

ANALYSE DE FOURIER

par Laurent LAZZARINI

DISCOURS PRÉLIMINAIRE
à la *Théorie analytique de la chaleur*, 1822.
(Extrait)

“L’étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques. Non-seulement cette étude, en offrant aux recherches un but déterminé, a l’avantage d’exclure les questions vagues et les calculs sans issue; elle est encore un moyen assuré de former l’analyse elle-même, et d’en découvrir les éléments qu’il nous importe le plus de connaître, et que cette science doit toujours conserver : ces éléments fondamentaux sont ceux qui se reproduisent dans tous les effets naturels.

On voit, par exemple, qu’une même expression, dont les géomètres avaient considéré les propriétés abstraites, et qui sous ce rapport appartient l’analyse générale, représente aussi le mouvement de la lumière dans l’atmosphère, qu’elle détermine les lois de la diffusion de la chaleur dans la matière solide, et qu’elle entre dans toutes les questions principales de la théorie des probabilités.

Les équations analytiques, ignorées des anciens géomètres, que Descartes a introduites le premier dans l’étude des courbes et des surfaces, ne sont pas restreintes aux propriétés des figures, et celles qui sont l’objet de la mécanique rationnelle; elles s’étendent tous les phénomènes généraux. Il ne peut y avoir de langage plus universel et plus simple, plus exempt d’erreurs et d’obscurités, c’est-à-dire plus digne d’exprimer les rapports invariables des êtres naturels.

Considérée sous ce point de vue, l’analyse mathématique est aussi étendue que la nature elle-même; elle définit tous les rapports sensibles, mesure les temps, les espaces, les forces, les températures; cette science difficile se forme avec lenteur, mais elle conserve tous les principes qu’elle a une fois acquis; elle s’accroît et s’affermit sans cesse au milieu de tant de variations et d’erreurs de l’esprit humain.

Son attribut principal est la clarté; elle n’a point de signes pour exprimer les notions confuses. Elle rapproche les phénomènes les plus divers, et découvre les analogies secrètes qui les unissent. Si la matière nous échappe comme celle de l’air et de la lumière par son extrême ténuité, si les corps sont placés loin de nous, dans l’immensité de l’espace, si l’homme veut connaître le spectacle des cieux pour des époques successives que sépare un grand nombre de siècles, si les actions de la gravité et de la chaleur s’exercent dans l’intérieur du globe solide des profondeurs qui seront toujours inaccessibles, l’analyse mathématique peut encore saisir les lois de ces phénomènes. Elle nous les rend présents et mesurables, et semble être une faculté de la raison humaine destinée à suppléer à la brièveté de la vie et à l’imperfection des sens; et ce qui est plus remarquable encore, elle suit la même marche dans l’étude de tous les phénomènes; elle les interprète par le même langage, comme pour attester l’unité et la simplicité du plan de l’univers, et rendre encore plus manifeste cet ordre immuable qui préside à toutes les cause naturelles.

Les questions de la théorie de la chaleur offrent autant d’exemples de ces dispositions simples et constantes qui naissent des lois générales de la nature; et si l’ordre qui s’établit dans ces phénomènes pouvait être saisi par nos sens, ils nous causeraient une impression comparables à celles des résonances harmoniques.(...)”

in Joseph Fourier, *Oeuvres*, vol. 1, Gauthier-Villars, Paris, 1888-1890.

Chapitre 1

Séries de Fourier

1.1 Introduction

Les séries trigonométriques sont des séries de fonctions particulières. On va voir qu'à toute fonction périodique raisonnable, peut être associée, une telle série, sa série de Fourier. Il est alors naturel de se demander sous quelles hypothèses une série de Fourier converge et si sa limite est égale à la fonction d'origine.

Commençons par un exemple concret. On considère une barre de métal de longueur L dont les extrémités sont maintenues à une température constante T_0 . On suppose que le métal est parfaitement isolé en sorte que la chaleur n'est susceptible de diffuser que par conduction le long de la barre. On souhaite connaître l'évolution de la fonction de répartition de la température $U(s, t)$ en chaque point $0 \leq s \leq L$ et à chaque instant, à partir de la donnée initiale $U_0(x) = U(x, 0)$. Sous l'hypothèse que le flux de chaleur en tout point de la barre est proportionnel au gradient de température $\frac{\partial U}{\partial x}$ (loi de Newton), Fourier a établi l'équation dite de la chaleur.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 U}{\partial s^2}$$

où κ est une constante fonction de la chaleur spécifique linéaire et de la conductivité calorifique de la barre. Il ne s'agit pas de discuter ici de la validité de ce modèle mais d'examiner ses conséquences mathématiques. Avec les changements de variables

$$x := s\pi/L, \quad t^* := t\kappa(\pi/L)^2, \quad u := U/T_0 - 1 \text{ et } f := U_0/T_0 - 1,$$

l'équation de la chaleur se réduit à l'écriture suivante.

$$\frac{\partial u}{\partial t^*} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.1}$$

avec pour conditions aux limites

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x) & \forall x \in [0, \pi] \\ u(0, t^*) = u(\pi, t^*) = 0 & \forall t^* \geq 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Dans la suite, pour alléger les notations, on identifiera t et t^* . La proposition suivante montre que l'équation (1.1) a au plus une solution.

Proposition 1.1.1 (Unicité) *Il existe au plus une unique fonction $u : [0, \pi] \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait les conditions suivantes.*

1. *Pour tout $x \in [0, \pi]$, la fonction $t \mapsto u(x, t)$ est dérivable sur $(0, +\infty)$, de dérivée égale par définition à $\frac{\partial u}{\partial t}$.*
2. *Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto u(x, t)$ est deux fois dérivable sur $[0, \pi]$, de dérivée seconde égale par définition à $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.*
3. *Les fonctions u sur $[0, \pi] \times [0, +\infty)$ et $\frac{\partial u}{\partial t}$ sur $[0, \pi] \times (0, +\infty)$ sont continues,*
4. *u vérifie les conditions (1.2) et l'équation (1.1) sur $[0, \pi] \times (0, +\infty)$.*

DÉMONSTRATION : Si u_1 et u_2 sont deux solutions, alors $v := u_1 - u_2$ est encore une solution qui vérifie toutes les hypothèses de régularité de la proposition mais avec $f = 0$ dans les conditions aux limites. Il s'agit de montrer que $v = 0$. On considère la fonction "énergie".

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^\pi v^2(x, t) dx.$$

Comme v est continue, la fonction E est continue positive sur $[0, +\infty)$. De plus, comme $v \frac{\partial v}{\partial t}$ est continue sur $[0, \pi] \times (0, +\infty)$, la fonction E est en fait dérivable en tout $t > 0$ et

$$E'(t) = \int_0^\pi v(x, t) \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) dx = \int_0^\pi v(x, t) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) dx$$

d'après (1.1). D'où après une intégration par parties

$$E'(t) = \left[v \frac{\partial v}{\partial x} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx.$$

De plus, le premier terme de cette dernière expression est nul puisque $v(0, t) = v(\pi, t) = 0$ pour tout $t \geq 0$ d'après (1.2). Ainsi, $E'(t)$ est négative pour $t > 0$ et par suite E est décroissante sur $[0, +\infty)$. Or $E(0) = 0$ donc E s'annule identiquement et il en est de même pour la fonction $v^2 \geq 0$ continue, puis pour v . \square

Maintenant que nous sommes assurés de l'unicité de la solution, "il ne reste plus qu'à" l'exhiber. Par la méthode classique de séparation des variables, on trouve facilement que les fonctions

$$(a_p \cos(px) + b_p \sin(px))e^{-p^2 t}$$

sont solutions de (1.1) si p , a_p et b_p sont des constantes réelles. De plus, la condition aux limites $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ entraîne que p est entier et $a_p = 0$.

Toute combinaison linéaire de solutions est encore solution et plus généralement, on peut chercher la solution sous la forme d'une série

$$\sum_{p=1}^{+\infty} b_p \sin(px) e^{-p^2 t}.$$

En particulier, on doit avoir pour $t = 0$

$$f(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} b_p \sin(px).$$

L'objet de ce chapitre est d'expliquer pourquoi cette dernière condition détermine entièrement les coefficients b_p . On introduira notamment assez d'éléments pour démontrer le résultat suivant.

Proposition 1.1.2 (Existence) *Soit $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 telle que $f(0) = f(\pi) = 0$. On définit pour $p \geq 1$*

$$b_p = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(px) dx.$$

Alors la série $\sum |b_p|$ est convergente et la fonction

$$u(x, t) = \sum_{p=1}^{+\infty} b_p \sin(px) e^{-p^2 t}$$

est solution de l'équation de la chaleur (1.1) avec (1.2) pour conditions aux limites.

1.2 Séries trigonométriques.

Définition 1.2.1 On appelle **série trigonométrique** toute série de fonctions de terme général

$$a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

où a_n et b_n sont des scalaires réels ou complexes.

Nous allons répondre, partiellement, à la question suivante.

Question 1.2.2 Connaissant certaines propriétés des suites (a_n) et (b_n) , que peut-on dire de la limite

$$f(x) := a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) ?$$

Commençons par donner une seconde définition des séries trigonométriques. La proposition montre qu'une série trigonométrique est aussi bien caractérisée par ses coefficients $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, que par ses coefficients $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

Proposition 1.2.3 *Soient (a_n) et (b_n) deux suites de scalaires. On pose pour $n \geq 0$*

$$c_n := \frac{a_n - ib_n}{2}, c_{-n} := \frac{a_n + ib_n}{2} \text{ et } c_0 = a_0.$$

Alors

- (i) Pour tout $N \geq 0$, $a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$.
- (ii) Les séries $\sum (|a_n| + |b_n|)$ et $\sum (|c_{-n}| + |c_n|)$ sont de même nature.

DÉMONSTRATION : La première assertion découle des formules d'Euler

$$\cos(nx) = (e^{inx} + e^{-inx})/2 \quad \text{et} \quad \sin(nx) = (e^{inx} - e^{-inx})/2i.$$

La seconde se déduit des inégalités évidentes suivantes, pour $n \geq 1$

$$|c_{-n}| + |c_n| \leq |a_n| + |b_n| \leq 2(|c_{-n}| + |c_n|).$$

Cette seconde inégalité vient de l'observation que $a_n = c_{-n} + c_n$ et $ib_n = c_n - c_{-n}$. □

Proposition 1.2.4 *Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une famille de scalaires telle que la série trigonométrique associée converge en tout point vers une fonction f . Alors on a les propriétés suivantes.*

- (i) f est 2π -périodique.
- (ii) Si pour un entier $k \geq 0$, la série $\sum n^k (|c_{-n}| + |c_n|)$ est convergente, alors f est de classe C^k et pour $1 \leq j \leq k$, de dérivée d'ordre j

$$f^{(j)}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (in)^j c_n e^{inx}.$$

- (iii) Si les suites $(c_n)_{n \geq 0}$ et $(c_{-n})_{n \geq 1}$ sont positives décroissantes et convergent vers zéro, alors la convergence de la série trigonométrique est uniforme sur tout intervalle de la forme $(\epsilon + 2\pi k, 2\pi(k+1) - \epsilon)$ avec $0 < \epsilon < \pi$. En particulier, f est continue sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

DÉMONSTRATION : L'assertion (i) est évidente puisque chaque fonction $x \mapsto e^{inx}$ est 2π -périodique.

L'assertion (ii) découle du théorème de dérivation sous le signe somme, vu en premier cycle. En effet la série

$$\sum ((in)^k c_n e^{inx} + (-in)^k c_{-n} e^{-inx})$$

converge normalement et donc uniformément.

Enfin, l'assertion (iii) est une application de la transformation d'Abel. En effet, posons pour $N \geq 1$

$$A_N(x) = \sum_{n=1}^N e^{inx} = \frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)} e^{i(N+1)x/2}.$$

On remarque que pour $x \in]2k\pi + \epsilon, 2(k+1)\pi - \epsilon[$

$$|A_N(x)| \leq \frac{1}{\sin(\epsilon/2)}.$$

En outre, pour $1 < p < q$

$$\begin{aligned} \sum_{n=p}^q c_n e^{inx} &= \sum_{n=p}^q c_n (A_n - A_{n-1})(x) \\ &= \sum_{n=p}^q c_n A_n(x) - \sum_{n=p-1}^{q-1} c_{n+1} A_n(x) \\ &= -c_p A_{p-1}(x) + c_q A_q(x) + \sum_{n=p}^{q-1} (c_n - c_{n+1}) A_n(x). \end{aligned}$$

Et de même

$$\sum_{n=p}^q c_{-n} e^{-inx} = -c_{-p} A_{p-1}(-x) + c_{-q} A_q(-x) + \sum_{n=p}^{q-1} (c_{-n} - c_{-n-1}) A_n(-x).$$

D'où pour $x \in]2k\pi + \epsilon, 2(k+1)\pi - \epsilon[$

$$\left| \sum_{p \leq |n| \leq q} c_n e^{inx} \right| \leq 2 \frac{c_p + c_{-p}}{\sin(\epsilon/2)}$$

et la série $\sum (c_{-n} e^{-inx} + c_n e^{inx})$ converge uniformément sur l'intervalle susnommé. \square

Remarque 1.2.5 On a bien sûr un énoncé analogue pour la présentation des séries trigonométriques en termes de sinus et cosinus, fort utile en pratique. On laisse en exercice qu'il suffit alors, pour (ii), que la série $\sum n^k (|a_n| + |b_n|)$ soit convergente et, pour (iii), que les suites (a_n) et (b_n) soient positives décroissantes et convergent vers zéro.

1.3 Décomposition en série de Fourier

Nous nous intéressons à présent au problème inverse de la question 1.2.2. Connaissant la fonction f , on souhaite en déduire des propriétés sur les coefficients de la série trigonométrique dont f serait la limite.

Question 1.3.1 Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction périodique de période 2π , existe-t-il une famille $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ telle que $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$?

Ici encore, le problème est délicat en général. Dans ce paragraphe, nous introduisons un bon candidat pour les coefficients c_n et nous en donnons quelques propriétés élémentaires.

Rappelons qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est dite **localement intégrable** si les intégrales $\int_a^b |f(x)| dx$ convergent pour tous nombres réels $a < b$.

Elle est dite de **carré localement intégrable** si les intégrales $\int_a^b |f(x)|^2 dx$ convergent pour tous $a < b$.

Exemple 1.3.2

1. Les fonctions localement bornées et limites simples de fonctions continues,
2. les fonction localement intégrables au sens de Riemann,
3. les fonctions continues par morceaux,

sont toutes des fonctions localement intégrables et de carrés localement intégrables.

Notation 1.3.3 On notera $L^1(S^1)$ l'espace des fonctions localement intégrables, périodiques de période 2π , et $L^2(S^1)$ l'espace des fonctions de carrés localement intégrables, périodiques de période 2π .

Définition 1.3.4

1) Pour $f, g \in L^2(S^1)$, on définit le produit et la semi-norme

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} g(x) dx \quad ; \quad \|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

2) Pour $f \in L^1(S^1)$, notons $\|f\|_1 := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)| dx$.

3) On définit, pour $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$, la fonction $e_n(x) = e^{inx}$.

Proposition 1.3.5 Pour $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$, $\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

DÉMONSTRATION : Le calcul est immédiat.

$$\begin{aligned} \text{Pour } n = m, \quad & \int_0^{2\pi} 1 \, dx = 2\pi. \\ \text{Pour } n \neq m, \quad & \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x} \, dx = \left[\frac{e^{i(m-n)x}}{m-n} \right]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

□

Ainsi, pour un polynôme trigonométrique de la forme

$$f(x) = \sum_{|n| \leq N} c_n e_n(x),$$

on retrouve les coefficients c_n à partir des valeurs de f sur $[0, 2\pi]$. En effet, on a par linéarité

$$\langle e_n, f \rangle = \sum_{|m| \leq N} c_m \langle e_n, e_m \rangle = \sum_{|m| \leq N} c_m \delta_{n,m} = c_n.$$

Notons plus généralement que si la série $\sum(|c_n| + |c_{-n}|)$ est convergente alors $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n(x)$ converge uniformément sur \mathbb{R} et par le théorème d'inversion des signes somme et intégrale, vu en premier cycle, le calcul ci-dessus reste valide. On a encore $c_n = \langle e_n, f \rangle$.

Définition 1.3.6 La **série de Fourier** d'une fonction $f \in L^1(S^1)$ est la série de fonctions, convergente ou non,

$$SF(f) = c_0 + \sum_{n \geq 1} (c_n e_n + c_n e_{-n}),$$

avec pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n := \langle e_n, f \rangle$.

On notera $C(f)$ la **fonction amplitude** définie par $C(f)(n) = \langle e_n, f \rangle$. Les nombres $c_n := C(f)(n)$, indexés par \mathbb{Z} , sont appelés **les coefficients de Fourier de f**.

Il est pratique de connaître également le développement d'une fonction en série de cosinus et sinus obtenu par la proposition 1.2.3, qui se présente comme suit.

$$SF(f)(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$\begin{aligned} \text{avec } a_0 = c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx \quad ; \quad a_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) \, dx \\ \text{et } b_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) \, dx. \end{aligned}$$

Ces relations s'obtiennent en utilisant les formules de la proposition 1.2.3 exprimant a_n et b_n en fonction de c_n où s'induisent directement en démontrant les relations d'orthogonalité pour $(n, m) \in \mathbb{N}^2$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = \delta_{n,m}$$

et $\int_0^{2\pi} \cos(nx) \sin(mx) dx = 0.$

Ce point de vue est particulièrement adapté au cas où f présente des symétries. On déduit en effet immédiatement des relations ci-dessus la propriété suivante.

Proposition 1.3.7 *Soit $f \in L^1(S^1)$.*

1. *Si f est paire alors tous sa série une série de cosinus : tous les b_n sont nuls et $c_n = c_{-n}$.*
2. *Si f est impaire, sa série de Fourier est une série de sinus : tous les coefficients a_n sont nuls et $c_n = -c_{-n}$.*
3. *Si f est périodique de période $2\pi/N$, alors seuls ses coefficients d'indices multiples de N sont éventuellement non nuls.*

DÉMONSTRATION : Nous démontrons seulement la dernière affirmation, qui ne résulte pas directement de la définition. Si n n'est pas multiple de T , alors

$$c_n = \int_0^{2\pi} f(x+T)e^{-inx} dx = \int_T^{T+2\pi} f(x)e^{-inx+inT} dx = e^{inT} c_n$$

et puisque $e^{inT} \neq 1$, $c_n = 0$. □

Proposition 1.3.8

Si $f \in L^1(S^1)$, alors $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} C(f)(n) = 0$ et $\max_{n \in \mathbb{Z}} |C(f)(n)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}$.

