équations $-x_j = x_{j+1} = \cdots = x_n = 1$ de la façon suivante : si $(a_0, \ldots, a_{j-1}, 1, 1, \ldots, 1)$ est le i-ième sommet (avec $1 \leq i \leq 2^j$), alors $(a_0, \ldots, a_{j-1}, -1, 1, \ldots, 1)$ est le $(2^{j+1} + 1 - i)$-ième sommet.

Les premiers sommets sont donc :

$$\begin{array}{ll} 1 = (\ \ 1, \ \ 1, 1, 1, \ldots, 1) & 5 = (\ \ 1, -1, -1, 1, \ldots, 1) \\ 2 = (-1, \ \ 1, 1, 1, \ldots, 1) & 6 = (-1, -1, -1, 1, \ldots, 1) \\ 3 = (-1, -1, 1, 1, \ldots, 1) & 7 = (-1, \ \ 1, -1, 1, \ldots, 1) \\ 4 = (\ \ 1, -1, 1, 1, \ldots, 1) & 8 = (\ \ 1, \ \ 1, -1, 1, \ldots, 1) \end{array}$$

Remarque A :
Si $(a_0, \ldots, a_{j-1}, 1, 1, 1, \ldots, 1)$ est le i-ième sommet alors $(a_0, \ldots, a_{j-1}, -1, -1, 1, \ldots, 1)$ est le $(2^{j+1} + i)$-ième sommet. Il en résulte que si n est pair, alors $(-1, \ldots, -1, 1)$ et $(1, \ldots, 1, -1)$ portent un numéro impair.

Remarque B :
Le procédé de numérotation est choisi de sorte que deux sommets consécutifs soient les extrémités d'une arête de l'hypercube de $\mathbb{R}^{n+1}$ si bien qu'on peut ordonner les arêtes pour

que les premières colonnes de la matrice d'incidence sommets-arêtes soient :

$$\underbrace{\left.\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}}_{2^n - 1 \text{ colonnes}} 2^n \text{ lignes}$$

Nous noterons ces colonnes $C_{1,2}, C_{2,3}, \ldots, C_{2^n-1,2^n}$. Elles sont linéairement indépendante, ce qui montre que l'image de φ est de rang $\geq 2^n - 1$.

Pour chaque arête la colonne d'incidence s'écrit comme ceci :

$$C_{p,q} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow p\text{-ième ligne} \\ \\ \\ \\ \leftarrow q\text{-ième ligne} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Remarque C :

(a) Si $q - p$ est impair alors $C_{p,q} = \displaystyle\sum_{i=p}^{q-1} (-1)^{i-p} C_{i,i+1}$.

(b) Si $q - p$ est pair alors

$$C_{p,q} - \sum_{i=p}^{q-1} (-1)^{i-p} C_{i,i+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow q\text{-ième ligne} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

donc

$$C_{p,q} - \sum_{i=p}^{q-1} (-1)^{i-p} C_{i,i+1} - 2 \sum_{i=q}^{2^n-1} (-1)^{i-q} C_{i,i+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \pm 2 \end{pmatrix}$$

Or, d'après la remarque A, lorsque n est pair, les sommets $(1, \ldots, 1, 1)$ et $(1, \ldots, 1, -1)$ qui sont les extrémités d'une arête, portent chacun un numéro impair donc, d'après la remarque C, φ est de rang n.

Conclusion : lorsque n est pair, $H^n(\mathbb{P}^n\mathbb{R}, k_{\mathbb{P}^n\mathbb{R}}) = 0$.

(2) Montrons par récurrence sur n que :

- si n est pair, alors $H^j(\mathbb{P}^n\mathbb{R}, k_{\mathbb{P}^n\mathbb{R}}) = 0$ pour $j \neq 0$
- si n est impair, alors $H^n(\mathbb{P}^n\mathbb{R}, k_{\mathbb{P}^n\mathbb{R}}) \simeq k$ et $H^j(\mathbb{P}^n\mathbb{R}, k_{\mathbb{P}^n\mathbb{R}}) = 0$ pour $j \neq 0, n$

Le résultat est vrai pour $n = 1$ car $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^1$. (Attention : l'application $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{P}^1\mathbb{R}$ définie dans l'énoncé n'induit pas une bijection entre $\mathbb{S}^1$ et $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$, mais un revêtement double. — cf. exercice 43).

