# Master 1 — Mathématiques — 2006
# Travaux dirigés d'algèbre et topologie
# Chapitre 5 — Faisceaux

Laurent Koelblen

**Exercice 34.** *Soient $X$ un espace topologique, $k$ un corps, et $F$ et $G$ deux faisceaux de $k$-espace vectoriel sur $X$. Soit $X = \bigcup_{i \in \mathfrak{I}} X_i$ un recouvrement ouvert de $X$ et pour chaque $i \in \mathfrak{I}$ : $\varphi_i \in \hom(F_{|X_i}, G_{|X_i})$ tels que $\forall (i,j) \in \mathfrak{I}^2$ : $\varphi_{i|X_i \cap X_j} = \varphi_{j|X_i \cap X_j}$. Montrer qu'il existe un unique $\varphi \in \hom(F,G)$ tel que $\varphi_{|X_i} = \varphi_i$.*

**Exercice 35.** *Soit $X$ un espace topologique et $X = \bigcup_{i \in \mathfrak{I}} X_i$ un recouvrement de $X$ par des ouverts. Nous noterons $X_{ij} = X_i \cap X_j$ et $X_{ijk} = X_i \cap X_j \cap X_k$.*
*On considère pour chaque $i \in \mathfrak{I}$ un faisceau $F_i$ sur $X_i$ et pour chaque couple $(i,j) \in \mathfrak{I}^2$ un isomorphisme $\varphi_{ij} : F_{j|X_{ij}} \longrightarrow F_{i|X_{ij}}$. Pour tout ouvert $U$ de $X$ on définit :*

$$\begin{aligned} \Phi_U : \prod_{i \in \mathfrak{I}} F_i(X_i \cap U) &\longrightarrow \prod_{(i,j) \in \mathfrak{I}^2} F_i(X_{ij} \cap U) \\ (s_i)_{i \in \mathfrak{I}} &\longmapsto \left(s_{i|X_{ij} \cap U} - \varphi_{ij}(s_{j|X_{ij} \cap U})\right)_{(i,j) \in \mathfrak{I}^2} \end{aligned}$$

*et on pose $F(U) = \ker \Phi_U$.*

*(1) Montrer que $F$ est un faisceau.*

*On suppose désormais que pour tout $i \in \mathfrak{I}$ on a $\varphi_{ii} = \mathrm{Id}_{F_i}$ et que pour tout $(i,j,k) \in \mathfrak{I}^3$ on a $\varphi_{ij|X_{ijk}} \circ \varphi_{jk|X_{ijk}} = \varphi_{ik|X_{ijk}}$.*

*(2) Montrer pour tout $i \in \mathfrak{I}$ l'existence d'un unique isomorphisme de faisceau $F_i \xrightarrow[\sim]{\varphi_i} F_{|X_i}$ tel que pour tout $(i,j) \in \mathfrak{I}^2$ on ait : $\varphi_{i|X_{ij}} \circ \varphi_{ij} = \varphi_{j|X_{ij}}$.*

*(3) Soit $G$ est un faisceau sur $X$ ; on suppose que pour tout $i \in \mathfrak{I}$ il existe un isomorphisme $F_i \xrightarrow[\sim]{\psi_i} G_{|X_i}$ et que pour tout $(i,j) \in \mathfrak{I}^2$ on a $\psi_{j|X_{ij}} = \psi_{i|X_{ij}} \circ \varphi_{ij}$ ; montrer qu'il existe un unique isomorphisme $F \xrightarrow{\psi} G$ tel que pour tout $i \in \mathfrak{I}$ on ait $\psi_i = \psi_{|X_i} \circ \varphi_i$.*

*(On dit que $F$ est le recollement des faisceaux $F_i$ à l'aide des isomorphismes $\varphi_{ij}$.)*

**Exercice 36.** *Soit $k$ un corps et $X$ un espace topologique connexe tel que tout point de $X$ admette une base de voisinages connexes (on dit que $X$ est localement connexe). Soit $F$ un faisceau de $k$-espaces vectoriels localement constant sur $X$ tel que pour tout $x \in X$ on ait $F_x \simeq k$. Montrer que si $\Gamma(X,F) \neq (0)$, alors $F$ est constant.*



**Exercice 37.** *Soit $X$ un espace topologique connexe et $A$ un anneau commutatif unitaire. Montrer que si $A_X \xrightarrow{\varphi} A_X$ est un isomorphisme de faisceau alors il existe $a \in A$ inversible tel que pour tout ouvert $U$ de $X$ l'isomorphisme $A_X(U) \xrightarrow{\varphi(U)} A_X(U)$ soit la multiplication par $a$.*