DÉMONSTRATION : L'existence et le calcul de la limite de $C(f)(n)$ découlent du lemme de Riemann-Lebesgue qui suit. D'autre part, appliquons l'inégalité du module à $f(x)e^{-inx}$. On a

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx} dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)e^{-inx}| dx \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)| dx = \|f\|_1.$$

La borne supérieure de la famille $|C(f)(n)|$ est donc majorée par $\|f\|_1$. Comme cette famille converge vers zéro quand $|n|$ tend vers l'infini. Cette borne est atteinte : la borne supérieure est un maximum. □

Lemme 1.3.9 (Riemann-Lebesgue) *Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes intégrable sur un segment $[a, b]$ avec $a < b$. Alors*

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)e^{i\lambda x} dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(\lambda x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(\lambda x) dx = 0.$$

DÉMONSTRATION : Nous démontrons que la première limite car les deux dernières s'en déduisent immédiatement par les formules d'Euler.

Commençons par supposer que f est constante. Alors pour $\lambda \neq 0$

$$\left| \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx \right| = \left| \left[\frac{f e^{i\lambda x}}{i\lambda} \right]_a^b \right| \leq 2|f|/|\lambda|$$

tend bien vers zéro quand $|\lambda|$ tend vers l'infini.

Supposons maintenant que f est une fonction intégrable quelconque. Par définition, f peut être approchée en moyenne par une fonction en escalier :

$$\sum_{k=1}^N \int_{a_{k-1}}^{a_k} |f(x) - f_k| dx \leq \epsilon$$

pour $\epsilon > 0$ arbitrairement petit, pour une subdivision $a = a_0 < a_1 < \dots < a_N = b$ de l'intervalle $[a, b]$ et des scalaires $f_k \in \mathbb{C}$ bien choisis. On en déduit les inégalités suivantes.

$$\left| \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx \right| \leq \epsilon + \left| \sum_{k=1}^N \int_{a_{k-1}}^{a_k} f_k e^{i\lambda x} dx \right| \leq \epsilon + \sum_{k=1}^N \left| \int_{a_{k-1}}^{a_k} f_k e^{i\lambda x} dx \right|$$

et comme chaque terme $\int_{a_{k-1}}^{a_k} f_k e^{i\lambda x} dx$ converge vers zéro, il existe une constante A telle que

$$\left| \int_{a_{k-1}}^{a_k} f_k e^{i\lambda x} dx \right| \leq \epsilon/N$$

pour tout $|\lambda| \geq A$ et pour $1 \leq k \leq N$. Ainsi on a

$$|\lambda| > A \Rightarrow \left| \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx \right| \leq 2\epsilon.$$

□

Proposition 1.3.10 *Si $f \in L^2(S^1)$, alors $f \in L^1(S^1)$ et $\|f\|_1 \leq \|f\|_2$. De plus,*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |C(f)(n)|^2 \leq \|f\|_2^2.$$

DÉMONSTRATION : La première assertion est un corollaire de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. En effet comme la fonction f et la fonction constante $g := 1$ sont de carrés intégrables sur $[0, 2\pi]$, le produit $fg = f$ est intégrable et

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)| dx &\leq \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} 1^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} = \|f\|_2. \end{aligned}$$

La seconde assertion est connue dans la littérature sous le nom **d'inégalité de Bessel**. Dans l'espace Hilbertien $L^2(S^1)$, notons f_n la projection orthogonale de f dans le sous-espace engendré par les fonctions e_k pour $|k| \leq n$. Explicitement, on a

$$f_n = \sum_{k=-n}^n C(f)(k) e_k.$$

Alors pour $-n \leq k \leq n$, on a

$$\begin{aligned} \langle e_k, f - f_n \rangle &= C(f)(k) - \sum_{j=-n}^n \langle e_j, f \rangle \langle e_k, e_j \rangle \\ &= C(f)(k) - \sum_{j=-n}^n \langle e_j, f \rangle \delta_{k,j} \\ &= C(f)(k) - \langle e_k, f \rangle = 0. \end{aligned}$$

D'où, par linéarité, on a $\langle f_n, f - f_n \rangle = 0$. Ainsi

$$\|f_n\|_2^2 \leq \|f_n\|_2^2 + \|f - f_n\|_2^2 = \|f\|_2^2.$$

Cette dernière inégalité, conjuguée à l'orthogonalité des fonctions e_k , montre que

$$\sum_{k=-n}^n |C(f)(k)|^2 \leq \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx.$$

L'inégalité de Bessel s'en déduit en faisant tendre n vers l'infini. \square

Proposition 1.3.11 *Soient $f \in L^1(S^1)$ et $k \geq 1$ un entier. On suppose que f est C^k par morceaux et C^{k-1} . Alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a*

$$C(f^{(k)})(n) = (in)^k C(f)(n) \quad \text{et} \quad |C(f)(n)| \leq \frac{\|f^{(k)}\|_1}{|n|^k}.$$

DÉMONSTRATION : Pour $k = 1$, c'est-à-dire pour f de classe C^1 par morceaux et continue, la fonction dérivée f' , définie sur $[0, 2\pi] \setminus \{a_p \mid 0 \leq p \leq N\}$ pour une subdivision adaptée $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_N = 2\pi$, se prolonge par continuité sur chacun des intervalles $[a_p, a_{p+1}]$ en une fonction C^1 .

Par une intégration par partie, on a

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f'(t) e^{-int} dt &= \sum_{p=0}^{N-1} [f(t) e^{-int}]_{a_p}^{a_{p+1}} + in \int_{a_p}^{a_{p+1}} f(t) e^{-int} dt \\ &= f(0) - f(2\pi) + in \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt = 2\pi in C(f)(n). \end{aligned}$$

On en déduit que $C(f') = in C(f)(n)$. Puis, à l'aide de l'inégalité de la proposition 1.3.8, on a

$$|C(f)(n)| \leq |C(f')(n)|/|n| \leq \|f'\|_1/|n|,$$

ce qui démontre la proposition pour $k = 1$.

Pour $k > 0$ quelconque, supposons la proposition vraie pour toute fonction de classe \mathcal{C}^k par morceaux et \mathcal{C}^{k-1} . Alors si f est \mathcal{C}^{k+1} par morceaux et \mathcal{C}^k , on peut appliquer notre hypothèse à la fonction dérivée f' . On a

$$C(f^{(k+1)})(n) = C(f'^{(k)})(n) = (in)^k C(f')(n).$$

D'autre part, $k \geq 1$ donc f est de classe \mathcal{C}^1 et $C(f')(n) = inC(f)(n)$. On en déduit que $C(f^{(k+1)})(n) = (in)^{k+1}C(f)(n)$, puis que

$$|C(f)(n)| \leq |C(f^{(k+1)})(n)|/|n|^{k+1} \leq \|f^{(k+1)}\|_1/|n|^{k+1},$$

ce qui démontre par récurrence sur $k \geq 1$ la proposition pour k quelconque. \square

Remarque 1.3.12 Dans notre présentation, toutes les fonctions périodiques considérées ont pour période 2π . Bien sûr, on peut développer une théorie de Fourier analogue pour toute fonction périodique dont une période est un réel $T > 0$ quelconque.

En effet, si f admet T pour période, alors 2π est une période de la fonction définie par $g(x) := f(xT/2\pi)$. On peut lui appliquer les résultats de ce chapitre. On retiendra les formules pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ localement intégrable, périodique de période T .

$$SF(f)(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n x / T} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) \right)$$

avec $c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-2\pi i n x / T} dx$,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx.$$

1.4 Les théorèmes d'inversion : la synthèse spectrale

Du point de vue des mathématiques, il s'agit dans ce paragraphe de répondre à la question 1.3.1. Pour une fonction localement intégrable périodique de période 2π , le seul candidat raisonnable dont nous disposons pour l'écrire sous la forme d'une série trigonométrique est sa série de Fourier.

Du point de vue de la physique, la décomposition en série de Fourier peut s'interpréter comme la donnée d'une amplitude complexe c_n , pour chaque mode *harmonique* d'ordre n du signal. C'est *l'analyse spectrale* du signal, indexé par le groupe \mathbb{Z} .

Inversement, étant donnée une distribution d'amplitudes c_n , pour tout $n \in \mathbb{Z}$, peut-on trouver un signal dont la suite c_n est la décomposition? Quand cela est possible, on dit que l'opération qui permet de reconstruire le signal à partir de sa décomposition est *l'inversion* de la décomposition de Fourier ou encore la *synthèse spectrale* de la distribution des harmoniques.

1. Si la fonction est \mathcal{C}^∞ , alors la situation est idéale car sa série de Fourier converge normalement vers la fonction initiale, ainsi que toutes ses dérivées.
2. Si la fonction est continue et \mathcal{C}^1 par morceaux, sa série de Fourier converge normalement vers la fonction mais on ne sait rien sur la convergence de la dérivée.
3. Si la fonction est \mathcal{C}^1 par morceaux, sa série de Fourier converge ponctuellement vers la fonction initiale en tout point où cette dernière est continue, et l'on sait vers quoi converge la série aux points de discontinuité, bien que la convergence souffre de ne pas être uniforme au voisinage de ces derniers points.
4. Si la fonction est seulement continue, sa série de Fourier converge vers la fonction initiale en tout point où la série converge.

Notons enfin que ces réponses n'épuisent pas la question 1.3.1. Par exemple, il existe des séries trigonométriques convergentes en tout point mais qui ne sont la série de Fourier d'aucune fonction. Nous ne nous demanderons pas non plus si, quand elle existe, la décomposition d'une fonction périodique en série trigonométrique est unique.

Le théorème de Dirichlet

Ce théorème donne une condition suffisante pour que la série de Fourier d'une fonction converge ponctuellement vers celle-ci. On peut examiner dans un deuxième temps si la convergence est uniforme, par exemple en utilisant la proposition 1.2.4. On verra au paragraphe suivant une autre condition simple qui garantit l'uniformité de la convergence.

Notation 1.4.1 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{R}$. Si f admet une limite en x par valeurs supérieures, on note

$$f(x+0) = \lim_{t \rightarrow x, t > x} f(t), \quad f'_d(x+0) := \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{f(x+h) - f(x+0)}{h}.$$

Si f admet une limite en x par valeurs inférieures, on note

$$f(x-0) = \lim_{t \rightarrow x, t < x} f(t), \quad f'_g(x-0) := \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{f(x-0) - f(x-h)}{h}..$$

Théorème 1.4.2 (Dirichlet) Soient $f \in L^1(S^1)$ et $x \in \mathbb{R}$. On suppose que les limites $f(x+0)$, $f(x-0)$, $f'_d(x+0)$ et $f'_g(x-0)$ existent.

Alors la série de Fourier de f converge au point x et

$$SF(f)(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n \langle e_k, f \rangle e^{ikx} = \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)).$$

DÉMONSTRATION : Pour $n \geq 0$, on considère la fonction

$$D_n(t) := \sum_{k=-n}^n e_k(t) = \begin{cases} 2n+1 & \text{si } t \in 2\pi\mathbb{Z}, \\ \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit le produit (appelé produit de convolution)

$$\frac{1}{2\pi}(D_n \star f)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_n(x-t)f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{ikx} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt} dt.$$

Ainsi on reconnaît la somme partielle de la série de Fourier de f

$$\frac{1}{2\pi}D_n \star f = \sum_{k=-n}^n \langle e_k, f \rangle e_k.$$

D'autre part, avec le changement de variable $u = x - t$ et puisque la fonction $u \mapsto D_n(u)f(x-u)$ est périodique de période 2π ,

$$\int_0^{2\pi} D_n(x-t)f(t) dt = \int_{x-2\pi}^x D_n(u)f(x-u) du = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)f(x-u) du.$$

Seule la partie paire de la fonction $D_n(u)f(x-u)$ contribue à cette intégrale.

$$D_n \star f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(u) \frac{f(x-u) + f(x+u)}{2} du = \int_0^{\pi} D_n(u)(f(x-u) + f(x+u)) du.$$

En outre $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u) du = 2\pi$. Cela entraîne que

$$\frac{1}{2\pi}D_n \star f(x) - \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} g(u) \sin((n+\frac{1}{2})u) du$$

avec

$$g(u) = \frac{f(x+u) - f(x+0) + f(x-u) - f(x-0)}{2 \sin(\frac{u}{2})}.$$

Cette fonction, définie a priori sur $(0, \pi]$, s'étend par continuité en une fonction intégrable sur $[0, \pi]$ et l'on conclut avec le lemme de Riemann-Lebesgue. \square

Les fonctions de classe \mathcal{C}^k

Proposition 1.4.3 Soit $k \geq 1$.

1) On suppose que f est une fonction périodique de période 2π de classe \mathcal{C}^k par morceaux et \mathcal{C}^{k-1} . Alors il existe une constante M telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad |\langle e_n, f \rangle| |n|^k \leq M.$$

De plus, $SF(f)$ converge normalement vers f sur \mathbb{R} .

2) Inversement, pour une famille de scalaires $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et une constante $M > 0$, on suppose que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad |c_n| |n|^{k+1} \leq M,$$

Alors $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ est de classe \mathcal{C}^{k-1} et $c_n = \langle e_n, f \rangle$.

DÉMONSTRATION : 1) Si f est de classe au moins \mathcal{C}^1 , le théorème de Dirichlet montre que la série de Fourier $SF(f)$ converge en tout point vers f . La proposition 1.3.11 montre que $|C(f)(n)| \leq \|f^{(k)}\|_1 / |n|^k$. Il suffit donc de choisir $M := \|f^{(k)}\|_1$. Enfin, on a les inégalités suivantes.

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |C(f)(n)| &= |C(f)(0)| + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{|C(f^{(k)})(n)|}{|n|^k} \\ &\leq |C(f)(0)| + \left(\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{|n|^k} \right)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |C(f^{(k)})|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq |C(f)(0)| + 2 \|f^{(k)}\|_2 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

L'égalité de la première ligne vient de la proposition 1.3.11. La deuxième ligne découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. La troisième ligne vient de l'inégalité de Bessel de la proposition 1.3.10, appliquée à la fonction $f^{(k)}$.

2) Inversement, si $|c_n| |n|^{k+1} \leq M$, alors pour $n \neq 0$, on a

$$|c_n| \leq |n|^{k-1} |c_n| \leq M / |n|^2.$$

On en déduit la série $c_0 + \sum (c_{n+1} e_{n+1} + c_{-n-1} e_{-n-1})$ converge normalement sur \mathbb{R} ainsi que les séries de ses dérivées terme à terme, jusqu'à l'ordre $k-1$. La fonction limite f est bien définie et de classe \mathcal{C}^{k-1} . Comme la convergence de $SF(f)$ est uniforme, il résulte d'un théorème d'intervention des limites, vu en premier cycle, que le produit scalaire et le signe somme peuvent être échangés.

$$\langle e_n, f \rangle = \langle e_n, \sum_{p \in \mathbb{Z}} c_p e_p \rangle = \sum_{p \in \mathbb{Z}} c_p \langle e_n, e_p \rangle = c_n.$$

Il s'en suit que $SF(f) = f$, ce qui termine la démonstration de la proposition. \square

Corollaire 1.4.4 *L'espace des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ périodiques de période 2π est en bijection avec l'espace*

$$\left\{ c : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \mid \forall k \geq 0, \exists M_k > 0 \text{ tel que } |c(n)| |n|^k \leq M_k \right\}$$

par l'application $A : f \mapsto (\langle e_n, f \rangle)_{n \in \mathbb{Z}}$ (l'analyse spectrale) et de réciproque $S : c \mapsto f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c(n) e_n$ (la synthèse spectrale).

Remarque 1.4.5 En fait, l'application $A : f \mapsto (\langle e_n, f \rangle)_{n \in \mathbb{Z}}$ est définie sur l'espace des fonction localement intégrable, périodiques, de période 2π . Cette application étendue est-elle encore injective ?

Certainement pas puisque si l'on modifie la fonction f en lui ajoutant une constante sur une partie de la forme $x_0 + 2\pi\mathbb{Z}$, ses coefficients de Fourier $\langle e_n, f \rangle$ ne sont pas modifiés.

Elle reste cependant essentiellement injective. En particulier, l'analyse spectrale est injective sur l'espace des fonctions continues (voir le théorème 1.5.7).

Les fonctions continues

Avec des idée similaires à celles contenues dans le théorème de Dirichlet, nous pouvons démontrer le théorème suivant, qui entraîne en particulier qu'en tout point où une fonction est continue, la limite, si elle existe, de sa série de Fourier ne peut être que la valeur que prend la fonction en ce point.

Théorème 1.4.6 (Fejèr) *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux, périodique, de période 2π . Notons*

$$s_n(f) := \sum_{k=-n}^n c_k e_k \quad ; \quad S_n(f) := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n s_n(f),$$

les sommes partielles de sa série de Fourier et les moyennes successives de ces sommes partielles. Alors, les conditions suivantes sont satisfaites.

(i) *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a*

$$|S_n(t)| \leq \max_{u \in \mathbb{R}} |f(u)|.$$

(ii) *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f)(t) = \frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0)).$$

(iii) *De plus, $S_n(f)$ converge uniformément vers f sur tout intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ne contenant pas de point discontinuité de la fonction f .*

DÉMONSTRATION : Avec les notations de la démonstration du théorème de Dirichlet, on a

$$s_n = \frac{1}{2\pi} D_n \star f; \quad S_n = F_n \star f \quad \text{avec} \quad F_n = \frac{1}{2\pi(n+1)} \sum_{k=0}^n D_k.$$

Calculons explicitement le “noyau de Fejèr” F_n . On a successivement

$$\begin{aligned}
2\pi(n+1)F_n(x) &= \sum_{k=0}^n D_k(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\sin((k+1/2)x)}{\sin(x/2)} \\
&= \frac{1}{\sin(x/2)} \Im m \left(\sum_{k=0}^n e^{i(k+1/2)x} \right) \\
&= \frac{1}{\sin(x/2)} \Im m \left(e^{ix/2} \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \right) \\
&= \frac{1}{\sin(x/2)} \Im m \left(\frac{e^{i\frac{n+1}{2}x} - e^{-i\frac{n+1}{2}x}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} e^{-i\frac{n+1}{2}x} \right) \\
&= \left(\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)} \right)^2
\end{aligned}$$

Retenons de ce calcul trois propriétés importantes de F_n .

