Master 1 — Mathématiques — 2006
Travaux dirigés d'algèbre et topologie
Chapitre 2 — Catégories, Foncteurs

Laurent Koelblen

Exercice 24.

(1) Montrer que dans la catégorie des ensembles un morphisme est un monomorphisme (resp. épimorphisme) si et seulement si c'est une application injective (resp. surjective).

(2) Montrer que dans la catégorie des anneaux $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ est un épimorphisme.

Exercice 25.

(1) Montrer que la catégorie des ensembles n'est pas équivalente à sa catégorie opposée.

(2) Montrer que la catégorie des relations est équivalente à sa catégorie opposée. (Voir la définition page 34, exemple 2.1.4.)

Exercice 26. *On rappelle que tout groupe abélien fini est isomorphe à un unique groupe du type $\bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$ où les entiers strictement positifs n_i vérifient $n_1 \mid n_2 \mid \ldots \mid n_r$.*

(1) Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$; montrer que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/\operatorname{pgcd}(n,p)\mathbb{Z}$; en déduire l'existence d'un isomorphisme de groupe $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ et le décrire explicitement.

(2) Soient $n, p, q \in \mathbb{N}^*$; montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \arrow[r, "\circ"] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \arrow[d, "\wr"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r, "\circ"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \end{tikzcd}$$

(3) Soient G et H des groupes abéliens finis ; établir l'existence d'un isomorphisme de groupe $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, H) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, G)$.

(4) Soient G, H et K des groupes abéliens finis ; montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, H) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, K) \arrow[r, "\circ"] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, K) \arrow[d, "\wr"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K, H) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, G) \arrow[r, "\circ"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K, G) \end{tikzcd}$$

(5) Montrer que la catégorie $\mathbf{Ab^f}$ des groupe abéliens finis est équivalente à la catégorie opposée $\left(\mathbf{Ab^f}\right)^{op}$.

Exercice 27. *Soit $\mathcal{I}$ et $\mathcal{C}$ deux catégories. On suppose que tout foncteur de $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{C}$ admet une limite inductive. On note Δ le foncteur de $\mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathcal{I}}$ qui a $X \in \mathcal{C}$ associe le foncteur constant F_X.*

(1) Montrer que $\varinjlim : \mathcal{C}^{\mathcal{I}} \to \mathcal{C}$ est un foncteur.

(2) Soit $F \in \mathcal{C}^{\mathcal{I}}$ et $Y \in \mathcal{C}$; montrer que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\varinjlim F, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathcal{I}}}(F, \Delta Y)$.

On suppose maintenant que tout foncteur de $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{C}$ admet une limite projective.

(3) Soit $G \in \mathcal{C}^{\mathcal{I}}$ et $X \in \mathcal{C}$; montrer que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \varprojlim G) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathcal{I}}}(\Delta X, G)$.

Exercice 28. *Soient $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $D : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ deux foncteurs.*

(1) On suppose que G est adjoint à gauche de D. Montrer qu'il existe des morphismes de foncteurs $\varepsilon : Id_{\mathcal{C}} \to DG$ et $\eta : GD \longrightarrow Id_{\mathcal{D}}$ tels que les morphismes composés

$$D(Y) \xrightarrow{\varepsilon(D(Y))} DGD(Y) \xrightarrow{D(\eta(Y))} D(Y) \quad \text{et} \quad G(X) \xrightarrow{G(\varepsilon(X))} GDG(X) \xrightarrow{\eta(G(X))} G(X)$$

soient des identités.

(2) Réciproquement, montrer que s'il existe ε et η vérifiant les propriétés de la question (1) alors G est adjoint à gauche de D.

(3) Montrer que G est pleinement fidèle si et seulement si ε est un isomorphisme, et que D est pleinement fidèle si et seulement si η est un isomorphisme.