**Exercice 38.**

*(1) Soient $I$ et $J$ deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ tels que $I \cap J \neq \emptyset$ et $F$ un faisceaux de $k$-espace vectoriel sur $I \cup J$ tel que $F_{|I} \simeq k_I$ et $F_{|J} \simeq k_J$. Montrer que $F \simeq k_{I \cup J}$.*

*(2) Soit $F$ un faisceau de $k$-espace vectoriel localement constant sur $I = ]0,1[ \subset \mathbb{R}$. Montrer que $F \simeq k_I$.*

*(3) Montrer le même résultat pour $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$.*

**Exercice 39.** *Soient $X = \mathbb{S}^1$, $X_1$, $X_2$ et $X_3$ trois arcs de cercle et $F_i = k_{X_i}$ avec $k$ un corps. Nous supposerons que les intersections $X_{12} = X_1 \cap X_2$, $X_{23} = X_2 \cap X_3$ et $X_{31} = X_3 \cap X_1$ sont non vides et connexes et que $X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \emptyset$.*
*Soient $\varphi_{12} : F_{2|X_{12}} \xrightarrow{\times\alpha} F_{1|X_{12}}$, $\varphi_{23} : F_{3|X_{23}} \xrightarrow{\times\beta} F_{2|X_{23}}$, $\varphi_{31} : F_{1|X_{31}} \xrightarrow{\times\gamma} F_{3|X_{31}}$ et $F$ le faisceau sur $X$ obtenu par recollement des $F_i$ à l'aide des isomorphismes $\varphi_{ij}$ (voir exercice 2)*
*De même soient $\varphi'_{12} : F_{2|X_{12}} \xrightarrow{\times\alpha'} F_{1|X_{12}}$, $\varphi'_{23} : F_{3|X_{23}} \xrightarrow{\times\beta'} F_{2|X_{23}}$, $\varphi'_{31} : F_{1|X_{31}} \xrightarrow{\times\gamma'} F_{3|X_{31}}$ et $F'$ le faisceau sur $X$ obtenu par recollement des $F_i$ à l'aide des isomorphismes $\varphi'_{ij}$*

*(1) Montrer que $F \simeq F'$ si et seulement si $\alpha\beta\gamma = \alpha'\beta'\gamma'$*

*(2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ pour que $F$ soit un faisceau constant.*

**Exercice 40.** *Soit $X$ un espace topologique et $S_1$ et $S_2$ deux fermés de $X$ tel que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. On pose $S = S_1 \cup S_2$. Montrer que $k_{XS} \simeq k_{XS_1} \oplus k_{XS_2}$.*

**Exercice 41.** *Soit $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$ et $Z = \{(x,y) \in X,\ xy \geq 1\}$. On définit $f : X \to Y$ par $f(x,y) = y$. Calculer $f_* k_{XZ}$.*

**Exercice 42.** *Soit $Y = \mathbb{R}$ et $Z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy > 1,\ x > 0\}$. On définit $f : Z \to Y$ par $f(x,y) = xy$. Calculer $f_* k_Z$.*

**Exercice 43.** *Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques et $f : Y \longrightarrow X$ une application continue, surjective telle que tout point de $X$ admet un voisinage ouvert $U$ tel que $f^{-1}(U) = V_1 \sqcup V_2$ et $f_{V_i} : V_i \longrightarrow U$ soit un homéomorphisme ($i = 1, 2$). Soit $k$ un corps.*

*(1) Décrire une application naturelle $\mathrm{nat} : k_X \longrightarrow f_* k_Y$.*

*(2) Montrer qu'il existe un morphisme $\mathrm{tr} : f_* k_Y \longrightarrow k_X$ tel que $\mathrm{tr} \circ \mathrm{nat} = 2\,\mathrm{Id}_{k_X}$. (Utiliser l'exercice 1.)*

*(3) En déduire que si $k$ est de caractéristique différente de 2 alors il existe un faisceau de $k$-espace vectoriel $L$ sur $X$ localement constant de dimension 1, tel que $f_* k_Y \simeq k_X \oplus L$.*

*(4) Montrer que si $Y$ est connexe, le faisceau $L$ n'est pas constant.*

*(5) Construire un exemple...*

**Exercice 44.** *Si $U$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ on note $C^\infty_{\mathbb{C}}(U)$ l'ensemble des fonctions de classe $C^\infty$ sur $U$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes définies sur $U$. Si $\mathfrak{I}$ un ensemble totalement ordonné on note $\mathfrak{I}^{[n]} = \{(i_1, \ldots, i_n) \in \mathfrak{I}^n,\ i_1 < \cdots < i_n\}$ ;*

(1) *Montrer que $C^\infty_{\mathbb{C}}$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ sont des faisceaux.*