- a) La fonction F_n est positive et paire.
- b) Pour tout $0 < \epsilon < \pi$, sur $[\epsilon, 2\pi - \epsilon]$, la fonction

$$|F_n(u)| \leq \frac{1}{2\pi(n+1)} \frac{1}{\sin^2(\epsilon/2)}$$

converge uniformément vers zéro.

$$c) \int_0^{2\pi} F_n(u) du = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \int_0^{2\pi} \frac{D_k(u)}{2\pi} du = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n 1 = 1.$$

Le point a) montre en particulier que

$$\begin{aligned}
|S_n(f)(x_0)| &= |(F_n \star f)(x_0)| = \left| \int_0^{2\pi} F_n(t) f(x_0 - t) dt \right| \leq \int_0^{2\pi} F_n(t) |f(x_0 - t)| dt \\
&\leq \max_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| \int_0^{2\pi} F_n(t) dt = \max_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|,
\end{aligned}$$

ce qui démontre (i).

La suite est calquée sur la démonstration du théorème de Dirichlet. On a

$$\begin{aligned}
|S_n(f)(x_0) - g(x_0)| &= 2 \left| \int_0^\pi F_n(t) \left(\frac{f(x_0+t) + f(x_0-t)}{2} - g(x_0) \right) dt \right| \\
&\leq 2 \int_0^\pi F_n(t) \left| \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t)}{2} - g(x_0) \right| dt \\
&\leq \max_{|t| \leq \alpha} \left| \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t)}{2} - g(x_0) \right| + \frac{2 \max_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|}{(n+1) \sin^2(\alpha/2)},
\end{aligned}$$

avec $g(x) := \frac{1}{2}(g(x+0) + g(x-0))$, et cela pour tout $\alpha > 0$. Pour $\epsilon > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\max_{|t| \leq \alpha} \left| \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t)}{2} - \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2} \right| \leq \epsilon/2.$$

Pour cet α fixé, il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, on a

$$\frac{2 \max_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|}{(n+1) \sin^2(\alpha/2)} \leq \epsilon/2.$$

On en déduit que pour $n \geq N$, on a $|S_n(f)(x_0) - \frac{1}{2}(f(x_0+0) + f(x_0-0))| \leq \epsilon$, ce qui démontre (ii). Le point (iii) découle de la continuité uniforme de g sur tout intervalle $[a, b]$ sur lequel g est continue et je laisse les détails en exercice. \square

Corollaire 1.4.7 *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue périodique de période 2π . Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Si la série de Fourier*

$$SF(f)(x_0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx_0} \quad \text{avec} \quad c_n := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt,$$

converge, alors $SF(f)(x_0) = f(x_0)$.

DÉMONSTRATION : C'est une conséquence immédiate du lemme de Cesàro,

si une série numérique $\sum a_n$, de sommes partielles $s_k := \sum_{p=0}^k a_p$, converge, alors

$$\text{la suite } S_n := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n s_k \text{ converge vers la même limite ;}$$

dont on trouvera une démonstration dans tout bon livre d'analyse de premier cycle. Voir par exemple [Whittaker], chapitre 8, paragraphe 8.43. \square

1.5 L'identité de Parseval

Commençons par donner une interprétation "concrète" de l'identité de Parseval. Si un signal est la superposition d'oscillateurs harmoniques de pulsations toutes multiples d'une pulsation fondamentale, alors l'énergie du signal (l'intégrale de droite) est égale à la somme des énergies de chacun des oscillateurs (la somme de gauche). Il n'en faut pas plus pour prêter à ces oscillateurs une "réalité physique". En fait, il existe dans bien des cas des appareils simples (des résonateurs de fréquence donnée) capables en pratique d'isoler chacun de ces oscillateurs.

Théorème 1.5.1 (Parseval) *Soit $f \in L^2(S^1)$. Alors les séries $\sum |\langle e_n, f \rangle|^2$ et $\sum |\langle e_{-n}, f \rangle|^2$ sont convergentes et*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle e_n, f \rangle|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx.$$

On démontre d'abord le résultat suivant.

Lemme 1.5.2 Soit $f \in L^1(S^1)$ et soit $\epsilon > 0$.

Alors il existe une fonction continue $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sur \mathbb{R} , \mathcal{C}^1 par morceaux et périodique de période 2π telle que $\|f - g\|_1 \leq \epsilon$.

Si $f \in L^2(S^1)$, on peut de plus exiger que $\|f - g\|_2 \leq \epsilon$.

Enfin, dans les deux cas, on peut choisir g de sorte que $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

DÉMONSTRATION : Pour simplifier, nous démontrons ce lemme sous l'hypothèse supplémentaire que f est bornée, c'est-à-dire qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $|f(x)| \leq M$ sur $[0, 2\pi]$. Quitte à raisonner successivement sur les parties réelle et imaginaire pure, on peut supposer que la fonction f est réelle. Par hypothèse, f est intégrable et peut donc être approchée par une fonction en escalier. Il existe une fonction θ en escalier sur $[0, 2\pi]$ telle que

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - \theta(x)| dx \leq \eta,$$

où $\eta > 0$ est arbitrairement petit.

On va maintenant approcher θ par une fonction g avec les propriétés annoncées. Soit $a_0 = 0 < a_1 < \dots < a_N = 2\pi$ une subdivision de l'intervalle $[0, 2\pi]$ adaptée à θ . Quitte à poser

$$\begin{cases} \theta^*(x) := \eta & \text{si } \theta(x) = 0, \\ \theta^*(x) := \max(-M, \min(\theta(x), M)) & \text{sinon,} \end{cases}$$

on peut supposer que $0 < |\theta(x)| \leq M$ pour tout x . On choisit α assez petit de sorte que

$$2\alpha < \min_{1 \leq k \leq N} (a_k - a_{k-1}).$$

On définit les nombres suivantes.

$$\begin{aligned} \theta_N = \eta; \quad \text{pour } 0 \leq k \leq N-1, \quad \theta_k &:= \theta\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right) \\ \epsilon_k &:= \theta_k / |\theta_k| \in \{\pm 1\}, \quad \delta_k = \frac{|\epsilon_{k+1} - \epsilon_k|}{2} \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

On suppose que η est suffisamment petit pour que $\eta < |\theta_k|$ pour tout $1 \leq k \leq N$. On définit une fonction g_α continue et affine par morceaux sur $[0, 2\pi]$ par les conditions suivantes pour tout $0 \leq k \leq N-1$.

$$\begin{cases} g_\alpha(a_k + t\alpha) = \left(\frac{1-t}{2}|\theta_k| + \frac{1+t}{2}|\theta_{k+1}|\right) \epsilon_k e^{i\pi\delta_k(\frac{1+t}{2})t} & \text{pour } |t| \leq 1, \\ g_\alpha(x) = \theta_k & \text{sur } [a_k + \alpha, a_{k+1} - \alpha]. \end{cases}$$

Alors g_α ne s'annule pas, $|g_\alpha|$ est majorée par M et $\int_0^{2\pi} |\theta(x) - g_\alpha(x)| dx \leq 4\alpha NM$. On en déduit que

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - g_\alpha(x)| dx \leq \eta + 4MN\alpha \quad ; \quad \int_0^{2\pi} |f(x) - g_\alpha(x)|^2 dx \leq 2M(\eta + 4MN\alpha).$$

Le lemme s'en suit en choisissant convenablement les constantes α et η , puis en posant $g(x + 2\pi n) = g_\alpha(x)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in [0, 2\pi]$. \square

DÉMONSTRATION DE L'IDENTITÉ DE PARSEVAL : On note $f_n = \frac{1}{2\pi} D_n \star f$ les sommes partielles de la série de Fourier de f . Il s'agit donc de montrer que $\|f_n\|_2^2$ converge vers $\|f\|_2^2$, ou encore que $\|f - f_n\|_2$ converge vers zéro. Soit $\epsilon > 0$. D'après le lemme 1.5.2, il existe une fonction g continue, \mathcal{C}^1 par morceaux et 2π périodique telle que $\|f - g\|_2 \leq \epsilon$. Soit $g_n = \frac{1}{2\pi} D_n \star g$ les sommes partielles de sa série de Fourier. D'après la proposition 1.4.3, g_n converge uniformément vers g . Il existe donc un rang N au delà duquel $\|g - g_n\|_2 \leq \epsilon$. Enfin, l'inégalité de Bessel appliquée à $f - g$ donne que $\|f_n - g_n\|_2 \leq \|f - g\|_2$. On en déduit l'estimation suivante pour $n \geq N$.

$$\|f - f_n\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - g_n\|_2 + \|g_n - f_n\|_2 \leq 2\|f - g\|_2 + \|g - g_n\|_2 \leq 3\epsilon.$$

\square

Remarque 1.5.3 La proposition 1.1.2 qui affirme l'existence d'une solution à l'équation de la chaleur dès que la température initiale est une fonction \mathcal{C}^1 de l'abscisse est maintenant claire. Connaissant f sur $[0, \pi]$ avec $f(0) = f(\pi) = 0$, on étend f d'abord sur $[-\pi, \pi]$ en posant $f(-x) = -f(x)$, puis sur tout \mathbb{R} en posant $f(x + 2k\pi) = f(x)$ pour $k \in \mathbb{Z}$. La série de Fourier de f converge bien normalement vers f d'après la proposition 1.4.3. Puisque f est impaire, seuls les coefficients b_n de la série en sinus sont susceptibles de ne pas être nuls et la fonction

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx) e^{-n^2 t}$$

est bien solution du problème.

Nous allons maintenant déduire plusieurs conséquences remarquables de l'identité de Parseval.

Corollaire 1.5.4 Si $f, g \in L^2(S^1)$, alors la famille $c_n(f)c_n(g)$ est sommable et

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{c_n(f)} c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} g(x) dx.$$

DÉMONSTRATION : La série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{c_n(f)} c_n(g)$ converge absolument car

$$|\overline{c_n(f)} c_n(g)| \leq 1/2(|c_n(f)|^2 + |c_n(g)|^2).$$

Montrons maintenant l'identité de l'énoncé.

$$\begin{aligned} \Re \langle f, g \rangle &= \frac{1}{2} (\|f + g\|_2^2 - \|f\|_2^2 - \|g\|_2^2) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (|c_n(f) + c_n(g)|^2 - |c_n(f)|^2 - |c_n(g)|^2) \\ &= \Re \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{c_n(f)} c_n(g) \right), \end{aligned}$$

ce qui démontre la partie réelle de l'égalité annoncée.

Pour la partie imaginaire pure, on applique l'égalité que nous venons d'établir aux fonctions if et g . On a en effet

$$\begin{aligned} \Re \langle if, g \rangle &= \Re \langle -i \langle f, g \rangle \rangle = \Im \langle f, g \rangle \\ \text{et } \Re(\overline{c_n(if)} c_n(g)) &= \Re(\overline{ic_n(f)} c_n(g)) = \Re(-i \overline{c_n(f)} c_n(g)) = \Im(\overline{c_n(f)} c_n(g)), \end{aligned}$$

ce qui établit la partie imaginaire pure de l'identité annoncée. \square

Corollaire 1.5.5 Soient $f, g \in L^2(S^1)$. On peut alors définir les deux produits suivants, qui sont deux fonction périodiques de période 2π .

1. La fonction continue $f \star g$ définie par

$$f \star g(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(x-t) dt,$$

2. La fonction $fg \in L^1(S^1)$ définie par $fg(x) := f(x)g(x)$.

De plus, on a les estimations suivantes.

$$\max |f \star g| \leq \|f\|_2 \|g\|_2 \quad ; \quad \|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Enfin, on a

$$c_n(f \star g) = c_n(f) c_n(g) \quad ; \quad c_n(fg) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) c_{n-k}(g).$$

DÉMONSTRATION : 1) Pour x fixé, les fonctions f et $g_x : t \mapsto g(x-t)$ sont de carrés localement intégrables. L'identité de Parseval montre alors que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(x-t) dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{c_n(f)} c_n(g_x),$$

$$\text{avec } c_n(g_x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x-t)e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(u)e^{-in(x-u)} du = c_{-n}(g)e^{-inx}.$$

On en déduit que

$$f \star g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{-n}(f)c_{-n}(g)e^{-inx} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f)c_n(g)e^{inx}.$$

Cette dernière série converge normalement puisque $|c_n(f)c_n(g)| \leq (|c_n(f)|^2 + |c_n(g)|^2)/2$. On en déduit que $f \star g$ est continue et l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que $|f \star g(x)| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$. De plus, puisque la convergence est normale, on a

$$\langle e_n, f \star g \rangle = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(f)c_m(g) \langle e_n, e_m \rangle = c_n(f)c_n(g).$$

2) Si $f, g \in L^2(S^1)$, alors $fg \in L^1(S^1)$ et on a $\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2$. Cela découle immédiatement de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales. Enfin, l'identité de Parseval et son corollaire montrent que

$$\langle e_n, fg \rangle = \langle e_n \bar{g}, f \rangle = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \overline{\langle e_m, e_n \bar{g} \rangle} c_m(f) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \overline{\langle e_{m-n}, \bar{g} \rangle} c_m(f),$$

ce qui établit l'identité annoncée car $\overline{\langle e_{m-n}, \bar{g} \rangle} = \langle e_{n-m}, g \rangle = c_{n-m}(g)$. \square

Remarque 1.5.6 Si $f, g \in L^1(S^1)$ et si g est de plus bornée, alors la formule qui définit plus haut $f \star g(x)$ a encore un sens et définit une fonction continue et périodique. De plus, l'identité $C(f \star g) = C(f)C(g)$ est encore valable et on a l'estimation suivante.

$$\max |f \star g| \leq \|f\|_1 \max |g|.$$

Notons $\mathcal{B}(S^1)$ l'espace des fonctions bornées localement intégrables, périodiques de période 2π et $\mathcal{C}(S^1)$ celles qui sont de plus continues. On a les inclusions

$$\mathcal{C}(S^1) \subset \mathcal{B}(S^1) \subset L^2(S^1) \subset L^1(S^1).$$

On retiendra les résultats sur les produits en écrivant formellement

$$L^2(S^1) \star L^2(S^1) \subset \mathcal{C}(S^1) \quad ; \quad L^1(S^1) \star \mathcal{B}(S^1) \subset \mathcal{C}(S^1).$$

Théorème 1.5.7 (injectivité de la décomposition) Soit $f \in L^1(S^1)$. On suppose que tous les coefficients $c_n(f), n \in \mathbb{Z}$, sont nuls. Alors

$$\int_0^{2\pi} |f(x)| dx = 0.$$

En particulier, Si f est continue, elle s'annule identiquement.

DÉMONSTRATION : Supposons d'abord f dans $L^2(S^1)$. Alors l'égalité de Parseval montre que

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = 0.$$

Comme $\|f\|_1 \leq \|f\|_2$, il vient que $\|f\|_1 = 0$, ce qui est la conclusion souhaitée.

Supposons maintenant $f \in L^1(S^1)$. Alors pour tout $g \in \mathcal{C}(S^1)$, le produit $f \star g$ est continu, donc dans $L^2(S^1)$, et on a $C(f \star g) = C(f)C(g) = 0$. Le cas précédent montre que $\|f \star g\|_1 = 0$. D'autre part, d'après le lemme 1.5.2, il existe une suite

f_n de fonctions continues qui ne s'annulent en aucun point et telle que $\|f - f_n\|_1$ converge vers zéro. Posons $g_n(x) := |f_n(-x)|/f_n(-x)$. Alors $g_n \in \mathcal{C}(S^1)$, on a $\max |g_n| \leq 1$ et

$$|f_n \star g_n(0)| \leq \max_{x \in \mathbb{R}} |(f_n - f) \star g_n(x)| \leq \|f - f_n\|_1$$

converge vers zéro. D'autre part, $|f_n \star g_n(0)| = \|f_n\|_1$ converge vers $\|f\|_1$, ce qui montre que $\|f\|_1 = 0$. \square

1.6 Application aux équations différentielles ordinaires linéaires périodiques

Nous allons voir que la théorie des séries de Fourier permet de donner les solutions exactes des équations de la forme suivante.

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t) = f(t) \quad (1.3)$$

où les coefficients $a_k \in \mathbb{C}$ sont des constantes et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction de périodique, de période 2π , et dont nous allons préciser la régularité tout de suite. On sait que l'équation homogène associée (c'est-à-dire avec $f = 0$ dans (1.3)) a pour ensemble des solutions un espace vectoriel de dimension n , qu'une solution est exactement déterminée par ses $n - 1$ premières dérivées $y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)$, où x_0 est un réel quelconque fixé, et qu'elle est automatiquement de classe \mathcal{C}^∞ . Il suffit donc de connaître une solution de (1.3) pour toutes les connaître. Nous allons nous limiter au cas où l'une des solutions est périodique, de période 2π . Au vu de théorème de Dirichlet, nous supposons aussi que f est de classe \mathcal{C}^0 par morceaux. Si la fonction f a des points de discontinuité, il faut cependant prendre garde que l'équation (1.3) n'a pas à strictement parler de solution sur \mathbb{R} . En effet on peut montrer que la dérivée d'une fonction dérivable, qu'elle soit continue ou non, vérifie toujours la propriété des valeurs intermédiaires (on dit qu'une fonction g a cette propriété si pour tout $a < b$, et pour $c \in [g(a), g(b)]$, il existe $a \leq t \leq b$ tel que $g(t) = c$). Si y était solution de (1.3), le terme de gauche de l'équation devrait donc satisfaire cette propriété, alors que la fonction f ne la satisfait pas. Cependant, pour les applications, il est très pratique de ne pas supposer f partout continue. Il faut donc affaiblir la notion de solution de l'équation (1.3).

Définition 1.6.1 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe continue par morceaux. On dit que $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est solution faible de (1.3) si elle est de classe $\mathcal{C}^{(n-1)}$ et de classe \mathcal{C}^n par morceaux, et si elle satisfait l'équation (1.3) sur tout intervalle sur lequel elle est n fois continûment dérivable.

Supposons qu'une telle solution existe et qu'elle est périodique de période 2π . On peut alors calculer ses coefficients de Fourier et l'on sait que $c_m(y^{(k)}) =$

$(im)^k c_m(y)$. En calculant les coefficients de Fourier des deux termes de l'égalité (1.3), il vient que

$$c_m(y)P(im) = c_m(f), \quad m \in \mathbb{Z},$$

avec $P(X) = X^n + a_1X^{n-1} + \dots + a_n$. En particulier, si $P(im) = 0$, alors nécessairement $c_m(f) = 0$. Le théorème suivant montre que cette condition est aussi suffisante.

Théorème 1.6.2 *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction périodique, de période 2π , de classe continue par morceaux. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ des constantes. Pour que l'équation (1.3) admette une solution faible périodique, de période 2π , il faut et il suffit que $c_m(f) = 0$ pour tous les entiers $m \in \mathbb{Z}$ tels que*

$$P(im) := (im)^n + a_1(im)^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (1.4)$$

De plus, si cette condition est remplie, les solutions faibles périodiques de période 2π sont exactement des fonctions de la forme

$$y(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}, P(im) \neq 0} \frac{c_m(f)}{P(im)} e^{imt} + \sum_{m \in \mathbb{Z}, P(im) = 0} d_m e^{imt},$$

avec $d_m \in \mathbb{C}$ quelconque.

