Master 1 — Mathématiques — 2006
Travaux dirigés d'algèbre et topologie
Chapitre 1 — Homomorphismes et produits tensoriels

Laurent Koelblen

Dans tous les exercices, A désigne un anneau unitaire. Par souci de simplification on peut supposer que A est commutatif. Un corps k est toujours supposé commutatif.

Exercice 1. *Soit A un anneau et $M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M''$ une suite exacte de A-modules.*

(1) Soient $N \subset P$ deux sous-modules de M, tels que $i^{-1}(N) = i^{-1}(P)$ et $\pi(N) = \pi(P)$. Montrer que $N = P$.

(2) Donner un exemple où $i^{-1}(N) = i^{-1}(P)$ et $\pi(N) = \pi(P)$ mais tel que $N \neq P$ (suggestion : prendre $M = \mathbb{R}^2$ et $M' = M'' = \mathbb{R}$).

Exercice 2. *Soit A un anneau, M un A-module et N et P des sous-modules de M.*
Soit $f : N \cap P \longrightarrow N \oplus P$, $x \longmapsto (x, x)$ et $g : N \oplus P \longrightarrow N + P$, $(y, z) \longmapsto y - z$.

(1) Montrer que la suite $0 \longrightarrow N \cap P \xrightarrow{f} N \oplus P \xrightarrow{g} N + P \longrightarrow 0$ est exacte.

(2) On choisit $A = k[X, Y]$, où k est un corps, $M = A$, $N = XA$ (c'est a dire le sous-module de $k[X, Y]$ formé des polynômes multiples de X) et $P = Y A$. Montrer que dans ce cas la suite exacte qui précède n'est pas scindée.

(3) Établir l'existence d'une suite exacte $0 \longrightarrow \dfrac{M}{N \cap P} \longrightarrow \dfrac{M}{N} \oplus \dfrac{M}{P} \longrightarrow \dfrac{M}{N + P} \longrightarrow 0.$

Exercice 3. *Soit A un anneau.*

(1) Soit $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M'' \longrightarrow 0$ une suite exacte de A-modules. Montrer qu'il y a un isomorphisme naturel entre M'' et $\dfrac{M}{i(M')}$.

(2) Soit M un A-module et N et P des sous-modules de M. Établir un isomorphisme $\dfrac{N}{N \cap P} \longrightarrow \dfrac{N + P}{P}$ (on pourra considérer le morphisme $\pi : N \longrightarrow \dfrac{N + P}{P}$, $x \longmapsto x + P$).

(3) Soit I un idéal de A. On pose $IM = \left\{ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i m_i,\ n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall i : a_i \in I \text{ et } m_i \in M \right\}$. Montrer que IM est un sous-module de M.

(4) Montrer que $\dfrac{IN + P}{P} = I \dfrac{N + P}{P}$.

Exercice 4. *(Lemme des 5) Considérons le diagramme commutatif de A-modules :*

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"] & M_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"] & M_5 \arrow[d, "f_5"] \\
N_1 \arrow[r, "\beta_1"'] & N_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & N_3 \arrow[r, "\beta_3"'] & N_4 \arrow[r, "\beta_4"'] & N_5
\end{tikzcd}$$

dans lequel les deux lignes sont des suites exactes. Montrer que :

(1) si f_1 est surjective et f_2 et f_4 injectives, alors f_3 est injective.

(2) si f_5 est injective et f_2 et f_4 surjectives, alors f_3 est surjective.

Remarquons que ce lemme est utilisé souvent de la manière suivante :

(3) Si f_1, f_2, f_4 et f_5 sont des isomorphismes, alors f_3 est un isomorphisme.

Exercice 5. *(Lemme des 9) Considérons le diagramme commutatif de A-modules :*

$$\begin{tikzcd}
 & M' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "f'"'] & M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"'] & 0 \\
 & N' \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "g'"'] & N \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"'] & N'' \arrow[d, "g''"'] & \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "\gamma'"] & L \arrow[r, "\gamma"] & L'' &
\end{tikzcd}$$

dans lequel toutes les lignes sont des suites exactes ainsi que la colonne droite et la colonne gauche. Montrer que si de plus la colonne du milieu est un complexe, alors c'est une suite exacte.