Pour la récurrence, nous allons utiliser la suite de Mayer-Vietoris associée à W_1 et W_2 :

$$0 \longrightarrow k_{\mathbb{P}^n\mathbb{R}} \longrightarrow k_{\mathbb{P}^n\mathbb{R},W_1} \oplus k_{\mathbb{P}^n\mathbb{R},W_2} \longrightarrow k_{\mathbb{P}^n\mathbb{R},W_1\cap W_2} \longrightarrow 0$$

Y_1 est la réunion disjointe de deux composantes homéomorphes à un disque de $\mathbb{R}^n$, et induit un homéomorphisme entre $\mathbb{S}^{n-1}$ et cette boule. W_1 est donc contractile.
Y_2 est homotope à la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$ et induit une équivalence d'homotopie entre $W_2 = Y_2/\sim$ et $\mathbb{P}^{n-1}\mathbb{R}$.
$Y_1 \cap Y_2$ est la réunion disjointe de deux composantes homéomorphes à $\mathbb{S}^{n-1}$ et induit un homéomorphisme entre $W_1 \cap W_2$ et $\mathbb{S}^{n-1}$.

Si n est pair on en déduit la suite exacte longue de cohomologie :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & k & \xrightarrow{\binom{1}{1}} & k \oplus k & \xrightarrow{(-1\ 1)} & k \\
 & \longrightarrow & H^1(\mathbb{P}^n\mathbb{R}, k_{\mathbb{P}^n\mathbb{R}}) & \longrightarrow & 0 \oplus 0 & \longrightarrow & 0 \cdots\cdots \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & \cdots\cdots & H^{n-2}(\mathbb{P}^n\mathbb{R}, k_{\mathbb{P}^n\mathbb{R}}) & \longrightarrow & 0 \oplus 0 & \longrightarrow & 0 \\
 & \longrightarrow & H^{n-1}(\mathbb{P}^n\mathbb{R}, k_{\mathbb{P}^n\mathbb{R}}) & \longrightarrow & 0 \oplus k & \longrightarrow & k \\
 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \oplus 0 & \longrightarrow & 0 \cdots\cdots \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

et si n est impair on en déduit la suite exacte longue de cohomologie :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & k & \xrightarrow{\binom{1}{1}} & k \oplus k & \xrightarrow{(-1\ 1)} & k \\
 & \longrightarrow & H^1(\mathbb{P}^n\mathbb{R}, k_{\mathbb{P}^n\mathbb{R}}) & \longrightarrow & 0 \oplus 0 & \longrightarrow & 0 \cdots\cdots \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & \cdots\cdots & H^{n-2}(\mathbb{P}^n\mathbb{R}, k_{\mathbb{P}^n\mathbb{R}}) & \longrightarrow & 0 \oplus 0 & \longrightarrow & 0 \\
 & \longrightarrow & H^{n-1}(\mathbb{P}^n\mathbb{R}, k_{\mathbb{P}^n\mathbb{R}}) & \longrightarrow & 0 \oplus 0 & \longrightarrow & k \\
 & \longrightarrow & H^{n}(\mathbb{P}^n\mathbb{R}, k_{\mathbb{P}^n\mathbb{R}}) & \longrightarrow & 0 \oplus 0 & \longrightarrow & 0 \cdots\cdots \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

ce qui montre dans les deux cas le résultat annoncé.

(3) En reprenant la méthode de la première question on trouve que si n est pair $H^n(\mathbb{P}^n\mathbb{R}, \mathbb{Z}_{\mathbb{P}^n\mathbb{R}})$ est isomorphe au quotient de $\mathbb{Z}^{2^n}$ par le sous-module engendré par les colonnes de la matrice carrée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On en déduit que pour n pair : $H^n(\mathbb{P}^n\mathbb{R}, \mathbb{Z}_{\mathbb{P}^n\mathbb{R}}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Par une récurrence analogue à celle de la question (2) on montre facilement que :

- si n est pair, alors
  * $H^j(\mathbb{P}^n\mathbb{R}, k_{\mathbb{P}^n\mathbb{R}}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour j pair tel que $0 < j \leq n$
  * $H^j(\mathbb{P}^n\mathbb{R}, k_{\mathbb{P}^n\mathbb{R}}) = 0$ pour j impair tel que $0 < j < n$ ou pour $j > n$
- si n est impair, alors
  * $H^j(\mathbb{P}^n\mathbb{R}, k_{\mathbb{P}^n\mathbb{R}}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour j pair tel que $0 < j < n$
  * $H^n(\mathbb{P}^n\mathbb{R}, k_{\mathbb{P}^n\mathbb{R}}) \simeq \mathbb{Z}$
  * $H^j(\mathbb{P}^n\mathbb{R}, k_{\mathbb{P}^n\mathbb{R}}) = 0$ pour j impair tel que $0 < j < n$ ou pour $j > n$