DÉMONSTRATION : Il s'agit de montrer que la condition (1.4) est suffisante. Remarquons tout d'abord que l'on peut supposer que f est nulle en moyenne, c'est-à-dire que $c_0(f) = 0$. En effet, sinon (1.4) entraîne que $a_n \neq 0$ et l'on se ramène au cas où $c_0(f) = 0$ en remplaçant f par $\tilde{f} := f - c_0(f)$ et y par $\tilde{y} := y - c_0(f)/a_n$. Pour lever la difficulté de la non continuité de f . Posons

$$F(t) := C + \int_0^t f(x) dx,$$

où C est une constante choisie en sorte que $c_0(F) = 0$. Alors F est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, continue, et périodique de période 2π . De plus, $imc_m(F) = c_m(f)$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$. Posons

$$d_0 = 0, \quad d_m := \frac{c_m(f)}{imP(im)}, \quad \text{si } mP(im) \neq 0,$$

et choisissons d_m quelconque pour les entiers $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tels que $P(im) = 0$. Notons que P n'a qu'un nombre fini de zéro ; on a donc $P(im) \neq 0$ pour $|m| \geq N$ avec N assez grand. De plus

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |m|^n |d_m| &= \sum_{|m| < N} |m|^n |d_m| + \sum_{|m| \geq N} \frac{|m^{n-1} c_m(f)|}{|P(im)|} \\ &\leq \sum_{|m| < N} |m|^n |d_m| + \left(\sum_{|m| \geq N} \left| \frac{m^{n-1}}{P(im)} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{|m| \geq N} |c_m(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

est une série convergente. La fonction $Y(t) := \sum_{m \in \mathbb{Z}} d_m e^{imt}$ est de classe \mathcal{C}^n et par construction, on a

$$Y^{(n)}(t) + a_1 Y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n Y(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} P(im) d_m e^{imt} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(F) e^{imt} = F(t).$$

La dernière égalité ci-dessus découle du théorème de Dirichlet. Ainsi, la n -ième dérivée de Y est continue et on a $Y^{(n)} = F - a_1 Y^{(n-1)} - \dots - a_n Y$. La fonction de droite de cette égalité est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux (puisque les fonctions $Y^{(k)}$, $k \leq n-1$, sont \mathcal{C}^1 et que F est \mathcal{C}^1 par morceaux). On en déduit que Y est \mathcal{C}^{n+1} par morceaux. En dérivant l'équation précédente, on a donc, sur tout intervalle où Y est \mathcal{C}^{n+1} , c'est-à-dire où f est continue,

$$Y^{(n+1)} + a_1 Y^{(n)} + \dots + a_n Y' = F' = f.$$

La fonction $y := Y'$ est donc solution de (1.3). De plus, puisque $\sum_{m \in \mathbb{Z}} |m|^n |d_m|$ converge, la série qui définit Y est dérivable termes à termes, et la fonction y est de la forme

$$y(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} im d_m e^{imt},$$

ce qui est exactement la forme annoncée. □

Chapitre 2

Transformation de Fourier

Définition 2.0.3 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction localement intégrable. On dit que f est **intégrable** ou **sommable** et l'on écrira $f \in L^1$ si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$ converge.

On dit que f est **de carré intégrable** ou **de carré sommable** et l'on écrira $f \in L^2$ si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt$ converge.

Dans la suite de ce cours, on utilisera les notations usuelles suivantes.

$$\|f\|_{L^1} := \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt; \quad \|f\|_{L^2} := \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt}.$$

Si $J \subset \mathbb{R}$ est un intervalle (ou plus généralement une partie mesurable de \mathbb{R}), on notera $\mathbb{1}_J(x) = 1$ si $x \in J$ et $\mathbb{1}_J(x) = 0$ sinon. Alors $\mathbb{1}_J \in L^1 \cap L^2$ si et seulement si J est borné.

Rappelons l'inégalité de Höder, qui dans ce cas particulier se résume à l'inégalité de Cauchy-Schwarz : Si f et g sont dans L^2 , alors le produit fg est dans L^1 et

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}.$$

Cette inégalité montre en particulier que si f est à support compact, c'est-à-dire, par définition, si f est nulle (presque partout) en dehors d'un segment de la forme $[a, b]$, avec $-\infty < a < b < +\infty$, alors f est dans L^1 dès qu'elle est dans L^2 . En effet, l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que

$$\|f\|_{L^1} = \|f\mathbb{1}_{[a,b]}\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^2} \sqrt{b-a} < +\infty,$$

Enfin, si f est bornée, on notera $\|f\|_0 := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.

2.1 L'intégrale de Fourier, premières propriétés

Définition 2.1.1 Soit $f \in L^1$. Alors la transformée de Fourier de f est la fonction $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par l'intégrale

$$\hat{f}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-iux} dx.$$

Cette fonction est bien définie puisque cette dernière intégrale est absolument convergente. Elle est de plus bornée puisque pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|\hat{f}(u)| \leq \|f\|_{L^1}$.

Proposition 2.1.2 Soit $f \in L^1$. Alors

1. $\|\hat{f}\|_0 \leq \|f\|_{L^1}$.
2. \hat{f} est (uniformément) continue.
3. $\lim_{|u| \rightarrow +\infty} \hat{f}(u) = 0$.

DÉMONSTRATION :

$$1) \text{ On a } |\hat{f}(u)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixu} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)e^{-ixu}| dx = \|f\|_{L^1}.$$

2) Soit $\epsilon > 0$. Soit $A > 0$ tel que $\int_{|u| \geq A} |f(u)| du \leq \epsilon$. Alors

$$\begin{aligned} |\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-ihu} - 1| |f(u)| du \leq 2\epsilon + \int_{-A}^A |e^{-ihu} - 1| |f(u)| du \\ &\leq 2\epsilon + 2|\sin(hA/2)| \|f\|_{L^1} \leq 2\epsilon + |h|A\|f\|_{L^1} \leq 3\epsilon, \end{aligned}$$

pour tout $0 \leq |h| \leq \alpha$ tels que $\alpha A\|f\|_{L^1} \leq \epsilon$.

2) Soit $f_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ une suite de fonctions de classe \mathcal{C}^∞ à support compact telle que $\|f - f_n\|_{L^1} \rightarrow 0$. Alors $|\hat{f}(u) - \hat{f}_n(u)| \leq \|f - f_n\|_{L^1}$, et \hat{f}_n converge uniformément vers \hat{f} . Mais une intégration par partie montre que

$$|\hat{f}_n(u)| = \left| \frac{1}{iu} \widehat{f'_n}(u) \right| \leq \|f'_n\|_{L^1} / |u|.$$

On en déduit que $\lim_{u \rightarrow \pm\infty} \widehat{f}_n(u) = 0$, puis que

$$\lim_{u \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(u) = \lim_{u \rightarrow \pm\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \widehat{f}_n(u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{u \rightarrow \pm\infty} \widehat{f}_n(u) = 0.$$

□

La proposition suivante résulte immédiatement de la définition de la transformée de Fourier et des propriétés élémentaires de l'intégrale. Elle est très utile pour calculer explicitement des transformées de Fourier en les déduisant d'une liste connue de transformées.

Pour simplifier l'énoncé, convenons de noter $f(a \circ b)$, pour toute fonction f et tous réels $a, b \in \mathbb{R}$, la fonction définie par $x \mapsto f(ax+b)$. Le signe "o" indique donc

la place virtuelle de la variable “ x ”. Au brouillon, on pourra avantageusement remplacer la notation “ $f(a \circ + b)$ ” par “ $f(ax + b)$ ”, mais en gardant à l’esprit que cette notation désigne une fonction, et non un nombre réel, valeur de la fonction évaluée au point x . Cette distinction est particulièrement importante quand la fonction dépend de paramètres.

Proposition 2.1.3 (Propriétés élémentaires) Soient $f, g \in L^1$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et $\tau \in \mathbb{R}^*$. Alors on a les propriétés suivantes.

$$(\text{Linéarité}) \quad \widehat{\lambda f + \mu g} = \lambda \hat{f} + \mu \hat{g}.$$

$$(\text{Transposition}) \quad \widehat{f(-\circ)} = \hat{f}(-\circ).$$

$$(\text{Conjugaison}) \quad \hat{\bar{f}} = \overline{\hat{f}(-\circ)}.$$

$$(\text{Changement d'échelle}) \quad \widehat{f(\tau \circ)} = \frac{1}{|\tau|} \hat{f}\left(\frac{\circ}{\tau}\right).$$

$$(\text{Translation}) \quad \widehat{f(\circ - \tau)} = e^{-i\tau \circ} \hat{f}.$$

$$(\text{Modulation}) \quad \widehat{e^{-i\tau \circ} f} = \hat{f}(\circ + \tau).$$

Exercice 2.1.4 Pour $f \in L^1$, on note $\check{f}(u) = \widehat{\hat{f}}(-u)$. Vérifier les propriétés suivantes.

$$1. (f \in L^1, \hat{f} \in L^1) \Rightarrow \hat{\hat{f}} = \check{f}.$$

$$2. (f \in L^1, \hat{f} \in L^1) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f(\circ + x)} = \check{f}(\circ + x)).$$

$$3. f \in L^1 \Rightarrow (\check{\check{f}} = \hat{f} \text{ et } \check{\check{\hat{f}}} = \hat{f}).$$

En particulier, il découle immédiatement de l’axiome de conjugaison que la transformation de Fourier préserve la parité.

Proposition 2.1.5 La transformée de Fourier d’une fonction paire est une fonction paire. La transformée d’une fonction impaire est une fonction impaire.

Nous pouvons préciser ce dernier résultat. Comme dans le cas des séries de Fourier, la transformation de Fourier admet aussi une formulation en termes des fonctions circulaires.

Définition 2.1.6 Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dans L^1 , On définit les **transformées de Fourier de f en cosinus et sinus**

$$\begin{aligned} \hat{f}_c(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(xu) du = 2 \int_0^{+\infty} f_+(x) \cos(xu) du \\ \hat{f}_s(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(xu) du = 2 \int_0^{+\infty} f_-(x) \sin(xu) du \end{aligned}$$

où $f_+(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ est la partie paire de f et $f_-(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$ est sa partie impaire.

Proposition 2.1.7 *La fonction \widehat{f}_c est paire, la fonction \widehat{f}_s est impaire et*

$$\widehat{f} = \widehat{f}_c - i\widehat{f}_s.$$

On retrouve les mêmes propriétés de symétries que pour les séries de Fourier.

Corollaire 2.1.8

1. *La transformée de Fourier d'une fonction paire et réelle est une fonction paire et réelle.*
2. *La transformée de Fourier d'une fonction paire et imaginaire pure est une fonction paire et imaginaire pure.*
3. *La transformée de Fourier d'une fonction impaire et réelle est une fonction impaire et imaginaire pure.*
4. *La transformée de Fourier d'une fonction impaire et imaginaire est une fonction impaire et réelle.*

Enfin, en prévision de la formule de réciprocity de Fourier que nous établirons plus loin, terminons ce paragraphe par une jolie formule.

Proposition 2.1.9 *Si f et \widehat{f} sont dans L^1 , alors*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(u) e^{iux} du = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \widehat{f}_c(u) \cos(xu) du + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \widehat{f}_s(u) \sin(xu) du.$$

DÉMONSTRATION :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(u) e^{iux} du &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(u) (\cos(xu) + i \sin(xu)) du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\widehat{f}_c(u) - i\widehat{f}_s(u)) (\cos(xu) + i \sin(xu)) du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\widehat{f}_c(u) \cos(xu) + \widehat{f}_s(u) \sin(xu)) du \\ &\quad + i \int_{-\infty}^{+\infty} (\widehat{f}_c(u) \sin(xu) - \widehat{f}_s(u) \cos(xu)) du. \end{aligned}$$

Mais la fonction $u \mapsto \widehat{f}_c(u) \sin(xu) - \widehat{f}_s(u) \cos(xu)$ est impaire. La dernière intégrale est donc nulle. \square

Remarque 2.1.10 D'autres conventions sont possibles pour définir l'intégrale de Fourier. On aurait tout aussi bien pu choisir les intégrales

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixu} du,$$

ou bien encore

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i x u} du.$$

Ces trois conventions ont chacune leurs avantages et leurs inconvénients, et sont malheureusement toutes trois largement répandues dans la littérature.

2.2 Calculs de transformées de Fourier

Ces exemples sont à connaître **par coeur**.

$$1) \text{ Si } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{pour } |x| > 1 \end{cases}, \text{ alors } \hat{f}(u) = 2\text{sinc}(u) = \begin{cases} 2 \frac{\sin u}{u}, & \text{pour } u \neq 0, \\ 2, & \text{pour } u = 0. \end{cases}$$

$$2) \text{ Si } f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{pour } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{pour } |x| > 1, \end{cases} \text{ alors } \hat{f}(u) = \left(\frac{\sin(u/2)}{u/2} \right)^2.$$

$$3) \text{ Si } f(x) = \begin{cases} x^n e^{-x} & \text{pour } x > 0, \\ 0 & \text{pour } x \leq 0, \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} \hat{f}(u) = \frac{n!}{(1+iu)^{n+1}} = \frac{\Gamma(n+1)}{(1+iu)^{n+1}}, \\ \text{avec } \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \end{cases}$$

La première expression est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, la seconde pour tout nombre complexe tel que $\Re(n) > 0$.

$$4) \text{ Si } f(x) = e^{-|x|}, \text{ alors } \hat{f}(u) = \frac{2}{1+u^2}.$$

$$5) \text{ Si } f(x) = e^{-x^2}, \text{ alors } \hat{f}(u) = \sqrt{\pi} e^{-u^2/4}.$$

Cette fonction joue un rôle important dans la théorie des probabilités : elle intervient dans la définitions des lois dites gaussiennes. Nous allons démontrer soigneusement ce résultat. La fonction $x \mapsto -ixe^{-x^2} e^{-ixu}$ est normalement intégrable. Le théorème de dérivation montre que \hat{f} est dérivable et

$$\hat{f}'(u) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} e^{-ixu} du = \left[i e^{-x^2} / 2 e^{-ixu} \right]_{-\infty}^{+\infty} - u/2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-ixu} du,$$

par une intégration par parties. Ainsi \hat{f} est solution de l'équation différentielle ordinaire linéaire $y' = xy/2$. La fonction \hat{f} est donc de la forme $Ae^{-u^2/4}$. Il reste à calculer $A = \hat{f}(0)$. Nous allons pour cela considérer la fonction auxiliaire

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

Par le théorème de dérivation sous le signe intégrale puis le changement de variable $u = xt$

$$\begin{aligned} F'(x) &= -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 t^2} dt \\ &= -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du = -2 G'(x)G(x) \end{aligned}$$

avec $G(x) = \int_0^x e^{-u^2} du$. Ainsi la fonction $F + G^2$ est constante et vaut $F(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \pi/4$. D'autre part

$$F(x) \leq e^{-x^2} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \pi/4 e^{-x^2}$$

converge vers zéro quand x tend vers $+\infty$. On en déduit que $G^2(x)$ tend vers $\pi/4$ quand x tend vers $+\infty$. Puisque G est positive, il vient que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 2\sqrt{\pi/4} = \sqrt{\pi}.$$

2.3 La classe des fonctions à décroissance rapide

Comme nous le verrons, parmi d'autres applications la transformée de Fourier est un outil performant pour résoudre des équations aux dérivées partielles linéaires. Nous allons étudier dans cette partie le lien entre la transformation de Fourier et l'opération de dérivation. Il se présente ici une difficulté. La transformée de Fourier d'une fonction, même de classe \mathcal{C}^∞ , n'est pas nécessairement partout dérivable.

Par exemple, la fonction définie par $g(x) = 2/\pi \operatorname{sinc}^2(x)$ a pour transformée de Fourier la fonction $\hat{g}(u) = 2 - |u|$ sur $[-2, 2]$ et $g(u) = 0$ pour $|u| \geq 2$, qui n'est pas dérivable aux points 0, -2 et 2 .

Nous allons introduire un espace de fonctions, stable par dérivation et par transformation de Fourier, à rapprocher de l'espace des suites de coefficients de Fourier des fonctions \mathcal{C}^∞ périodiques de période 2π . Cet espace nous servira de trait d'union entre l'intégrale de Fourier et la théorie des séries de Fourier. Nous verrons en effet comment un lemme du type des sommes de Riemann nous permet de réduire les résultats de ce chapitre à des énoncés sur les séries.

Définition 2.3.1 On dit qu'une fonction f sur \mathbb{R} à valeurs réelles ou complexes est à **décroissance rapide** si elle est de classe \mathcal{C}^∞ et si pour tous entiers $k, n \in \mathbb{N}$, il existe une constante $M_{k,n} > 0$ telle que $|x|^k |f^{(n)}(x)| \leq M_{k,n}$. L'ensemble des fonctions qui ont cette propriété forme un espace vectoriel que l'on note \mathcal{S} .

Exemples : les fonctions $u(x) = \exp(-x^2)$, $v(0) = 0$ et $v(x) = \exp(-(x - 1/x)^2)$ pour $x \neq 0$, $w(x) = \exp(-e^x) e^x$, la fonction définie par $f(x) = \exp(-(1 - x^2)^{-1})$ pour $|x| < 1$ et nulle ailleurs, et plus généralement les fonctions \mathcal{C}^∞ nulle en dehors d'un intervalle borné (c'est-à-dire à support compact) sont dans \mathcal{S} . Notons aussi que le produit de deux fonctions de \mathcal{S} , et aussi le produit d'une fonction de \mathcal{S} et d'une fonction dont toutes les dérivées sont bornées (par exemple $\cos(\alpha x)e^{-\beta x^2}$ avec $\beta > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$), est dans la classe \mathcal{S} .

Notation 2.3.2 Dans la suite, pour $f \in \mathcal{S}$, on notera

$$M_{k,n}(f) := \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f^{(n)}(x)|.$$

Nous allons étudier plusieurs opérations naturelles $T : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$. Une telle opération sera dite continue si pour toute suite $f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} f$, on a $T(f_n) \xrightarrow{\mathcal{S}} Tf$.

Définition 2.3.3 On dit qu'une suite de fonctions $f_n \in \mathcal{S}$ converge vers $f \in \mathcal{S}$ et l'on note $f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} f$ si pour tout $k, p \geq 0$ on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_{k,p}(f_n - f) = 0.$$

Notons que la transformation de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{S}$ existe toujours, en vertu de la propriété suivante.

