Master 1 — Mathématiques — 2006
Travaux dirigés d'algèbre et topologie
Chapitre 6 — Cohomologie des faisceaux

Laurent Koelblen

Exercice 45. *Soit X l'espace topologique formé de la réunion des arêtes du tétraèdre de $\mathbb{R}^3$ de sommets $A=(0,0,0)$, $B=(1,0,0)$, $C=(0,1,0)$ et $D=(0,0,1)$*

(1) Soit k un corps commutatif ; calculer $H^j(X,k_X)$ pour $j\geq 0$.

(2) Calculer $H^j(X,\mathbb{Z}_X)$ pour $j\geq 0$.

Exercice 46. *Soit $\omega=\exp(2i\pi/3)\in\mathbb{C}$, X_1 l'espace topologique formé de la réunion des arêtes du triangle de sommets 1, ω et ω^2, X_2 l'espace topologique formé de la réunion des arêtes du triangle de sommets -1, $-\omega$ et $-\omega^2$, et $X=X_1\cup X_2$.*

(1) Soit k un corps commutatif ; calculer $H^j(X,k_X)$ pour $j\geq 0$.

(2) Calculer $H^j(X,\mathbb{Z}_X)$ pour $j\geq 0$.

Exercice 47. *Soit X la réunion des arêtes d'un polyèdre convexe à n faces.*

(1) Soit k un corps commutatif ; calculer $H^j(X,k_X)$ pour $j\geq 0$.

(2) Calculer $H^j(X,\mathbb{Z}_X)$ pour $j\geq 0$.

Exercice 48. *Soit $\mathbb{S}^n$ la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$.
On pose $Z_1=\mathbb{S}^n\cap\big(\mathbb{R}^n\times]-\infty,0]\big)$ et $Z_2=\mathbb{S}^n\cap\big(\mathbb{R}^n\times[0,+\infty[\big)$.*

(1) Montrer que Z_1 et Z_2 sont contractiles et que $Z_1\cap Z_2=\mathbb{S}^{n-1}$ pour $n\geq 1$.

(2) Soit k un corps commutatif ; calculer par récurrence sur n les modules $H^j(\mathbb{S}^n,k_{\mathbb{S}^n})$ pour $n\geq 0$ et $j\geq 0$.

(3) Calculer $H^j(\mathbb{S}^n,\mathbb{Z}_{\mathbb{S}^n})$ pour $n\geq 0$ et $j\geq 0$.

(4) Montrer que $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ est homotope à $\mathbb{S}^{n-1}$. En déduire que $\mathbb{R}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^p$ si et seulement si $n=p$.

Exercice 49. *Soient $n>p\geq 0$ deux entiers, $X_1=\{(x_0,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^{n+1},\ x_0^2+\cdots+x_n^2=1\}$, $X_2=\{(x_0,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^{n+1},\ x_0^2+\cdots+x_p^2+2(x_{p+1}^2+\cdots+x_n^2)=1\}$ et $X=X_1\cup X_2$.*

(1) Soit k un corps commutatif ; calculer $H^j(X,k_X)$ pour $j\geq 0$.

(2) Calculer $H^j(X,\mathbb{Z}_X)$ pour $j\geq 0$.

Exercice 50. *Soient $n\geq 2$, $P_1,\dots,P_m$ des points de $\mathbb{R}^n$ et $X=\mathbb{R}^n\setminus\{P_1,\dots,P_m\}$.*

(1) Soit k un corps commutatif ; calculer $H^j(X,k_X)$ pour $j\geq 0$.

(2) Calculer $H^j(X,\mathbb{Z}_X)$ pour $j\geq 0$.

Exercice 51. *Soit $\mathbb{S}^1$ le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{T}^n=\underbrace{\mathbb{S}^1\times\cdots\times\mathbb{S}^1}_{n\ fois}$. On note $\mathbb{S}^{1+}$ le demi-cercle : $\{(x,y)\in\mathbb{S}^1,\ x\geq 0\}$ et $\mathbb{S}^{1-}$ le demi-cercle : $\{(x,y)\in\mathbb{S}^1,\ x\leq 0\}$ et on pose $Z_1=\mathbb{S}^{1+}\times\mathbb{T}^{n-1}$ et $Z_2=\mathbb{S}^{1-}\times\mathbb{T}^{n-1}$ de sorte que $\mathbb{T}^n=Z_1\cup Z_2$.*

(1) Montrer que $Z_1\cap Z_2$ a deux composantes connexes que l'on notera Y_1 et Y_2. À quoi sont homotopes Z_1, Z_2, Y_1 et Y_2 ?

