Master 1 — Mathématiques — 2006
Travaux dirigés de topologie algébrique
Chapitre 1 — Limites, complexes et cohomologie

Laurent Koelblen

Dans tous les exercices, A désigne un anneau unitaire. Par souci de simplification on peut supposer que A est commutatif. Un corps k est toujours supposé commutatif.

Exercice 16.

(1) Montrer que tout A-module M est limite inductive filtrante de modules de type fini.

(2) Montrer que tout A-module de type fini est limite inductive filtrante de modules de présentation finie. (On dit qu'un A-module M est de présentation finie s'il existe un morphisme $f : A^m \to A^n$ tel que $M = \operatorname{coker} f$.)

Exercice 17. *Soit $\{A_i\}_{i\in I}$ un système inductif filtrant d'anneaux commutatifs unitaires.*

(1) Montrer que $A = \varinjlim A_i$ est naturellement muni d'une structure d'anneau.

(2) Montrer que si $A \simeq 0$ alors il existe $i \in I$ t.q. $A_i \simeq 0$.

(3) Définir la notion de système inductif $\{M_i\}_{i\in I}$ de A_i-modules et montrer l'existence de la limite inductive $\varinjlim M_i$ comme A-module.

(4) Soient $\{M_i\}_{i\in I}$ et $\{N_i\}_{i\in I}$ des systèmes inductifs de A_i-modules. Etablir l'isomorphisme canonique

$$\varinjlim_{i\in I}(M_i \otimes_{A_i} N_i) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{i\in I} M_i \otimes_A \varinjlim_{i\in I} N_i$$

Exercice 18. *Soient $\{F_n,\ n\in\mathbb{N},\ f_{n,p} : F_p \to F_n,\ p \geq n\}$, $\{G_n,\ n\in\mathbb{N},\ g_{n,p} : G_p \to G_n,\ p \geq n\}$ et $\{H_n,\ n\in\mathbb{N},\ h_{n,p} : H_p \to H_n,\ p \geq n\}$ des systèmes projectifs de A-modules indexés par l'ensemble des entiers naturels. On suppose que $0 \longrightarrow \{F_n\} \xrightarrow{\{u_n\}} \{G_n\} \xrightarrow{\{v_n\}} \{H_n\} \longrightarrow 0$ est une suite exacte de systèmes projectifs.*

(1) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ la suite $(\operatorname{im} f_{n,p})_{p\in\mathbb{N}}$ de sous-module de F_n est décroissante.

On dit que $\{F_n\}$ vérifie la condition de Mittag-Leffler (M-L) si pour tout $n\in\mathbb{N}$ la suite $(\operatorname{im} f_{n,p})_{p\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, c'est à dire : $\forall n\in\mathbb{N},\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall p\geq N,\ \operatorname{im} f_{n,p} = \operatorname{im} f_{n,N}$.

(2) On suppose que $\{F_n\}$ vérifie la condition (M-L).

(a) On note N_n le plus petit entier tel que $\forall p \geq N_n,\ \operatorname{im} f_{n,p} = \operatorname{im} f_{n,N_n}$; montrer que la suite $(N_n)_{n\in N}$ est croissante.

(b) Soit $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \varprojlim H_n$, $y'_{N_0} \in v_{N_0}^{-1}(z_{N_0})$ un antécédent de z_{N_0} et $y_0 = g_{0,N_0}(y'_{N_0})$; montrer que pour tout $p > N_0$ il existe $y'_p \in v_p^{-1}(z_p)$ tel que $g_{0,p}(y'_p) = y_0$; en déduire l'existence de $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \varprojlim G_n$ tel que $\forall n\in\mathbb{N} : z_n = v_n(y_n)$.

(c) Montrer que la suite $0 \longrightarrow \varprojlim F_n \xrightarrow{u} \varprojlim G_n \xrightarrow{v} \varprojlim H_n \longrightarrow 0$ est exacte.

(3) Montrer que si $\{G_n\}$ vérifie la condition (M-L) alors $\{H_n\}$ la vérifie aussi.