Proposition 2.3.4 *On a $\mathcal{S} \subset L^1 \cap L^2$. De plus, si $f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} f$, alors $\|f_n - f\|_{L^1}$ et $\|f_n - f\|_{L^2}$ convergent vers zéro.*

DÉMONSTRATION : On a

$$|f(x)| \leq \frac{M_{0,0}(f) + M_{2,0}(f)}{1 + x^2}.$$

Il s'en suit que $\|f\|_{L^1} \leq \pi(M_{0,0}(f) + M_{2,0}(f))$. Toute fonction de \mathcal{S} est donc bien intégrable et la continuité de l'inclusion $\mathcal{S} \subset L^1$ découle de l'estimation ci-dessus. Le résultat analogue pour l'inclusion $\mathcal{S} \subset L^2$ se ramène au précédent parce que l'application $L^2 \rightarrow L^1$ qui à f associe f^2 est continue. \square

Lemme 2.3.5 (d'approximation, admis) *Soient $\epsilon > 0$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Alors on a les trois propriétés suivantes.*

- (i) *Si $f \in L^1$, alors il existe $g \in \mathcal{S}$ telle que $\|f - g\|_{L^1} \leq \epsilon$.*
- (ii) *Si $f \in L^2$, alors il existe $g \in \mathcal{S}$ telle que $\|f - g\|_{L^2} \leq \epsilon$.*
- (iii) *Si $f \in L^1 \cap L^2$, alors il existe $g \in \mathcal{S}$ telle que $\|f - g\|_{L^1} \leq \epsilon$ et $\|f - g\|_{L^2} \leq \epsilon$.*

Exercice 2.3.6

1. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right)$ pour $|x| \leq 1$ et par $f(x) = 0$ pour $|x| > 1$ est de classe \mathcal{C}^∞ .
2. Montrer qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ telle que $g(x) = 0$ pour $x \leq -1$ et $g(x) = 1$ pour $x \geq 0$ (on pourra la construire à partir de la fonction définie par $F(x) := \int_0^x f(t) dt$).
3. Pour $R > 0$, on définit une fonction $\chi_R : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ en posant $\chi_R(x) = g(x + R)$ si $x \leq R$ et $\chi_R(x) = g(R - x)$ si $x > -R$. Montrer que χ_R est bien définie, que $\chi_R = 1$ sur $[-R, R]$, que $\chi_R(x) = 0$ pour $|x| > R + 1$.
4. En déduire que pour tout $f \in \mathcal{S}$, il existe une suite $f_n \in \mathcal{C}_c^\infty$ de fonctions \mathcal{C}^∞ à support compact telle que $f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} f$ (Considérer la suite $\chi_n f$).

Exercice 2.3.7 Soient $f, g \in \mathcal{S}$. On pose $g_\epsilon(x) := g(\epsilon x)$ pour $\epsilon \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(g_\epsilon)^{(n)}(u) = \epsilon^n g^{(n)}(\epsilon u)$ et que

$$(fg_\epsilon)^{(n)} = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} f^{(n-\ell)}(g_\epsilon)^{(\ell)}.$$

2. En déduire que pour $0 \leq \epsilon \leq 1$, on a

$$M_{k,n}(f(g_\epsilon - g(0))) \leq M_{k,0}(f^{(n)}(g_\epsilon - g(0))) + \epsilon \sum_{\ell=1}^n \binom{n}{\ell} M_{0,\ell}(g) M_{k,n-\ell}(f).$$

3. Montrer que $M_{k,0}(f^{(n)}(g_\epsilon - g(0))) \leq \epsilon M_{k+1,n}(f) M_{0,1}(g)$. En déduire que $fg_\epsilon \xrightarrow{\mathcal{S}} fg(0)$ quand $\epsilon \rightarrow 0$.

Proposition 2.3.8 On note $D(f) := f'$ et $L(f) : x \mapsto ix f(x)$.

1. $f \in \mathcal{S} \Rightarrow D(f) \in \mathcal{S}$ et $\widehat{Df} = L(\widehat{f})$.
2. $f \in \mathcal{S} \Rightarrow L(f) \in \mathcal{S}$ et $D(\widehat{f}) = -\widehat{L(f)}$.
3. $f \in \mathcal{S} \Rightarrow \widehat{f} \in \mathcal{S}$.

De plus, les opérations $f \mapsto D(f)$, $f \mapsto L(f)$ et $f \mapsto \widehat{f}$ sont continues sur \mathcal{S} .

DÉMONSTRATION : Soit $f \in \mathcal{S}$

- On a $M_{k,n}(f') = M_{k,n+1}(f)$; $M_{k,n}(L(f)) \leq M_{k+1,n}(f) + nM_{k,n-1}(f)$. L'égalité est évidente, l'inégalité vient de la relation

$$(xf(x))^{(n)} = nf^{(n-1)}(x) + f^{(n)}(x).$$

On en déduit immédiatement que f' et $L(f)$ sont des fonctions à décroissance rapide et que les opérations L et D sont continues.

- L'identité $D(\widehat{f}) = -\widehat{L(f)}$ vient du théorème de dérivation puisque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} (f(u)e^{-ixu}) du = \int_{-\infty}^{+\infty} -iuf(u)e^{-ixu} du$$

converge normalement (car $|uf(u)| \leq (M_{1,0}(f) + M_{3,0}(f))/(1+u^2)$).

- L'identité $\widehat{Df} = L(\widehat{f})$ s'obtient par intégration par parties :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ixe^{-ixu} f(u) du = [-e^{ixu} f(u)]_{-\infty}^{+\infty} + \widehat{(f')}(x) = \widehat{(f')}(x)$$

puisque $|f(x)| \leq M_{1,0}/|x|$ converge vers zéro quand $|x| \rightarrow +\infty$.

- Que \widehat{f} soit à décroissance rapide découle immédiatement de l'estimation

$$|(ix)^n \widehat{f^{(p)}}(x)| = \left| \left(\frac{d^n}{du^n} ((-iu)^p f) \right) (x) \right| \leq \pi(M_{0,0} + M_{2,0})(((-ix)^p f)^{(n)})$$

et de ce que $((-ix)^p f)^{(n)} = (-1)^p D^n L^p(f)$. La continuité de la transformation de Fourier découle alors de la continuité de D et L .

□

Nous allons maintenant démontrer le résultat fondamental qui nous permet de déduire de la théorie des séries de Fourier les théorèmes principaux sur l'intégrale de Fourier.

Lemme 2.3.9 (Sommes de Riemann) Soit $f \in \mathcal{S}$ et $a > 0$. Alors la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(na)a$ converge et $\lim_{a \rightarrow 0^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(na)a = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$.

DÉMONSTRATION : Pour $A > 0$ fixé, la théorie d'intégration de Riemann montre que les sommes de Riemann de f sur $[-A, A]$ convergent vers l'intégrale $\int_{-A}^A f(x) dx$ quand le pas de la subdivision converge vers zéro. On a donc

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \sum_{a|k| \leq A} af(ka) = \int_{-A}^A f(t) dt.$$

D'autre part, on a $|f(ka)| \leq \frac{M_{2,0}(f)}{k^2 a^2} \leq \frac{M_{2,0}(f)}{|k|(|k| - 1)a^2}$. On en déduit que

$$\left| \sum_{|k|a > A} af(ka) \right| \leq \frac{2}{a} M_{2,0}(f) \sum_{ka > A} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \leq \frac{2M_{2,0}(f)}{a[A/a]} \leq \frac{2M_{2,0}(f)}{A-a},$$

où $[A/a]$ est la partie entière de A/a , unique entier p tel que $p \leq A/a < p+1$. On a donc, pour $a_0 > 0$ fixé et pour tout $0 < a < a_0$,

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \sum_{a|k| \leq A} af(ka) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(na)a.$$

De plus la convergence de cette limite est *uniforme* pour $a \in (0, a_0)$. On peut donc échanger les limites.

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(na)a &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \lim_{A \rightarrow +\infty} \sum_{a|k| \leq A} af(ka) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \lim_{a \rightarrow 0^+} \sum_{a|k| \leq A} af(ka) \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt. \quad \square \end{aligned}$$

Théorème 2.3.10 (Formule de réciprocité) Soit $f \in \mathcal{S}$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(u) e^{ixu} du.$$

DÉMONSTRATION : Supposons d'abord que f est à support compact, c'est-à-dire que f s'annule en dehors d'un intervalle de la forme $[-R, R]$, avec $R > 0$. Alors appliquons le théorème de Dirichlet pour les séries à la fonction g périodique, de période $2R$, et qui coïncide avec f sur $[-R, R]$. On a pour $|x| \leq R$

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \exp\left(\frac{ik\pi x}{R}\right) \text{ avec } c_k := \frac{1}{2R} \int_{-R}^R f(t) \exp\left(-\frac{ik\pi t}{R}\right) dt = \frac{1}{2R} \hat{f}\left(\frac{k\pi}{R}\right).$$

$$\text{D'où } f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\frac{k\pi}{R}\right) \exp\left(\frac{ik\pi x}{R}\right) \frac{\pi}{R} \rightarrow \frac{1}{2\pi} \hat{f}(-x)$$

quand $R \rightarrow +\infty$ d'après le lemme des sommes de Riemann.

Si $f \in \mathcal{S}$ n'est pas à support compact, il existe une suite de fonctions $f_n \in \mathcal{C}^\infty$ à support compact telle que $f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} f$. Alors $2\pi f_n = \widehat{\check{f}_n}$. D'où la formule annoncée en passant à la limite, puisque la transformation de Fourier est continue sur \mathcal{S} . \square

Exercice 2.3.11 On sait que si $f(x) = e^{-x^2}$, alors $\widehat{f}(u) = \alpha e^{-u^2/4}$ avec $\alpha > 0$.

1. Dédurre de l'axiome de changement d'échelle que $\widehat{\hat{f}} = 2\alpha^2 f$.
2. Retrouver à l'aide de la formule de réciprocity que $\alpha = \sqrt{\pi}$.

Théorème 2.3.12 (Parseval-Plancherel) Si $f \in \mathcal{S}$, alors

$$\|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2\pi} \|\widehat{f}\|_{L^2}^2.$$

DÉMONSTRATION : • Supposons d'abord que f est \mathcal{C}^∞ à support compact, c'est-à-dire qu'il existe un réel $R > 0$ tel que $f(t) = 0$ pour $|t| \leq R$. Alors soit $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction périodique de période $2R$ qui coïncide avec f sur $[-R, R]$. Le théorème de Parseval pour les séries de Fourier montre que

$$\frac{1}{2R} \int_{-R}^R |f(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2, \quad \text{avec } c_n := \frac{1}{2R} \int_{-R}^R f(t) e^{-in\pi/R} dt = \frac{1}{2R} \widehat{f}\left(\frac{n\pi}{R}\right).$$

On en déduit avec le lemme des sommes de Riemann que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-R}^R |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\pi}{R} \left| \widehat{f}\left(\frac{n\pi}{R}\right) \right|^2 \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(u)|^2 du.$$

• Si f est à décroissance rapide, il existe une suite f_n de fonctions à support compact telle que $f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} f$. On a $2\pi \|f_n\|_{L^2}^2 = \|\widehat{f}_n\|_{L^2}^2$ d'après l'étude du cas précédent. Mais f_n et \widehat{f}_n convergent dans L^2 vers f et \widehat{f}_n respectivement. D'où l'identité annoncée en passant à la limite. \square

Théorème 2.3.13 (Échange) Pour $f, g \in \mathcal{S}$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(x) g(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \widehat{g}(x) dx.$$

DÉMONSTRATION : Le théorème de réciprocity montre que la transformée de Fourier réalise une bijection de \mathcal{S} sur lui-même. On peut donc supposer que $f = \widehat{\bar{h}}$, avec $h \in \mathcal{S}$. On applique alors le théorème de Plancherel à h et g .

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \widehat{g}(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\bar{h}}(x) \widehat{g}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{h}(x) g(x) dx.$$

Mais l'axiome de conjugaison montre que $\widehat{\widehat{h}} = \bar{h} = \overline{\widehat{\bar{h}}}$, ce qui montre l'identité annoncée. \square

2.4 Transformation de Fourier dans L^1

Le but de cette partie est d'étendre aux fonctions L^1 les résultats de l'intégrale de Fourier démontrées dans \mathcal{S} .

Lemme 2.4.1 (Intégration par parties) Soit $f \in L^1$ et $-\infty < a < b < +\infty$. On note $\chi_{[a,b]}(t) = 1$ si $a \leq t \leq b$ et $\chi_{[a,b]}(t) = 0$ sinon. Alors

$$\widehat{\chi_{[a,b]}f}(u) = [I(f)e^{-ixu}]_a^b + iu \widehat{\chi_{[a,b]}I(f)}(u), \quad \text{avec } I(f)(x) := \int_{-\infty}^x f(u) du.$$

DÉMONSTRATION : La formule est celle de l'intégration par partie classique si $f \in \mathcal{C}^0 \cap L^1$. Si $f \in L^1$, il existe une suite de fonctions $f_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ à support compact telle que $\|f - f_n\|_{L^1} \rightarrow 0$. Alors $I(f_n)$ converge uniformément sur \mathbb{R} vers $I(f)$. On en déduit que $\chi_{[a,b]}I(f_n)$ converge en norme L^1 vers $\chi_{[a,b]}I(f)$, puis que $\widehat{\chi_{[a,b]}I(f_n)}$ converge uniformément vers $\widehat{\chi_{[a,b]}I(f)}$ sur \mathbb{R} . D'autre part, $\chi_{[a,b]}f_n$ converge en norme L^1 vers $\chi_{[a,b]}f$ donc $\widehat{\chi_{[a,b]}f_n}$ converge uniformément vers $\widehat{\chi_{[a,b]}f}$. L'identité s'obtient donc en passant à la limite. \square

Proposition 2.4.2 (Primitive) Soit $f \in L^1$ et $I(f)(x) := \int_{-\infty}^x f(u) du$. Si $I(f) \in L^1$ alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0$ et $\widehat{f}(u) = iu \widehat{I(f)}(u)$.

DÉMONSTRATION : Si $f \in L^1$, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} I(f)(x)$ existe. Cette limite ne peut être que nulle si $I(f) \in L^1$. L'identité de l'énoncé s'obtient alors en faisant une intégration par parties, puis en passant à la limite quand $a \rightarrow -\infty$ et $b \rightarrow +\infty$. \square

Proposition 2.4.3 (Dérivation) Soit $f \in L^1$. On définit $L(f)(x) := ix f(x)$. Si $L(f) \in L^1$, alors \widehat{f} est dérivable et $D(\widehat{f}) = -\widehat{L(f)}$.

DÉMONSTRATION : c'est une application directe du théorème de dérivation sous le signe intégrale. \square

Théorème 2.4.4 (Échange) $\forall f, g \in L^1, \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(x)g(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\widehat{g}(x) dx$.

DÉMONSTRATION : Il existe deux suites de fonctions $f_n \in \mathcal{S}$ et $g_n \in \mathcal{S}$ telles que $f_n \rightarrow f$ et $g_n \rightarrow g$ dans L^1 . En particulier $\|f_n\|_{L^1}$ converge vers $\|f\|_{L^1}$. De plus on a les inégalités suivantes.

$$\begin{aligned} \|f_n\widehat{g}_n - f\widehat{g}\|_{L^1} &\leq \|f_n\widehat{g}_n - f_n\widehat{g}\|_{L^1} + \|f_n\widehat{g} - f\widehat{g}\|_{L^1}, \\ &\leq \|\widehat{g}_n - \widehat{g}\|_0 \|f_n\|_{L^1} + \|\widehat{g}\|_0 \|f_n - f\|_{L^1}, \\ &\leq \|f_n\|_{L^1} \|g_n - g\|_{L^1} + \|g\|_{L^1} \|f_n - f\|_{L^1}. \end{aligned}$$

On en déduit que $f_n\widehat{g}_n$ converge vers $f\widehat{g}$ dans L^1 . Mais par symétrie $\widehat{f}_n g_n$ converge de même vers $\widehat{f}g$ dans L^1 . D'où le résultat en passant à la limite dans l'identité correspondante pour f_n et g_n . \square

Théorème 2.4.5 (Formule de réciprocity) Si $f \in L^1$ et si $\hat{f} \in L^1$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ où f est continue, on a

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(u) e^{ixu} du.$$

DÉMONSTRATION : En posant $f_x(t) := f(t+x)$, on a $\hat{f}_x(u) = \hat{f}(u) \exp(ixu)$. On se ramène ainsi au cas où $x = 0$. Quitte à remplacer f par $x \mapsto f(x) - f(0) \exp(-x^2)$, on peut aussi supposer que $f(0) = 0$. Pour $\alpha > 0$, on a alors successivement

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) e^{-\alpha x^2/2} dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) (\widehat{e^{-\alpha x^2/2}})(u) du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \frac{e^{-u^2/2\alpha}}{\sqrt{\alpha}} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sqrt{\alpha}u) e^{-u^2/2} du. \end{aligned}$$

Puisque $\hat{f} \in L^1$, le théorème de convergence dominée montre que le terme de gauche converge vers $\frac{1}{2\pi} \hat{f}(0)$ quand α tend vers zéro. Examinons maintenant le terme de droite en le découpant en deux morceaux.

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}^{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} |f(\alpha x)| e^{-x^2/2} dx &\leq \sup_{|x| \leq \sqrt{\alpha}} |f(x)| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx \rightarrow 0 \\ \text{et } \int_{|x| \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha}}} |f(\alpha x)| e^{-x^2/2} dx &\leq \|f\|_{L^1} \frac{1}{\alpha} \exp\left(-\frac{1}{2\alpha}\right) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

La première limite se calcule en effet en notant que f est continue en zéro. Le terme de droite converge donc bien vers zéro et on en déduit que $\hat{f}(0) = 2\pi f(0)$. \square

Le résultat qui suit, à rapprocher du théorème de Dirichlet pour les séries, montre que pour pouvoir inverser la formule de Fourier en point x donné, il suffit de connaître le comportement de f au voisinage : si l'on modifie f dans le complémentaire d'un intervalle ouvert centré en x , l'objet global \hat{f} sera modifié en tout point, mais pas la valeur de la limite donnée par le théorème.