(2) Soit k un corps commutatif ; calculer les modules $H^j(\mathbb{T}^n,k_{\mathbb{T}^n})$ pour $n\geq 1$ et $j\geq 0$.

(3) Calculer $H^j(\mathbb{T}^n,\mathbb{Z}_{\mathbb{T}^n})$ pour $n\geq 1$ et $j\geq 0$.

Exercice 52. *Calculer $H^j(\mathbb{T}^n,\mathbb{Z}_{\mathbb{T}^n})$ pour $n\geq 1$ et $j\geq 0$ à l'aide de la formule de Künneth.*

Exercice 53. *Soit Y un nœud, c'est-à-dire l'image d'un plongement $f:\mathbb{S}^1\longrightarrow\mathbb{R}^3$, et soit $X=\mathbb{R}^3\setminus Y$.*

(1) Soit k un corps commutatif ; calculer $H^j(X,k_X)$ pour $j\geq 0$.

(2) Calculer $H^j(X,\mathbb{Z}_X)$ pour $j\geq 0$.

(On admettra que Y possède un voisinage tubulaire Y', c'est à dire l'image d'un plongement $f':\mathrm{D}_2\times\mathbb{S}^1\longrightarrow\mathbb{R}^3$ où $\mathrm{D}_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2<1\}$ et tel que $f'\big((0,0),p\big)=f(p)$ pour tout $p\in\mathbb{S}^1$, et on remarquera que $X=\mathbb{R}^3\setminus Y$ est homotope à $X'=\mathbb{R}^3\setminus Y'$.)

Exercice 54. *On définit sur $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ la relation d'équivalence : $u\sim v\Leftrightarrow(\exists\lambda\in\mathbb{R}^*:v=\lambda u)$. On pose $\mathbb{P}^n\mathbb{R}=\big(\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}\big)/\sim$; c'est l'espace projectif réel de dimension n. On a ainsi une surjection naturelle $\pi:\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}\to\mathbb{P}^n\mathbb{R}$.*

(1) Soient $X=\big\{(x_0,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^{n+1},\ \max\{|x_0|,\dots,|x_n|\}=1\big\}$ l'hypercube unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ et, pour $0\leq i\leq n$, $X_i=\{(x_0,\dots,x_n)\in Y,\ x_i=1\}$. ($X_0,\dots,X_n$ sont des faces de l'hypercube unité.) On pose $Y_i=\pi(X_i)$; les fermés $Y_0,\dots,Y_n$ forment un recouvrement fini de $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$.

Soit k un corps commutatif. Calculer $H^n(\mathbb{P}^n\mathbb{R},k_{\mathbb{P}^n\mathbb{R}})$, pour n pair, à l'aide de ce recouvrement.

(2) Soient $Z=\big\{(x_0,\dots,x_n),\ x_0^2+\cdots+x_n^2=1\big\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$, $Z_1=\{(x_0,\dots,x_n)\in Z,\ |x_0|\geq 1/2\}$ et $Z_2=\{(x_0,\dots,x_n)\in Z,\ |x_0|\leq 1/2\}$. On pose $W_i=\pi(Z_i)$ $(i=1,2)$.

Soit k un corps commutatif. Calculer $H^j(\mathbb{P}^n\mathbb{R},k_{\mathbb{P}^n\mathbb{R}})$ pour $j\geq 0$ à l'aide de la suite longue de Mayer-Vietoris associée à W_1 et W_2. (Faire une récurrence sur n)

(3) De la même manière, calculer $H^j(\mathbb{P}^n\mathbb{R},\mathbb{Z}_{\mathbb{P}^n\mathbb{R}})$ pour $j\geq 0$.