(2) *Soit $\mathfrak{I}$ un ensemble totalement ordonné et $(U_i)_{i\in\mathfrak{I}}$ une famille d'ouvert de $\mathbb{C}$. Montrer que la suite :*

$$\prod_{i\in\mathfrak{I}} \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}(U_i) \xrightarrow{\varphi} \prod_{(i,j)\in\mathfrak{I}^{[2]}} \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}(U_{ij}) \xrightarrow{\psi} \prod_{(i,j,k)\in\mathfrak{I}^{[3]}} \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}(U_{ijk})$$

*avec :* $$\varphi\big((f_i)_{i\in\mathfrak{I}}\big) = (f_{j|_{U_{ij}}} - f_{i|_{U_{ij}}})_{(i,j)\in\mathfrak{I}^{[2]}}$$

*et :* $$\psi\big((f_{ij})_{(i,j)\in\mathfrak{I}^{[2]}}\big) = (f_{ij|_{U_{ijk}}} + f_{jk|_{U_{ijk}}} - f_{ik|_{U_{ijk}}})_{(i,j,k)\in\mathfrak{I}^{[3]}}$$

*est exacte. (Indication : on admettra qu'il existe une partition de l'unité $C^\infty$, localement finie et subordonnée à la partition $(U_i)_{i\in\mathfrak{I}}$, c'est à dire une famille $(\alpha_i)_{i\in\mathfrak{I}}$ de fonctions $C^\infty$ définies sur $\bigcup_{i\in\mathfrak{I}} U_i$ telle que :*

(a) *$\forall i \in \mathfrak{I} : \operatorname{supp}(\alpha_i) \subset U_i$ ($\operatorname{supp}(\alpha_i)$ est un fermé, adhérence de $\{x \in \mathbb{C},\ \alpha_i(x) \neq 0\}$),*

(b) *$\forall x \in \bigcup_{i\in\mathfrak{I}} U_i$ l'ensemble $\{i \in \mathfrak{I},\ \alpha_i(x) \neq 0\}$ est fini,*

(c) *$\sum_{i\in\mathfrak{I}} \alpha_i = 1$,*

*et on montrera que $(f_{ij})_{(i,j)\in\mathfrak{I}^{[2]}} \in \ker\psi$ admet pour antécédant par $\varphi$ la famille $(f_i)_{i\in\mathfrak{I}}$ définie par $f_i = \sum_{k\in\mathfrak{I}} \alpha_k f_{ki}$ (avec la convention $f_{ki} = -f_{ik}$ si $k > i$ et $f_{ii} = 0$). (On veillera à montrer que les fonctions $\alpha_k f_{ki}$ ont un prolongement $C^\infty$ à $U_i$.)*

(3) *Soit $(U_i)_{i\in\mathfrak{I}}$ une famille d'ouvert de $\mathbb{C}$. Montrer qu'on a une suite exacte :*

$$\prod_{i\in\mathfrak{I}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U_i) \xrightarrow{\varphi} \prod_{(i,j)\in\mathfrak{I}^{[2]}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U_{ij}) \xrightarrow{\psi} \prod_{(i,j,k)\in\mathfrak{I}^{[3]}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U_{ijk})$$

*(Indication : on admettra que la suite $0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}(U) \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}(U) \longrightarrow 0$ est exacte pour tout ouvert $U \subset \mathbb{C}$.)*

(4) *Soit $\omega$ un ouvert de $\mathbb{R}$ et $\Omega_1$ et $\Omega_2$ deux ouverts de $\mathbb{C}$ tel que $\Omega_1 \cap \mathbb{R} = \Omega_2 \cap \mathbb{R} = \omega$. Montrer que $\dfrac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega_1 \setminus \omega)}{\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega_1)} \simeq \dfrac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega_2 \setminus \omega)}{\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega_2)}$.*

(5) *Si $\omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ on pose $B(\omega) = \dfrac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega \setminus \omega)}{\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega)}$ où $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ tel que $\Omega \cap \mathbb{R} = \omega$. Montrer que $B$ est un faisceau flasque.*

(6) *Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{C}$, $\omega = \Omega \cap \mathbb{R}$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k(z) \dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}$ un opérateur différentiel holomorphe sur $\Omega$ ($\forall k : a_k(z) \in \mathcal{O}(\Omega)$). Montrer que $P$ induit un morphisme surjectif $P : B(\omega) \longrightarrow B(\omega)$. (On rappelle le théorème de Cauchy : si $a_n(z)$ ne s'annule pas et si $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ dont chaque composante connexe est simplement connexe alors l'application $P : \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\Omega)$ est surjective.)*