Théorème 2.4.6 (Principe de localisation) Soit $f \in L^1$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose que les limites à droite et à gauche $f(x+0)$ et $f(x-0)$ existent, et que les dérivées à droite et à gauche $f'_d(x)$ et $f'_g(x)$ existent. Alors

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \hat{f}(u) e^{iux} du = \frac{1}{2} (f(x+0) + f(x-0)).$$

DÉMONSTRATION : En posant $f_x(t) = f(t+x)$, on a $\widehat{f_x}(u) = e^{ixu}\widehat{f}$. On peut donc supposer que $x = 0$. De plus, le théorème 2.3.10 montre que la formule à démontrer vaut pour la fonction $\exp(-x^2)$. Ainsi, quitte à remplacer f par $x \mapsto f(x) - (f(0+) + f(0-))\exp(-x^2)/2$, on peut supposer en toute généralité que $f(0+) + f(0-) = 0$. Appliquons le théorème de l'échange.

$$\int_{-R}^R \widehat{f}(u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi\left(\frac{u}{R}\right) \widehat{f}(u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} R\widehat{\chi}(Rt)f(t) dt = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\sin(Rt)}{t} dt,$$

avec $\chi = \mathbb{1}_{[-1, 1]}$. Les hypothèses sur f montrent que la fonction $t \mapsto f_+(t)/t$ est intégrable, avec $f_+(t) = (f(t) + f(-t))/2$. On a alors

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \widehat{f}(u) du = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\sin(Rt)}{t} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_+(t)}{t} \sin(Rt) dt = \frac{i}{\pi} \widehat{\frac{f_+(t)}{t}}(R).$$

En tant que transformée de Fourier, le terme de droite tend vers zéro quand R tend vers l'infini. \square

2.5 Transformation de Fourier dans L^2 .

La transformée d'une fonction L^1 n'est pas nécessairement L^1 (considérer la transformée de $\mathbb{1}_{[-1,1]}$). Cet espace fonctionnel n'est donc pas parfaitement adapté à la transformation de Fourier. Nous allons voir qu'il vaut mieux, quand c'est possible, travailler dans L^2 .

Proposition 2.5.1 *Si $L^1 \cap L^2$, alors $\widehat{f} \in L^2 \cap \mathcal{C}^0$ et*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(u)|^2 du.$$

DÉMONSTRATION : Le lemme d'approximation montre qu'il existe une suite de fonctions de $f_n \in \mathcal{S}$ qui converge vers f en norme L^1 et L^2 . De plus $\|\widehat{f_n} - \widehat{f}\|_0 \leq \|f_n - f\|_{L^1}$ et ainsi $\widehat{f_n}$ converge uniformément sur \mathbb{R} vers \widehat{f} . D'autre part, $|\|f_n\|_{L^2} - \|f\|_{L^2}| \leq \|f_n - f\|_{L^2}$ converge vers zéro. Donc $\|f_n\|_{L^2}^2$ converge vers $\|f\|_{L^2}^2$. Mais on a dans \mathcal{S} l'identité $2\pi\|f_n\|_{L^2}^2 = \|\widehat{f_n}\|_{L^2}^2$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R |\widehat{f}(t)|^2 dt &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R |\widehat{f_n}(t)|^2 dt \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f_n}(t)|^2 dt \\ &= 2\pi \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(t)|^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

Et cela pour tout $R > 0$. On a donc $\widehat{f} \in L^2$ et de plus, $\|\widehat{f}\|_{L^2}^2 \leq 2\pi\|f\|_{L^2}^2$. Mais cette inégalité, appliquée à $f_n - f$, montre que la suite $\|\widehat{f_n}\|_{L^2}^2$ converge vers $\|\widehat{f}\|_{L^2}^2$. Ainsi, en passant une nouvelle fois à la limite dans l'identité $\|\widehat{f_n}\|_{L^2}^2 = 2\pi\|f_n\|_{L^2}^2$, on obtient que $\|\widehat{f}\|_{L^2}^2 = 2\pi\|f\|_{L^2}^2$, ce qui est bien l'identité annoncée. \square

Cette proposition invite à étendre la définition de la transformation de Fourier à L^2 tout entier, considéré comme espace de Hilbert. Pour tout $h \in L^2$, on note

$$b(h)(g) := (h|g)_{L^2} := \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{h}(x)g(x) dx.$$

Alors le théorème de Riesz affirme que la transformation $b : L^2 \mapsto (L^2)^* : h \mapsto b(h)$ est une bijection isométrique. Pour $f \in L^2$ et $g \in \mathcal{S}$, posons $T_f(g) := (f|\hat{g})_{L^2}$. Alors $|T_f(g)| \leq \|f\|_{L^2}\|\hat{g}\|_{L^2} = \sqrt{2\pi}\|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}$. Aussi T_f se prolonge en une unique forme linéaire continue $T_f : L^2 \rightarrow \mathbb{C}$ sur \mathbb{C} avec $\|T_f\| \leq \sqrt{2\pi}\|f\|_{L^2}$. On définit alors

$$\mathcal{F}_2(f) := b^{-1} \circ T_f.$$

Notons que si $f \in L^1 \cap L^2$, alors la proposition 2.5.1 montre que $T_f(\hat{g}) = (\hat{f}|\hat{g})$ au sens de la théorie dans L^1 , pour tout $g \in \mathcal{S}$. Aussi $\mathcal{F}_2(f) = \hat{f}$ dans ce cas.

Définition 2.5.2 Pour tout $f \in L^2$, il existe une unique fonction $h \in L^2$ telle que

$$\forall g \in \mathcal{S}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{h}(x)g(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(x)\hat{g}(x) dx.$$

La fonction h s'appelle la **transformée de Fourier dans L^2** de la fonction f . Si $f \in L^1 \cap L^2$, cette définition coïncide avec la transformation dans L^1 . Aussi continuera-t-on de noter \hat{f} la transformée de Fourier.

Théorème 2.5.3 La transformation $L^2 \rightarrow L^2 : f \mapsto \hat{f}/\sqrt{2\pi}$ est isométrique et bijective. De plus, pour tout $f \in L^2$, on a $\hat{\hat{f}}(-u) = 2\pi f(u)$ pour presque tout u .

DÉMONSTRATION : • La transformation est isométrique.

On a $\|\hat{h}\|_{L^2} = \|T_h\| \leq \sqrt{2\pi}\|h\|_{L^2}$ pour tout $h \in L^2$, ce qui démontre la continuité de la transformation de Fourier dans L^2 .

Soit $f \in L^2$. Il existe alors une suite de fonctions $f_n \in \mathcal{S}$ telle que $\|f - f_n\|_{L^2} \rightarrow 0$. En particulier $\lim \|f_n\| = \|f\|$. De plus, la continuité de la transformation de Fourier dans L^2 montre que $\lim \|\hat{f}_n\| = \|\hat{f}\|$. Or le théorème de Parseval dans \mathcal{S} montre que $\sqrt{2\pi}\|f_n\| = \|\hat{f}_n\|$. On en déduit que $\sqrt{2\pi}\|f\| = \|\hat{f}\|$ en passant à la limite.

• La transformation est bijective.

Le théorème d'inversion dans \mathcal{S} montre que $\hat{\hat{f}}_n = \check{\check{f}}_n = 2\pi f_n$. Cette identité est valable ponctuellement en tout point de \mathbb{R} , mais aussi globalement pour f_n considérée en tant que fonction L^2 . Pour $f \in L^2$, on pose $\check{f}(u) = \hat{f}(-u)$. On obtient ainsi une fonction définie presque partout représentant une fonction de L^2 . Comme les opérations $f \mapsto \hat{f}$ et $f \mapsto \check{f}$ sont continue dans L^2 , on en déduit en passant à la limite que $\hat{\hat{f}} = \check{\check{f}} = 2\pi f$ dans L^2 , ce qui établit la bijectivité de la transformation de Fourier dans L^2 .

• Enfin, si $\check{\check{f}} = 2\pi f$ dans L^2 , alors ces deux fonctions coïncident presque partout et ainsi $\hat{\hat{f}}(-u) = 2\pi f(u)$ pour presque tout u . \square

Corollaire 2.5.4 (Parseval-Plancherel) Si $f, g \in L^2$, alors $\widehat{f}, \widehat{g} \in L^2$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\widehat{f}(t)} g(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(u) \widehat{g}(u) du.$$

En particulier

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(u)|^2 dx = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx$$

pour tout $f \in L^2$. En physique, le terme de droite peut s'interpréter comme une énergie. Le terme de gauche est la décomposition en fréquences de cette énergie.

Attention : Bien noter que les transformations de Fourier dans L^1 et dans L^2 ne sont pas définies de la même façon. Si $f \in L^1$, alors \widehat{f} est une fonction continue sur \mathbb{R} . Si $f \in L^2 \setminus L^1$, la fonction \widehat{f} est dans L^2 et $\widehat{f}(u)$ est défini a priori seulement presque partout. En particulier f n'a pas en général de représentant continu et ne converge pas nécessairement vers zéro à l'infini.

Proposition 2.5.5 (méthode pratique de calcul) Soit $f \in L^2$. On note

$$\varphi_A(t) := \int_{-A}^A f(x) e^{-ixu} dx.$$

Alors

1. $\|\widehat{f} - \varphi_A\|_{L^2} \rightarrow 0$ quand $A \rightarrow +\infty$.
2. Inversement, on suppose qu'il existe une suite $A_n \rightarrow +\infty$ et une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mesurable telle que la suite $\varphi_{A_n}(u)$ converge vers $g(u)$ pour presque tout u . Alors $g \in L^2$ et $g = \widehat{f}$.

DÉMONSTRATION : 1) Notons $\chi_A(t) = 1$ si $|t| \leq A$ et $\chi_A(t) = 0$ sinon. Alors la fonction $\chi_A f$ est L^2 et à support dans $[-A, A]$. Donc $\chi_A f \in L^1 \cap L^2$. En particulier $\widehat{f\chi_A} \in L^1$. La formule de la transformée de Fourier dans L^1 montre alors que $\widehat{f\chi_A} = \varphi_A$. De plus, $\|f\chi_A - f\|_{L^2} \rightarrow 0$ quand $A \rightarrow +\infty$ d'après le théorème de convergence dominée. Le théorème de Plancherel montre alors que $\|\widehat{f\chi_A} - \widehat{f}\|_{L^2} = \sqrt{2\pi} \|f\chi_A - f\|_{L^2} \rightarrow 0$.

2) On vient de voir que $\|\widehat{f\chi_{A_n}} - \widehat{f}\|_{L^2} \rightarrow 0$. On peut donc extraire une sous-suite $\widehat{f\chi_{A_{\psi(n)}}}$ qui converge presque partout vers \widehat{f} . Mais d'autre part $\widehat{f\chi_{A_{\psi(n)}}}$ converge vers g presque partout. Donc à un ensemble de mesure nulle près, on a $g = \widehat{f}$ et g représente bien un élément de L^2 . \square

Exercice 2.5.6 Soit $f \in L^2$. Montrer que pour toute suite $A_n \rightarrow +\infty$, il existe une sous suite $A_{n'}$ telle que

$$f(x) = \lim_{n' \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A_{n'}}^{A_{n'}} \widehat{f}(u) e^{ixu} du \quad \text{presque partout.}$$

Exemples

1) Calculons la transformée de Fourier de la fonction sinc : $u \mapsto \sin(u)/u$. Notons que cette fonction est L^2 . De plus $\text{sinc} = \frac{1}{2}\widehat{\chi}$ avec $\chi(t) = 1$ si $|t| \leq 1$ et $\chi(t) = 0$ si $|t| > 1$. Comme la fonction χ est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux et L^1 , le principe de localisation montre que

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \frac{\sin x}{x} e^{-ixu} du = \begin{cases} 0 & \text{si } |u| > 1, \\ 1/4 & \text{si } |u| = 1, \\ 1/2 & \text{si } |u| < 1. \end{cases}$$

On en déduit que $\widehat{\text{sinc}} = \pi\chi$ presque partout. En particulier la formule de Parseval-Plancherel donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du = \|\text{sinc}\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2\pi} \|\pi\chi\|_{L^2}^2 = \frac{\pi^2}{2\pi} \int_{-1}^1 dt = \pi.$$

Remarquons qu'il n'existe pas de fonction continue qui coïncide presque partout avec la fonction $\pi\chi$. On retrouve ainsi que la fonction sinc ne peut être L^1 .

2) Calculons la transformée de Fourier dans L^2 de la fonction $f(x) := x/(x^2+1)$. On commence par décomposer cette fraction en éléments simples sur \mathbb{C} .

$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+i} + \frac{1}{x-i} \right).$$

D'autre part, on a

$$\begin{cases} \frac{1}{x+i} = -\frac{i}{1-ix} = -iH(\widehat{-u})e^u(x), \\ \frac{1}{x-i} = \frac{i}{1+ix} = iH(\widehat{u})e^{-u}(x). \end{cases}$$

D'où

$$f(x) = i/2(H(u)e^{-u} - H(-u)e^u)(x) = i/2 \widehat{\text{sign}(u)e^{-|u|}}(x),$$

avec $\text{sign}(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u > 0, \\ 0 & \text{si } u = 0, \\ -1 & \text{si } u < 0. \end{cases}$

Comme la fonction $u \mapsto \text{sign}(u)e^{-|u|}$ est dans L^2 , le théorème d'inversion dans L^2 donne que $\widehat{f}(u) = -i\pi \text{sign}(u)e^{-|u|}$.

3) Si $f(x) = \chi(x/a)(1 - |x/a|)$, alors $\widehat{f}(u) = \text{sinc}^2(ua/2)$. D'où par le théorème de Plancherel,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin au}{u} \right)^4 du = \|\widehat{f}\|_{L^2}^2 = \frac{2\pi}{3}|a|^3.$$

4) Si $f(x) = \chi(x/a)$ et $g(x) = \chi(x/b)$, alors le théorème de Plancherel donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax \sin bx}{x^2} dx = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(t)\widehat{g}(t) dt = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(t)g(t) dt = \pi \min(a, b).$$

2.6 Le produit de convolution

Convolution : substantif féminin.

A.- Littéraire et rare. Action de s'enrouler sur soi-même ou autour d'un autre corps (cf. circonvolution). *Les convolutions silencieuses de la buée opaque qui se nouaient et se dénouaient en l'air* (Cendrars, in *L'homme foudroyé*, 1945, p. 40).

B.- En mathématique, opération par laquelle deux fonctions sont mises dans un rapport suggérant une sorte d'enroulement de l'une sur l'autre.

(Source : les trésors de la langue française informatisés :
[http : //zeus.inalf.fr/](http://zeus.inalf.fr/))

Définition 2.6.1 (cas des fonctions à décroissance rapide) Soient $f, g \in \mathcal{S}$. Le produit de convolution de f et de g est la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f \star g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt.$$

Théorème 2.6.2 Si $f, g \in \mathcal{S}$, alors $f \star g \in \mathcal{S}$ et

$$\widehat{f \star g} = \widehat{f} \widehat{g} \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{2\pi} \widehat{f \star g} = \widehat{fg}. \quad (2.2)$$

De plus, le produit $(f, g) \mapsto f \star g$ est continu sur \mathcal{S} .

DÉMONSTRATION : Commençons par démontrer (2.2). Puisque f et g sont dans \mathcal{S} , on a aussi $\widehat{f}, \widehat{g} \in \mathcal{S}$. Appliquons le théorème de Parseval-Plancherel.

$$\begin{aligned} \widehat{f} \star \widehat{g}(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(t)\widehat{g}(u-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \check{f}(-t)\widehat{g}(u-t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\widehat{f}}(t)\widehat{g}(u+t) dt = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\check{f}}(t)g(t)e^{-iut} dt \\ &= 2\pi \widehat{fg}(u), \end{aligned}$$

ce qui établit (2.2).

Le produit fg est dans \mathcal{S} , donc \widehat{fg} l'est également. On en déduit que $\widehat{f} \star \widehat{g} \in \mathcal{S}$. Puisque l'opération $f \mapsto \widehat{f}$ est bijective sur \mathcal{S} , ceci montre que le produit de convolution est stable dans \mathcal{S} (i.e. $f, g \in \mathcal{S} \Rightarrow f \star g \in \mathcal{S}$), et que $f \star g = \widehat{\check{f}\check{g}}/(2\pi)$. Cette dernière identité entraîne la continuité du produit de convolution sur \mathcal{S} . Il reste à montrer (2.1). L'identité ci-dessus montre que $f \star g = \check{f}\check{g}$. D'où (2.1) en évaluant cette dernière relation au point $-u$.

□

Définition 2.6.3 (cas des fonctions mesurables) Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions mesurables. On suppose qu'il existe une partie $E \subset \mathbb{R}$ de mesure nulle telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| |g(x-t)| dt < +\infty$$

pour tout $x \notin E$. On pose alors pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus E$ $f \star g(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt$.

On obtient ainsi une fonction $f \star g$ définie presque partout, que l'on appelle la fonction **convoluée** de f et g .

Exemple : Soient $f, g \in L^1$. Alors

$$\begin{aligned} \|f \star g\|_{L^1} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t) dt \right| dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t)| |g(t)| dt dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t)| |g(t)| dx dt = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} < +\infty. \end{aligned}$$

Le théorème de Fubini montre alors que $f \star g(x)$ est défini pour presque tout x . De plus, il existe deux suites $f_n, g_n \in \mathcal{S}$ telles que $\|f - f_n\|_{L^1} \rightarrow 0$ et $\|g - g_n\|_{L^1} \rightarrow 0$. On en déduit que $\widehat{f_n}$ et $\widehat{g_n}$ converge (uniformément) vers \widehat{f} et \widehat{g} respectivement. D'autre part, l'inégalité $\|f \star g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$ montre que $\|f_n \star g_n - f \star g\|_{L^1} \rightarrow 0$. Ainsi $\widehat{f_n \star g_n}$ converge (uniformément) vers $\widehat{f \star g}$, puis

$$\widehat{f}(u)\widehat{g}(u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \widehat{f_n}(u)\widehat{g_n}(u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \widehat{f_n \star g_n}(u) = \widehat{f \star g}(u).$$

On a donc montré le résultat suivant.

Proposition 2.6.4 Si $f, g \in L^1$, alors $f \star g(x)$ est défini pour presque tout x et $f \star g \in L^1$. De plus

$$\|f \star g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} \quad \text{et} \quad \widehat{f \star g} = \widehat{f} \widehat{g}.$$

Proposition 2.6.5 Le produit de convolution sur L^1 vérifie les propriétés suivantes, avec $a < b$ et $c < d$ dans la dernière assertion.

Commutativité : $f \star g = g \star f$.

Bilinéarité : $f \star (a g + b h) = a f \star g + b f \star h$ pour $a, b \in \mathbb{C}$.

Associativité : $f \star (g \star h) = (f \star g) \star h$ pour $f, g, h \in \mathcal{S}$.

Si $f, g \in L^1$, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f \star g(x) dx = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx \right)$

Si $\begin{cases} f = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \setminus [a, b], \\ g = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \setminus [c, d], \end{cases}$ alors $f \star g = 0$ sur $\mathbb{R} \setminus [a+c, b+d]$.

