Master 1 — Mathématiques — 2006
Travaux dirigés d'algèbre et topologie
Chapitre 4 — Foncteurs dérivés

Laurent Koelblen

Exercice 29. *Soient A un anneau et I et J deux idéaux de A.*

(1) *Montrer que* $\operatorname{Tor}_1^A(A, A/J) = 0$.
(2) *Montrer que* $I \otimes (A/J) \simeq I/IJ$.
(3) *Montrer que* $\operatorname{Tor}_1^A(A/I, A/J) \simeq \dfrac{I \cap J}{IJ}$.

Exercice 30. *Soit A un anneau, M un A-module et $x \in A$ non diviseur de zéro.*

(1) *Calculer* $\operatorname{Ext}_A^1(A/(x), M)$.
(2) *En particulier calculer* $\operatorname{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$.
(3) *Montrer qu'un groupe abelien de type fini G est libre si et seulement si* $\operatorname{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(G, \mathbb{Z}) = 0$.

Exercice 31. *Soit A un anneau et I un idéal. Montrer que* $\operatorname{Ext}_A^1(A/I, A/I) \simeq \operatorname{Hom}_A(I/I^2, A/I)$.

Exercice 32. *Soit $A = k[x_1, x_2]$. On considère les A-modules $M' = A/(x_1A + x_2A)$, $M = A/(x_1^2A + x_1x_2A)$ et $M'' = A/(x_1A)$.*

(1) *Montrer que* $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\times x_1} M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ *est une suite exacte non scindée.*
(2) *Construire des résolutions libres de M' et M'' et en déduire les modules* $\operatorname{Ext}_A^i(M', A)$, $\operatorname{Ext}_A^i(M'', A)$, $\operatorname{Ext}_A^i(M, A)$ *pour tout i.*

Exercice 33. *Soit M un A-module et $\varphi = (\varphi_1 \ldots, \varphi_n)$ n endomorphismes de M qui commuttent deux à deux. Calculer la cohomologie du complexe de Koszul $K^\bullet(M, \varphi)$ sous l'hypothèse que $\varphi' = (\varphi_1 \ldots, \varphi_p)$ est une suite régulière et $\varphi'' = (\varphi_{p+1} \ldots, \varphi_n)$ est une suite corégulière.*