Exercice 6. *Soient $f_1 : M_1 \to N$ et $f_2 : M_2 \to N$ deux applications A-linéaires. Un A-module P, équipé de deux applications A-linéaires $p_1 : P \to M_1$ et $p_2 : P \to M_2$ telles que $f_1 \circ p_1 = f_2 \circ p_2$, est appelé produit fibré de f_1 et f_2 si pour tout couple d'applications A-linéaires $h_1 : L \to M_1$ et $h_2 : L \to M_2$ tel que $f_1 \circ h_1 = f_2 \circ h_2$, il existe une unique application A-linéaire $h : L \to P$ telle que $p_1 \circ h = h_1$ et $p_2 \circ h = h_2$, ce qui est visualisé dans le diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[dr, dotted, "\exists ! h"] \arrow[drr, bend left, "h_2"] \arrow[ddr, bend right, "h_1"'] & & \\
 & P \arrow[r, "p_2"'] \arrow[d, "p_1"] & M_2 \arrow[d, "f_2"] \\
 & M_1 \arrow[r, "f_1"'] & N.
\end{tikzcd}$$

(1) Montrer par une construction explicite que le produit fibré existe et qu'il est unique à isomorphisme près.

(2) Construire le produit fibré à l'aide de produits et de noyaux (utiliser les propriétés universelles).

Exercice 7. *Soit A un anneau commutatif.*

(1) *Prouver que $A/I \otimes_A M \simeq M/IM$.(Utiliser la suite exacte $0 \to I \to A \to A/I \to 0$)*

(2) *Prouver que $A/I \otimes_A A/J \simeq A/(I+J)$.*

Exercice 8. *Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ n'est pas plat sur $\mathbb{Z}$.*

Exercice 9. *Soient A un anneau commutatif, M un A-module plat, N un A-module et N_1 et N_2 deux sous-modules de N.*

(1) *Montrer que $N_i \otimes M$ est canoniquement isomorphe à un sous-module de $N \otimes M$.*

Dans la suite de l'exercice nous confondrons $N_i \otimes M$ avec le sous-module correspondant de $N \otimes M$.

(2) *Montrer qu'on a $(N_1 \cap N_2) \otimes M = (N_1 \otimes M) \cap (N_2 \otimes M)$. (C'est une égalité entre deux sous-modules de $N \otimes_A M$. On pourra considérer la suite exacte $0 \longrightarrow N_1 \cap N_2 \longrightarrow N_1 \oplus N_2 \longrightarrow N_1 + N_2 \longrightarrow 0$ et la tensoriser par M.)*

(3) *Soit B un anneau commutatif et $f : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux. L'opération externe $A \times B \to B$ définie par $(a,b) \mapsto a.b = f(a)b$ munit B d'une structure de A-module. On suppose que B, considéré comme A-module, est plat sur A.*
Soient I_1 et I_2 deux idéaux de A. Montrer que $I_i \otimes_A B$ est canoniquement isomorphe à I_iB qui est l'idéal de B engendré par $f(I_i)$. En déduire que $(I_1 \cap I_2)B = I_1B \cap I_2B$.

Exercice 10. *Soient M un A-module plat et $A \to B$ un morphisme d'anneaux (qui muni B d'une structure de A-module). Montrer que $B \otimes_A M$ est plat sur B.*

Exercice 11. *Soit A un anneau commutatif et E un A-module.*

(1) *Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :*

   (a) *E est plat et pour tout A-module $F \neq (0)$ on a $E \otimes_A F \neq 0$*
   (b) *E est plat et l'application naturelle $\mathrm{Hom}_A(F,G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(E \otimes_A F, E \otimes_A G)$ est injective*
   (c) *E est plat et pour tout idéal propre I de A, on a $IE \neq E$.*
   (d) *toute suite de A-modules $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M'' \longrightarrow 0$ est exacte si et seulement si la suite $0 \longrightarrow E \otimes_A M' \xrightarrow{\mathrm{Id}\otimes i} E \otimes_A M \xrightarrow{\mathrm{Id}\otimes\pi} E \otimes_A M'' \longrightarrow 0$ est exacte.*

Si E vérifie les conditions précédentes, on dit qu'il est fidèlement plat. Soit B un anneau commutatif et $f : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux.