DÉMONSTRATION : La bilinéarité est immédiate. La commutativité découle d'un changement de variable affine. Les deux propriétés suivantes résultent du théorème de Fubini. Enfin, si $x \notin [a+c, b+d]$, alors ou bien $t \notin [a, b]$ et $f(t) = 0$, ou bien $t \in [a, b]$ et $x-t \notin [c, d]$ et $g(x-t) = 0$. Ainsi on a $f(t)g(x-t) = 0$ pour tout t , puis $f \star g(x) = 0$. \square

Exercice 2.6.6 Montrer que dans \mathcal{S} , on a l'identité $(f \star g) \star h = \frac{1}{2\pi} \widehat{\check{f}\check{g}\check{h}}$. En déduire une autre preuve de l'associativité, d'abord dans \mathcal{S} , puis dans L^1 à l'aide du lemme d'approximation.

Donnons d'autres exemples où le produit est bien défini. En sus des espaces \mathcal{S} , L^1 et L^2 déjà introduits, on note

\mathcal{B} : L'espace des fonctions mesurables bornées

\mathcal{BC} : L'espace des fonctions continues bornées,

\mathcal{C}_c : L'espace des fonctions continues à support compact (c'est-à-dire nulle en dehors d'un segment).

Alors les produits suivants sont encore définis

$$\begin{aligned} \mathcal{S} \star \mathcal{S} &\subset \mathcal{S} & ; & \quad \mathcal{C}_c \star \mathcal{C}_c \subset \mathcal{C}_c; \\ L^1 \star L^1 &\subset L^1 & ; & \quad L^1 \star L^2 \subset L^2; \\ L^1 \star \mathcal{B} &\subset \mathcal{BC} & ; & \quad L^2 \star L^2 \subset \mathcal{BC}. \end{aligned}$$

De plus, il existe pour chacun d'eux une inégalité analogue à celle de la proposition 2.6.4 avec les "normes" associées aux espaces considérés, avec notamment

$$\|f\|_0 := \inf\{M \mid |f(x)| \leq M \text{ presque partout}\}$$

pour tout $f \in \mathcal{B}$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \|f \star g\|_{L^1} &\leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} & ; & \quad f \in L^1, \quad g \in L^1, \\ \|f \star g\|_{L^2} &\leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^2} & ; & \quad f \in L^1, \quad g \in L^2, \\ |f \star g(x)| &\leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2} & ; & \quad f, g \in L^2, \quad x \in \mathbb{R}, \\ |f \star g(x)| &\leq \|f\|_{L^1} \|g\|_0 & ; & \quad f \in L^1, g \in \mathcal{B}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ces inégalités entraînent les faits suivant.

Proposition 2.6.7 (Continuité) *Le produit de convolution est continu dans les sens suivant.*

1. Si $f_n \rightarrow f$ et $g_n \rightarrow g$ en norme L^1 alors $f_n \star g_n \rightarrow f \star g$ en norme L^1 .
2. Si $f_n \rightarrow f$ et $g_n \rightarrow g$ en norme L^2 , alors $f_n \star g_n(x) \rightarrow f \star g(x)$ uniformément pour $x \in \mathbb{R}$.
3. Si $f_n \rightarrow f$ en norme L^1 et $g_n \rightarrow g$ en norme L^2 alors $f_n \star g_n \rightarrow f \star g$ en norme L^2 .
4. Si $f_n \rightarrow f$ en norme L^1 et si $g_n \rightarrow g \in \mathcal{B}$ uniformément pour $x \in \mathbb{R}$, alors $f_n \star g_n \rightarrow f \star g$ uniformément.

Proposition 2.6.8 *Le produit de convolution vérifie les propriétés suivantes.*

1. Si $f, g \in L^2$, alors $fg \in L^1$ et $\widehat{fg} = \frac{1}{2\pi} \widehat{f} \star \widehat{g}$.
2. Si $f \in L^1$ et $g \in L^2$ alors $f \star g \in L^2$ et $\widehat{f \star g} = \widehat{f} \widehat{g} \in L^2$.

Nous terminons par une dernière propriété, qui illustre l'effet régularisant du produit de convolution.

Théorème 2.6.9 *Soit $f \in L^1$ et $g \in \mathcal{S}$. On suppose que $g(t) \geq 0$ pour tout t et que $\|g\|_{L^1} = 1$. Posons $g_\epsilon(t) := \frac{1}{\epsilon}g(t/\epsilon)$ pour $\epsilon > 0$. Alors*

(i) $f \star g_\epsilon$ est de classe C^∞ et pour $n \in \mathbb{N}$, $(f \star g_\epsilon)^{(n)} = f \star g_\epsilon^{(n)}$.

(ii) $\|f - f \star g_\epsilon\|_{L^1} \rightarrow 0$ quand $\epsilon \rightarrow 0$.

(iii) $f \star g_\epsilon(x) \rightarrow f(x)$ quand $\epsilon \rightarrow 0$ en tout point x où f est continue.

DÉMONSTRATION : Montrons (i). Puisque $g_\epsilon \in \mathcal{S}$, on a pour tous $x, t \in \mathbb{R}$, $|g'_\epsilon(x-t)| \leq M_{0,1}(g_\epsilon)$. On en déduit que $|\frac{\partial}{\partial x}(g_\epsilon(x-t)f(t))| \leq M_{0,1}(g_\epsilon)|f(t)|$. Ainsi la fonction $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g_\epsilon(x-t) dt$ est dérivable et on a bien $(f \star g_\epsilon)' = f \star g'_\epsilon$. Puisque les dérivées successives de g_ϵ sont encore dans \mathcal{S} , l'assertion (i) s'en déduit par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Montrons (ii). Supposons d'abord que $f \in \mathcal{S}$. Alors $\widehat{f \star g_\epsilon}(u) = \widehat{f}(u)\widehat{g_\epsilon}(u) = \widehat{f}(u)\widehat{g}(\epsilon u)$. Mais l'exercice 2.3.6 montre que $\widehat{f}\widehat{g_\epsilon}$ converge dans \mathcal{S} vers $\widehat{g}(0)f = \widehat{f}$. La transformation de Fourier (inverse) est une opération continue dans \mathcal{S} . On en déduit que $f \star g_\epsilon = \check{f} \star \check{g_\epsilon}/(2\pi)$ converge dans \mathcal{S} vers $1/(2\pi)\check{f} = f$. La convergence a donc aussi lieu en norme L^1 , ce qui montre l'assertion (ii) dans le cas où $f \in \mathcal{S}$.

Pour $f \in L^1$ quelconque, il existe une suite de fonctions $f_n \in \mathcal{S}$ telle que $\|f - f_n\|_{L^1} \rightarrow 0$. Alors $\|(f - f_n) \star g_\epsilon\|_{L^1} \leq \|f - f_n\|_{L^1} \|g_\epsilon\| = \|f - f_n\|_{L^1}$. Donc $f_n \star g_\epsilon$ converge dans L^1 vers $f \star g_\epsilon$ uniformément par rapport à ϵ . Ainsi $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_n \star g_\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \star g_\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f \star g_\epsilon$.

Montrons (iii). On a $f \star g_\epsilon(x) - f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x-t) - f(x))g_\epsilon(t) dt$. Si f est bornée, alors le théorème de convergence dominée montre que cette dernière intégrale converge vers zéro. Si $f \in L^1$ est quelconque, soit $f_n(t) := f(t)$ si $f(t) < n$ et $f_n(t) = 0$ sinon. Alors $f_n \in L^1$ est bornée. Par continuité de f en x , il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $|f(t) - f(x)| < 1$ pour tout $|t-x| \leq \alpha$. Alors pour $n \geq 1 + |f(x)|$, on a $|(f - f_n) \star g_\epsilon(x)| \leq \int_{|t| > \alpha} |f(x-t)|g_\epsilon(t) dt \leq M_{2,0}(g) \left(\frac{\epsilon}{\alpha}\right)^2 \frac{1}{\epsilon} \|f\|_{L^1}$. On en déduit que lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, $f \star g_\epsilon$ converge vers $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_n \star g_\epsilon(x) = f(x)$. \square

Exemples et applications

1) On se propose de calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$f(x) = e^{-|x|} \frac{\sin x}{x}.$$

On a vu que la fonction $x \mapsto e^{-|x|}$ est la transformée de Fourier de la fonction

$$g(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

et que sinc est la transformée de Fourier de la fonction χ définie par $\chi(x) = 1/2$ pour $|x| \leq 1$ et $\chi(x) = 0$ ailleurs. De plus, $g \star \chi \in L^1$ comme produit de deux fonctions L^1 et $\widehat{g \star \chi} = \widehat{g} \cdot \widehat{\chi} = f \in L^1$. Enfin, comme g et χ sont aussi L^2 , le produit $g \star \chi$ est continu. On peut donc appliquer théorème de réciprocity pour les fonctions L^1 . Ainsi

$$\widehat{f}(u) = \widehat{\widehat{g \star \chi}}(u) = 2\pi g \star \chi(-u) = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\chi(-u-t) dt = 2 \int_{-1-u}^{1-u} \frac{dt}{1+t^2}.$$

On en déduit que $\widehat{f}(u) = 2\arctg(u+1) - 2\arctg(u-1)$. La fonction $g \star \chi$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et on retrouve qu'elle est bien dans $L^1 \cap L^2$. Elle est en effet équivalente à $4/u^2$ quand $|u| \rightarrow +\infty$ (cela découle de la relation élémentaire $\arctg(x) + \arctg(1/x) = \pi/2$ pour $x \neq 0$).

2) Rappelons que le théorème de réciprocity dans L^1 s'applique seulement aux fonctions dont la transformée est intégrable. Or si $\widehat{f} \in L^1$, alors $\widehat{f}(u)$ tend vers zéro quand u tend vers l'infini car \widehat{f} est intégrable et *uniformément continue*. En particulier $|\widehat{f}(u)| \leq 1$ pour $|u|$ assez grand et ainsi $|\widehat{f}(u)|^2 \leq |\widehat{f}(u)|$ près de l'infini. On en déduit que

$$(f \in L^1 \text{ et } \widehat{f} \in L^1) \Rightarrow \widehat{f} \in L^2.$$

Mais que peut on dire de f si l'on suppose seulement que $\widehat{f} \in L^2$?

Proposition 2.6.10 $(f \in L^1 \text{ et } \widehat{f} \in L^2) \Rightarrow f \in L^2.$

DÉMONSTRATION : Supposons $f \in L^1$ et $\widehat{f} \in L^2$. Soit $g \in \mathcal{S}$ telle que $g \geq 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = 1$. Posons $g_\epsilon(x) := g(x/\epsilon)/\epsilon$. Alors $f \star g_\epsilon$ converge vers f dans L^1 quand $\epsilon \rightarrow 0$. On en déduit en particulier qu'il existe une suite $\epsilon_n \rightarrow 0$ telle que $f \star g_{\epsilon_n}(x)$ converge vers $f(x)$ pour presque tout x . D'autre part, puisque $f \in L^1$ et $g_{\epsilon_n} \in L^2 \cap L^1$, on a $f \star g_{\epsilon_n} \in L^2 \cap L^1$. Aussi $\widehat{f \star g_{\epsilon_n}} = \widehat{f} \widehat{g_{\epsilon_n}} \in L^2$ et $\widehat{g_{\epsilon_n}}(u) = \widehat{g}(\epsilon_n u)$. Le théorème de convergence dominée montre alors que $\widehat{f \star g_{\epsilon_n}} \rightarrow \widehat{f}$ dans L^2 . La suite $\widehat{f \star g_{\epsilon_n}}$ est donc de Cauchy dans L^2 , et il en est de même de la fonction $f \star g_{\epsilon_n}$ d'après le théorème de Parseval. Il existe donc une fonction $\tilde{f} \in L^2$ telle que $f \star g_{\epsilon_n} \rightarrow \tilde{f} \in L^2$. Enfin, quitte à extraire une sous-suite, la suite $f \star g_{\epsilon_n}(x)$ converge vers $\tilde{f}(x)$ pour presque tout x . On en déduit que $f(x) = \tilde{f}(x)$ presque partout, puis que $f \in L^2$. \square

Théorème 2.6.11 (Réciprocité presque partout) Soit $f \in L^1$.

$$\text{Si } \widehat{f} \in L^1, \text{ alors } f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(u) e^{ixu} du \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R}.$$

En particulier, il existe une fonction continue qui coïncide avec f presque partout.

DÉMONSTRATION : Puisque $\widehat{f} \in L^1$, on a aussi que $\widehat{f} \in L^2$ et la proposition ci-dessus montre alors que $f \in L^2$. Or les transformations de Fourier dans L^1 et dans L^2 coïncident sur $L^1 \cap L^2$. On peut donc appliquer à f la théorie L^2 . On a $\frac{1}{2\pi} \check{f} = f$ dans L^2 et en particulier $\frac{1}{2\pi} \check{f}(u) = f(u)$ presque partout. \square

Exercice 2.6.12 Pour $\alpha > 0$, soit $G_\alpha(u) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(x) e^{ixu} e^{-\alpha x^2/2} dx$.

1. Montrer à l'aide du théorème de l'échange que $G_\alpha(u) = \frac{1}{2\pi} f \star g_{\sqrt{\alpha}}$, avec $g(t) := \sqrt{2\pi} \exp(-\frac{t^2}{2})$ et les notations du théorème 2.6.9.
2. En déduire que G_α converge vers f en norme L^1 quand $\alpha \rightarrow 0$, puis qu'il existe une suite $\alpha_n \rightarrow 0$ telle que $G_{\alpha_n}(u) \rightarrow f(u)$ pour presque tout u .
3. On suppose que $\widehat{f} \in L^1$. Montrer à l'aide du théorème de convergence dominée que $G_\alpha(u)$ converge vers $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(x) \exp(iux) dx$ quand α tend vers zéro.. En déduire une démonstration du théorème 2.6.11 plus explicite.

Corollaire 2.6.13 (Unicité)

- 1) Soient $f, g \in L^1$. Si $\widehat{f} = \widehat{g}$, alors $f = g$ presque partout.
- 2) Soient $f, g \in L^2$. Si $\widehat{f} = \widehat{g}$ presque partout, alors $f = g$ presque partout.

DÉMONSTRATION :

1) Appliquons le théorème 2.6.11 à $f - g$. On a $f - g \in L^1$ et $\widehat{f - g} = \widehat{f} - \widehat{g} = 0 \in L^1$. Donc $f(x) - g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\widehat{f - g})(u) e^{iux} du = 0$ presque partout.

2) Si $\widehat{f}(u) = \widehat{g}(u)$ presque partout, alors $0 = \|\widehat{f} - \widehat{g}\|_{L^2} = \sqrt{2\pi} \|f - g\|_{L^2}$ d'après le théorème 2.5.3. Ainsi $f = g$ dans L^2 , puis $f(x) = g(x)$ presque partout. \square

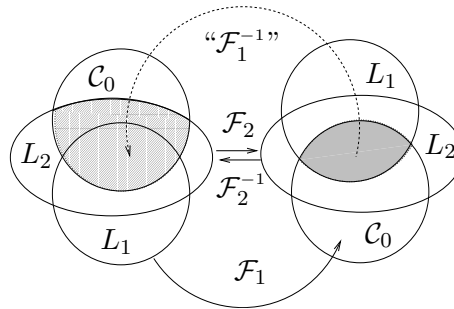


FIG. 2.1 – Résumé graphique des différentes transformations de Fourier

3) Appliquons la théorie de Fourier aux équations différentielles ordinaires linéaires.

Proposition 2.6.14 *Soit $f \in \mathcal{S}$ et $P = a_n + a_{n-1}X + \dots + a_1X^{n-1} + X^n \in \mathbb{C}[X]$ tel que P n'a pas de zéro sur $\mathbb{R}i$, alors l'équation*

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = f$$

admet une unique solution dans L^1 . De plus, elle est de la forme $y := E \star f$, où $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est l'unique fonction telle que $\widehat{E}(u) = 1/P(iu)$.

DÉMONSTRATION : Verifions que la fonction E existe. Décomposons la fraction $1/P$ en éléments simples sur \mathbb{C} .

$$\frac{1}{P(z)} = \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{(z - z_k)^{\alpha_k}},$$

avec $c_k \in \mathbb{C}$, $z_k = a_k + ib_k \in \mathbb{C}$, $a_k \neq 0$, et $\alpha_k \in \mathbb{N}^*$.

$$\left| \begin{array}{l} \text{Or } \frac{1}{(iu - a - ib)^n} = \frac{1}{(-a)^n} \frac{1}{\left(1 + i\frac{u-b}{-a}\right)^n} = (-a)^{-n} \widehat{f}_n\left(\frac{u-b}{-a}\right), \\ \text{avec } f_n(t) = H(t) \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t}. \end{array} \right.$$

Ainsi $\mathcal{F}\left(-\text{sign}(a) \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{(a+ib)x} H(-ax)\right)(u) = \frac{1}{(iu - (a+ib))^n}$ par les propriétés élémentaires de la transformation de Fourier.

$$\text{On pose alors } E(t) := \sum_{k=1}^N c_k \frac{\text{sign}(-a_k)}{(\alpha_k - 1)!} H(-\text{sign}(a_k)t) t^{\alpha_k - 1} e^{(a_k + ib_k)t}.$$

Si maintenant $f \in \mathcal{S}$. Alors $y := E \star f$ est de classe \mathcal{C}^∞ d'après le théorème 2.6.9 mais aussi dans L^1 puisque $E, f \in L^1$. Et il en est de même pour les dérivées successives puisque $y^{(k)} = E \star f^{(k)}$. Enfin, on a $\widehat{y^{(k)}} = \widehat{E} \widehat{f^{(k)}} = (iu)^k \widehat{E} \widehat{f}$. On en déduit que

$$\mathcal{F}(y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny - f) = \frac{P(iu)}{P(iu)} \widehat{f}(u) - \widehat{f}(u) = 0.$$

L'injectivité de la transformation de Fourier montre donc que $E \star f$ est solution de l'équation de l'énoncé. L'unicité vient de ce que l'on connaît toutes les solutions de l'équation homogène associée, qui sont des combinaisons linéaires de fonctions de la forme $Q(x)e^{rx}$ avec $P(r) = 0$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$ qui sont dans L^1 seulement si elles sont nulles. \square

Interprétation phénoménologique. En physique, de nombreux phénomènes peuvent être décrits de la manière suivante. La donnée expérimentale est modélisée par un signal d'entrée S_e dépendant d'un certain nombre de paramètres, par exemple de temps et d'espace. Celui-ci est transformé par un système physique

en un signal de sortie S_s et l'on étudie l'opérateur $S_e \mapsto S_s$. L'exemple de la proposition 2.6.14 est un cas particulier d'un résultat général qui s'énonce plus facilement dans le cadre de la théorie des distributions.