(4) Supposons que $\{F_n\}$ et $\{H_n\}$ vérifient la condition (M-L), et fixons des entiers naturels $n < N < P < p$ tels que :

$$\forall q \geq N,\ \operatorname{im} f_{n,q} = \operatorname{im} f_{n,N} \quad \text{et} \quad \forall q \geq P,\ \operatorname{im} h_{N,q} = \operatorname{im} h_{N,P}\ .$$

(α) Faire un diagramme (fortement recommandé pour la suite) incluant les modules F_n, F_N, F_P, F_p, G_n, $\ldots$ H_p.

(a) Montrer que $v_N(\operatorname{im} g_{N,p}) = v_N(\operatorname{im} g_{N,P})$.

(b) Montrer que $\operatorname{im} g_{N,P} \subset \operatorname{im} g_{N,p} + \operatorname{im} u_N$

(c) Montrer que $\operatorname{im} g_{n,P} \subset \operatorname{im} g_{n,p} + u_n(\operatorname{im} f_{n,N})$

(d) Montrer que $\{G_n\}$ vérifie la condition (M-L).

Exercice 19. *Soit $W = \mathbb{C}[x,y,\partial_x,\partial_y]$ l'algèbre de Weil à deux variables. (C'est la $\mathbb{C}$-algèbre non commutative dont les générateurs vérifient les relations : $xy = yx$, $\partial_x y = y\partial_x$, $\partial_y x = x\partial_y$, $\partial_x\partial_y = \partial_y\partial_x$, $\partial_x x = x\partial_x + 1$ et $\partial_y y = y\partial_y + 1$.)*
Soit $\varphi_1 : W \longrightarrow W$, $\omega \longmapsto \omega x$ et $\varphi_2 : W \longrightarrow W$, $\omega \longmapsto \omega\partial_y$. Construire le complexe de Koszul $K^\bullet(W,\varphi)$ et calculer ses modules de cohomologie.

Exercice 20. *Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$.*

(1) On note $C^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ sur I. Soit $C^\bullet$ le complexe

$$0 \longrightarrow C^\infty(I) \xrightarrow{\mathrm{d}} C^\infty(I) \longrightarrow 0$$

où $\mathrm{d}(f) = f'$. Calculer les modules de cohomologie $H^0(C^\bullet)$ et $H^1(C^\bullet)$.

(2) On note $C_c^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ sur I à support compact. (On rappelle que le support d'une fonction $f \in C^\infty(I)$ est l'adhérence dans I de l'ensemble $\{x\in I,\ f(x)\neq 0\}$.) Soit $C_c^\bullet$ le complexe

$$0 \longrightarrow C_c^\infty(I) \xrightarrow{\mathrm{d_c}} C_c^\infty(I) \longrightarrow 0$$

où $\mathrm{d_c}(f) = f'$. Calculer les modules de cohomologie $H^0(C_c^\bullet)$ et $H^1(C_c^\bullet)$.

Exercice 21. *Soit $U = I \times J$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, produit de deux intervalles ouverts I et J de $\mathbb{R}$. On note $C^\infty(U)$ l'ensemble des fonction de U dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ sur U et pour $k\in\{1,2\}$, $C^{\infty,k}(U)$ l'ensemble des k-formes différentielles extérieures à coefficients dans $C^\infty(U)$. Soit $\mathrm{DR}(U)$ le complexe de De Rham à coefficients dans $C^\infty(U)$:*

$$0 \longrightarrow C^\infty(U) \xrightarrow{\mathrm{d}} C^{\infty,1}(U) \xrightarrow{\mathrm{d}} C^{\infty,2}(U) \longrightarrow 0$$

$$\text{où} \quad \mathrm{d}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y \quad \text{et} \quad \mathrm{d}(g\mathrm{d}x + h\mathrm{d}y) = \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

(1) Montrer que $\mathrm{DR}(U)$ *est un complexe de Koszul* $\mathrm{K}^\bullet(M,\varphi)$ *pour un module* M *et des endomorphismes* $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)$ *que l'on précisera.*

(2) Montrer que la suite (φ_1,φ_2) *est corégulière, et en déduire la cohomologie de* $\mathrm{DR}(U)$.