(2) *Montrer que si E est un A-module fidèlement plat, alors $E \otimes_A B$ est un B-module fidèlement plat.*

(3) *Montrer que si E est un B-module fidèlement plat alors il est fidèlement plat comme A-module.*

Exercice 12.

(1) *Montrer qu'un A-module libre est projectif et plat.*

(2) *Soit A un anneau et E un A-module. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :*

   (a) *E est projectif,*
   (b) *toute suite exacte $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \xrightarrow{\pi} E \longrightarrow 0$ est scindée,*
   (c) *Il existe un A-module M' tel que $M' \oplus E$ est libre.*

(3) *Soit $0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$ une suite exacte de A-modules. Montrer que si E' et E'' sont projectifs alors E l'est aussi.*

(4) *Montrer qu'un A-module projectif est plat.*

(5) *Montrer que le produit tensoriel de deux modules projectifs est projectif.*

(6) *Soit A un anneau et E un A-module. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :*

   (d) *E est injectif,*
   (e) *toute suite exacte $0 \longrightarrow E \xrightarrow{i} M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ est scindée.*

   Pour (e) $\Rightarrow$ (d), introduire $M = \mathrm{coker}\big(N' \xrightarrow{(f,g)} N \oplus E\big)$ dans le diagramme : $\begin{array}{ccccc} 0 & \to & N' & \xrightarrow{f} & N \\ & & {\scriptstyle g}\downarrow & & \\ & & E & & \end{array}$

(7) *Soit $0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$ une suite exacte de A-modules. Montrer que si E' et E'' sont injectifs alors E l'est aussi.*

Exercice 13. *Est-ce que $\mathbb{Q}$ est libre, injectif, projectif, plat, fidèlement plat sur $\mathbb{Z}$? Est-ce que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est libre, injectif, projectif, plat, fidèlement plat sur $\mathbb{Z}$?*

Exercice 14. *Considérons deux suites exactes courtes de A-modules :*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & I \arrow[r, "\beta"] & N \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\alpha'"'] & I' \arrow[r, "\beta'"'] & N' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où I et I' sont injectifs.

(1) (a) *Établir l'existence de morphismes $\psi : I \to I'$ et $\psi' : I' \to I$ tels que $\psi \circ \alpha = \alpha'$ et $\psi' \circ \alpha' = \alpha$.*
   (b) *Établir l'existence de morphismes $\varphi : N \to N'$ et $\varphi' : N' \to N$ tels que $\varphi \circ \beta = \beta' \circ \psi$ et $\varphi' \circ \beta' = \beta \circ \psi'$.*
   (c) *Établir l'existence de morphismes $\gamma : N \to I$ et $\gamma' : N' \to i'$ tels que $\gamma \circ \beta = \mathrm{Id}_I - \psi' \circ \psi$ et $\gamma' \circ \beta' = \mathrm{Id}_{I'} - \psi \circ \psi'$.*

(2) *Établir l'existence d'un isomorphisme $I \oplus N' \simeq I' \oplus N$.*

Exercice 15. *(Lemme de Baer) Montrer qu'un A-module E est injectif si et seulement si pour tout idéal I de A, l'application $\mathrm{Hom}_A(A,E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(I,E)$ est surjective.*

(Partir du diagramme $\begin{array}{ccccc} 0 & \to & N' & \xrightarrow{f} & N \\ & & {\scriptstyle g}\downarrow & & \\ & & E & & \end{array}$ *et considérer l'ensemble des couples (P, h_P) où P est un sous-module de N tel que $f(N') \subset P$ et $h_P : P \to E$ un morphisme vérifiant $g = h_P \circ f$. Définir une relation d'ordre sur cet ensemble, qui vérifie les hypothèses du lemme de Zorn, et considérer un élément maximal.)*