On note $C_c^\infty(U)$ *l'ensemble des fonctions de* U *dans* $\mathbb{R}$ *de classe* C^∞ *sur* U *à support compact et pour* $k\in\{1,2\}$, $C_c^{\infty,k}(U)$ *l'ensemble des* k*-formes différentielles extérieures à coefficients dans* $C_c^\infty(U)$. *Soit* $\mathrm{DR}_c(U)$ *le complexe de De Rham à coefficients dans* $C_c^\infty(U)$ *:*

$$0\longrightarrow C_c^\infty(U)\xrightarrow{\mathrm{d}_c^0}C_c^{\infty,1}(U)\xrightarrow{\mathrm{d}_c^1}C_c^{\infty,2}(U)\longrightarrow 0$$

$$\text{où}\quad \mathrm{d}_c^0(f)=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}_cx+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}_cy\quad\text{et}\quad \mathrm{d}_c^1(g\mathrm{d}_cx+h\mathrm{d}_cy)=\left(\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\partial g}{\partial y}\right)\mathrm{d}_cx\wedge\mathrm{d}_cy$$

(3) Montrer que $\mathrm{DR}_c(U)$ *est un complexe de Koszul* $\mathrm{K}^\bullet(N,\psi)$ *pour un module* N *et des endomorphismes* $\psi=(\psi_1,\psi_2)$ *que l'on précisera.*

(4) Montrer que la suite (ψ_1,ψ_2) *est régulière, et en déduire la cohomologie de* $\mathrm{DR}_c(U)$.

Exercice 22. *Soient* A *un anneau,* $0\longrightarrow M'\xrightarrow{f}M\xrightarrow{g}M''\longrightarrow 0$ *une suite exacte de* A*-modules et* $E^\bullet$ *et* $E'^\bullet$ *des résolutions projectives (ou libres) de* M *et* M'. *(c'est à dire des complexes vérifiant* $\forall i>0: E^i=0$, $H^0(E^\bullet)=M$ *et* $\forall i<0: H^i(E^\bullet)=0$, *et de même pour* E'*). On note* π *et* π' *les applications surjectives naturelles* $E^0\longrightarrow M$ *et* $E'^0\longrightarrow M'$.

(1) Montrer qu'il existe des morphismes $E'^i\xrightarrow{\alpha^i}E^i$ *tels que* $\pi\circ\alpha^0=f\circ\pi'$ *et pour tout* $i\leq 0$ *:* $\mathrm{d}_E^i\circ\alpha^i=\alpha^{i+1}\circ\mathrm{d}_{E'}^i$.

(2) Pour tout i *on pose* $E''^i=E'^{i+1}\oplus E^i$ *et* $d_{E''}^i=\begin{pmatrix}\mathrm{d}_{E'}^{i+1} & 0\\ \alpha^{i+1} & -\mathrm{d}_E^i\end{pmatrix}$. *Montrer que* $E''^\bullet$ *est une résolution projective (ou libre) de* M''. *(Ce complexe est noté* $M(\alpha)$*.)*

(3) Énoncer et démontrer un résultat analogue pour des résolutions injectives.

Exercice 23. *Soient* A *un anneau,* $0\longrightarrow M'\xrightarrow{f}M\xrightarrow{g}M''\longrightarrow 0$ *une suite exacte de* A*-modules et* $E'^\bullet$ *et* $E''^\bullet$ *des résolutions projectives (resp. injectives) de* M' *et* M''. *Pour tout* i *on pose* $E^i=E'^i\oplus E''^i$. *Décrire des applications* $d_E^i: E^i\longrightarrow E^{i+1}$ *telles que le complexe* $E^\bullet$ *ainsi formé soit une résolution projective (resp. injective) de* M.