On peut en effet démontrer que si l'opérateur est

- a) *linéaire* : si $S_1 \mapsto S'_1$ et $S_2 \mapsto S'_2$, alors $aS_1 + bS_2 \mapsto aS'_1 + bS'_2$,
- b) *invariant par translation* : si $S_1(t) \mapsto S'_1(t)$, alors $S_1(t - \tau) \mapsto S'_1(t - \tau)$,
- c) *causal* : si $S_e(t) = 0$ pour tout $t < 0$, alors $S_{sortie}(t) = 0$ pour tout $t < 0$,
- d) *continu* (au sens des distributions),

alors l'opérateur se représente à l'aide d'une distribution sous la forme $S_s = D \star S_e$.

Exemples :

1. S_e est la tension d'entrée d'un circuit électrique et S_s sa tension de sortie.
2. $S_s(x, t)$ est l'intensité lumineuse en tout point d'une plaque photographique éclairée à travers un système optique par les rayons issus d'une source lumineuse $S_e(u, t)$.
3. $S_s(t)$ est le mouvement d'une masse soumise à l'excitation $S_e(t)$ d'un ressort amorti.
4. $S_s(x, t)$ est le champ électromagnétique engendré par une distribution de charges et de courant $\rho(x, t), j(x, t)$.

4) Étudions l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

pour une barre indéfiniment longue. Sa température est donnée par une fonction $\theta_o : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ à l'instant $t = 0$ et on cherche une solution pour $t > 0$. On va supposer que $\theta_o \in \mathcal{S}$ et on va chercher une solution qui reste dans \mathcal{S} , c'est-à-dire telle que la fonction $x \mapsto u(x, t)$ soit dans \mathcal{S} pour chaque instant $t \geq 0$. Alors, en prenant la transformée de Fourier par rapport à la variable x et en utilisant la proposition 2.3.8, l'équation de la chaleur se transforme en une équation différentielle ordinaire

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = (i\xi)^2 \hat{u} = -\xi^2 \hat{u} \quad \text{avec} \quad \hat{u}(\xi, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{ix\xi} dx.$$

Ainsi

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{u}(\xi, 0) e^{-\xi^2 t} = \hat{\theta}_o(\xi) e^{-\xi^2 t}.$$

On déduit du corollaire que pour $t > 0$

$$u(x, t) = W(\circ, t) \star \theta_o(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_o(x - \xi) e^{-\frac{\xi^2}{4t}} d\xi$$

où $W(x, t) := \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ est le noyau de Weierstrass.

Un peu d'histoire. Si l'on prend $\theta_o(x) = 1$ pour $x > 0$, $\theta_o(x) = -1$ pour $x < 0$ et $\theta_o(0) = 0$, bien que θ_o ne soit pas à décroissance rapide, on constate que $u = W \star \theta_o$ est solution de l'équation de la chaleur pour $t > 0$, que $u(0, t) = 0$ pour $t > 0$ et que pour $x > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = 1.$$

En négligeant la courbure de la terre, ce qui est légitime pour modéliser la température proche de sa surface, William Thomson, alias Lord Kelvin, utilisa ce modèle pour estimer l'âge de la terre. En effet, en mesurant la température moyenne T_o de fusion de diverses roches, en supposant qu'aucune réaction chimique ne peut durer plusieurs millions d'années et ralentir sensiblement le refroidissement de la terre depuis sa formation et surtout en supposant que la terre s'est solidifiée "d'un bloc" (il n'y a jamais eu de croûte solide flottant sur un noyau liquide) dans les premiers instants de la vie de la terre (à la température T_o), notre modèle donne la loi, avec les paramètres non réduits

$$U(x, t) = \frac{T_o}{2\sqrt{\pi\kappa t}} \int_0^{+\infty} \left(\exp\left(-\frac{(x-u)^2}{4\kappa t}\right) - \exp\left(-\frac{(x+u)^2}{4\kappa t}\right) \right) du.$$

Kelvin en déduit la variation de température en fonction de la profondeur près de la surface (elle aussi mesurable)

$$v = \frac{\partial U}{\partial x}(0, t) = \frac{T_o}{\sqrt{\pi\kappa t}}.$$

Comme la conductivité thermique et la chaleur spécifique de la croûte terrestre peut elle aussi être estimée, Kelvin en déduit une valeur probable de l'âge de la terre

$$t = \frac{T_o^2}{v^2 \pi \kappa}$$

d'environ 100 millions d'années, et certainement pas plus de 400 millions! Les contemporains de Kelvin n'ont pas manqué d'être troublés par une telle estimation. D'abord parce que les connaissances du dernier quart du XIX^e siècle en géologie et géomorphologie semblaient incompatibles avec un tel résultat, mais Kelvin suggéra que l'évolution de la planète avait du être plus rapide dans ses premiers âges, du fait de sa température plus élevée, qui augmentait la fréquence des tremblements de terre et autres phénomènes volcaniques. Une objection plus sérieuse vint de la toute récente théorie de l'évolution des espèces de Darwin, qui suppose des périodes géologiques beaucoup plus longues pour que des mutations biologiques soient observées.

Lord Kelvin n'a pas tenu, ne pouvait pas tenir compte d'une source de chaleur due à un phénomène physique découvert quelques décennies plus tard : la radioactivité, longuement étudiée par Marie et Pierre Curie...Le calcul précédent montre que cette source n'est pas du tout négligeable pour expliquer la température actuelle de la Terre.

2.7 La transformation de Fourier rapide

La transformation de Fourier rapide (souvent notée FFT, pour *Fast Fourier Transform*) est un algorithme de calcul rapide. Son succès et son importance tiennent à la fois au développement de l'informatique et à la profusion des applications techniques où l'on utilise la transformation de Fourier intensivement. En voici le principe, tel qu'il a été inventé par Cooley et Tukey au cours des années 1960.

Un calcul sur ordinateur portant toujours, in fine, sur des nombres entiers, la première étape consiste à discrétiser le signal f et sa transformée de Fourier. La proposition qui suit montre comment les valeurs d'une transformée de Fourier peuvent être approchée par le calcul des coefficients de Fourier d'une fonction périodique bien choisie. Il restera ensuite à développer un algorithme rapide pour calculer ces coefficients.

Attention : pour alléger les notations, la définition des fonctions e_λ donnée ici diffère de celle du premier chapitre d'un facteur 2π .

Proposition 2.7.1 *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux. Soient $A, B > 0$.*

1) *Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier $N_{A,B,\epsilon} > AB$ et des coefficients $a_{n,\epsilon}^{A,B} \in \mathbb{C}$ pour $-N_{A,B,\epsilon} \leq n \leq N_{A,B,\epsilon}$ tels que*

$$\left\| \chi_A \left(f - \sum a_{n,\epsilon}^{A,B} e_{\frac{n}{2A}} \right) \right\|_{L^1} \leq \epsilon,$$

où la somme porte sur les entiers $-N_{A,B,\epsilon} \leq n \leq N_{A,B,\epsilon}$, où χ_A est la fonction égale à 1 sur $[-A, A]$ et nulle ailleurs, et où $e_\lambda(t) := \exp(2\pi i \lambda t)$ pour tous $\lambda, t \in \mathbb{R}$.

2) *Si de plus $f \in L^1$, il existe deux constantes $A_0 > 0$ et $B_0 > 0$ telles que pour tout $u \in \mathbb{R}$, pour tous $A > A_0$, $B > B_0$, et $\epsilon > 0$, on a*

$$\left| \widehat{f}(u) - 2A \sum_{n=-AB}^{AB} a_{n,\epsilon}^{A,B} \chi_{\frac{\pi}{2A}} \left(u - \frac{n\pi}{A} \right) \right| \leq 2\epsilon + \|(1 - \chi_A)f\|_{L^1}.$$

DÉMONSTRATION : Démontrons 1). La fonction f est continue par morceaux sur $[-A, A]$. Prolongeons $\chi_A f$ en une fonction périodique de période $2A$. Soit $S_N(f) = \sum a_n e_{n/2A}$ la somme partielle de sa série de Fourier, où les indices varient entre $-N$ et N . Alors le théorème de Fejèr montre que la moyenne

$$f_N := \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N S_k(f)$$

converge simplement vers la fonction $t \mapsto 1/2(f(t+0) + f(t-0))$ sur $(-A, A)$ et que pour tout $|t| < A$, on a

$$|f_N(t)| \leq \max_{|x| \leq A} |f(x)|.$$

Le théorème de convergence dominée montre que $\|\chi_A(f - f_N)\|_{L^1}$ converge vers zéro, ce qui montre 1) puisque les fonctions f_N sont des polynômes trigonométriques, combinaisons linéaires de fonctions exponentielles de la forme $e_{n/2A}$.

Démontrons 2). les coefficients du polynôme trigonométrique f_N sont donnés par les intégrales

$$a_n(f_N) = \frac{1}{2A} \int_{-A}^A f_N(t) e^{-\frac{n}{2A}2\pi it} dt.$$

D'après 1), on a l'estimation

$$|2Aa_n(f_N) - \widehat{f}\left(\frac{n\pi}{A}\right)| \leq \epsilon + \|(1 - \chi_A)f\|_{L^1}.$$

D'autre part, nous savons que \widehat{f} est uniformément continue et que $\widehat{f}(u)$ converge vers zéro quand $|u|$ tend vers $+\infty$. Choisissons $A_0 > 0$ et $B_0 > 0$ tels que

$$\begin{aligned} |u - v| < \frac{\pi}{2A_0} &\Rightarrow |\widehat{f}(u) - \widehat{f}(v)| \leq \epsilon, \\ |u| > B_0\pi &\Rightarrow |\widehat{f}(u)| \leq \epsilon. \end{aligned}$$

On suppose que

$$\|\chi_A(f - f_N)\|_{L^1} \leq \epsilon \quad ; \quad f_N = \sum a_n e_{n/2A} \quad ;$$

où f_N est un polynôme trigonométrique, sommé sur les indices $-N \leq n \leq N$, avec $N > AB$, $A > A_0$ et $B > B_0$.

Alors on a les deux estimations suivantes.

– **Pour** $|u| < B\pi + \frac{\pi}{2A}$, il existe un unique entier tel que

$$\frac{n\pi}{A} - \frac{\pi}{2A} \leq u < \frac{n\pi}{A} + \frac{\pi}{2A} \quad ; \quad -AB \leq n \leq AB \quad ;$$

et l'on a

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(u) - 2Aa_n(f_N)| &\leq \left| \widehat{f}\left(\frac{n\pi}{A}\right) - \widehat{f}(u) \right| + \left| \widehat{f}\left(\frac{n\pi}{A}\right) - 2Aa_n(f_N) \right| \\ &\leq 2\epsilon + \|\chi_A(f - f_N)\|_{L^1}. \end{aligned}$$

– **Pour** $|u| \geq B\pi + \frac{\pi}{2A}$, on a

$$|\widehat{f}(u)| \leq \epsilon \leq 2\epsilon + \|(1 - \chi_A)f\|_{L^1}.$$

Ces deux estimations établissent 2).

□

Corollaire 2.7.2 *Avec les hypothèses et les notations de la proposition précédente, quand A et B tendent vers $+\infty$ et que ϵ converge vers zéro, la fonction définie par*

$$g_{A,B,\epsilon}(u) := 2A \sum_{n=-AB}^{AB} a_{n,\epsilon}^{A,B} \chi_{\frac{\pi}{2A}} \left(u - \frac{n\pi}{A} \right)$$

converge uniformément vers \widehat{f} sur \mathbb{R} .

DÉMONSTRATION : Ceci découle immédiatement de la seconde partie de la proposition 2.7.1 en remarquant que $\|(1 - \chi_A)f\|_{L^1}$ converge vers zéro quand A tend vers $+\infty$.

□

Nous avons donc réduit le calcul approché d'une transformée de Fourier à celui des coefficients d'une série de Fourier. Supposons donc que sur un intervalle $[-A, A]$, la fonction f est donnée par un polynôme trigonométrique de période $2A$. Quitte à reparamétriser f par $x \mapsto 2Ax - 1/2$, on peut supposer que f est décrite sur $[0, 1)$ par un polynôme trigonométrique de degré N élevé, de la forme

$$f(t) = \sum_{n=-N}^N a_n e^{2\pi i n t},$$

dont on souhaite calculer les coefficients de Fourier a_n pour tout $|n| \leq N$ avec le moins d'opérations élémentaires possible.

L'objectif de discrétisation du problème sera atteint s'il est possible de calculer ces coefficients uniquement à partir des valeurs $f(m/M)$ avec $M \in \mathbb{N}^*$ assez grand et $0 \leq m < M$ entier, ce que montre la proposition suivante.

Proposition 2.7.3 (Transformation de Fourier discrète) *Soient f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , $p < q$ dans \mathbb{Z} , et $q - p + 1$ scalaires $a_n \in \mathbb{C}$, avec $p \leq n \leq q$, tels que*

$$f(t) = \sum_{n=p}^q a_n e^{2\pi i n t} = \sum_{n=p}^q a_n e_n(t)$$

Alors pour tout entier $M \geq q - p + 1$, on a

$$a_n = \frac{1}{M} \sum_{m \in \mathbb{Z}/M} f\left(\frac{m}{M}\right) e_{-n}\left(\frac{m}{M}\right).$$

DÉMONSTRATION : Cela résulte immédiatement, par linéarité, de l'observation que pour $\ell \in \mathbb{Z}$, on a

$$\frac{1}{M} \sum_{m \in \mathbb{Z}/M} e_\ell\left(\frac{m}{M}\right) e_{-n}\left(\frac{m}{M}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = n \pmod{M}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

vérifions cette dernière identité. On a

$$\begin{aligned} S_{n,\ell} &:= \sum_{m \in \mathbb{Z}/M} e_{\ell-n} \left(\frac{m}{M} \right) = \sum_{m \in \mathbb{Z}/M} e_{\ell-n} \left(\frac{m+1}{M} \right) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}/M} e_{\ell-n} \left(\frac{m}{M} \right) e_{\ell-n} \left(\frac{1}{M} \right) = S_{n,\ell} e^{2\pi i(\ell-n)/M}. \end{aligned}$$

On a bien $S_{n,\ell} = 0$ si n et ℓ ne sont pas congrus modulo M , car alors on a $\exp(2\pi i(\ell-n)/M) \neq 1$. En outre, on a la relation $S_{n,n+kM} = M$, avec $k \in \mathbb{Z}$, car alors $e_{kM}(m/M) = 1$ pour tout $m \in \mathbb{Z}/M$. \square

Évaluons la vitesse de cet algorithme. Chaque calcul de coefficient nécessite M multiplications (les multiplications de $f(m/M)$ par $e_{-n}(m/M)/M$) et de $M-1$ additions, soit $2M-1$ opérations pour chaque coefficient, puis au total $(q-p+1)(2M-1)$ opérations élémentaires pour calculer l'ensemble des coefficients. Partant de $f = \sum_{|n| \leq N} a_n e_n$, on obtient ainsi un algorithme en $O(N^2)$ opérations élémentaires en prenant $M = O(N)$ (on peut choisir par exemple $M = 2N+1$) dans la proposition ci-dessus.

Nous allons décrire un algorithme qui ne nécessite que $O(N \log N)$ opérations élémentaires. En voici le principe.

Considérons successivement les valeurs $f(0)$, puis $f(1/2)$, puis $f(1/4)$ et $f(3/4)$, puis $f(1/8)$, $f(3/8)$, $f(5/8)$ et $f(7/8)$, et cetera... (chaque nouveau point de \mathbb{R}/\mathbb{Z} est obtenu en prenant le milieu de deux points successifs obtenus aux étapes précédentes). On a $f(0) = \sum a_n$ et $f(1/2) = \sum (-1)^n a_n$. Par combinaisons de $f(0)$ et de $f(1/2)$, on obtient ainsi la somme des a_n pour les indices pairs, et celle pour les indices impairs.

Le théorème suivant généralise cette observation et décrit une procédure qui permet de calculer des sommes de a_n pour des ensembles d'indices réduits de moitié à chaque étape. On obtient donc des sommes contenant un seul indice au bout de $O(\log N)$ étapes.

Théorème 2.7.4 (Transformation de Fourier rapide) *Soient $p < q$ dans \mathbb{Z} , soient $a_n \in \mathbb{C}$ pour $p \leq n \leq q$. Soit $\mu > 0$ tel que $2^\mu > q - p$. Pour $0 \leq j \leq \mu$ et pour $0 \leq k < 2^j$, on définit les nombres*

$$A(j,k) := \sum_{n=k \pmod{2^j}} a_n \quad ; \quad B(j,k) := \sum_{n=k \pmod{2^j}} a_n \zeta_j^n, \quad \text{avec } \zeta_j := e^{2\pi i/2^{j+1}}.$$

Alors ces nombres se calculent par étapes successives suivant l'algorithme qui suit à partir des nombres $f(m/2^\mu)$, où f est la fonction

$$f = \sum_{n=p}^q a_n e_n.$$

Première étape. On pose $A(0,0) = f(0)$.

Deuxième étape. On pose $B(0, 0) = f(1/2)$.

(2j + 3)-ième étape. Supposons construits $A(j, k)$ et $B(j, k)$ pour $0 \leq k < 2^j$. Alors on pose

$$\begin{aligned} A(j+1, k) &= \frac{1}{2}A(j, k) + \frac{1}{2}\zeta_j^{-k}B(j, k), \\ A(j+1, k+2^j) &= \frac{1}{2}A(j, k) - \frac{1}{2}\zeta_j^{-k}B(j, k). \end{aligned}$$

(2j + 4)-ième étape. On construit pour $0 \leq k < 2^j$ les nombres $A(j+1, k)(f_j)$ et $A(j+1, k+2^j)(f_j)$ en exécutant les $2j+1$ premières étapes avec pour nouvelle fonction $f_j(t) := f(t + 1/2^{j+2})$. Puis on pose

$$B(j+1, k) := A(j+1, k)(f_j) \quad ; \quad B(j+1, k+2^j) := A(j+1, k+2^j)(f_j).$$

Alors les coefficients a_k s'obtiennent par ce procédé à la $2\mu+1$ -ième étape, après $\mu 2^{\mu+1}$ opérations élémentaires à partir des nombres $f(m/2^\mu)$ pour $0 \leq m < 2^\mu$.

DÉMONSTRATION : On a bien

$$f(0) = \sum_{n=p}^q a_n = A(0, 0) \quad ; \quad f(1/2) = \sum_{n=p}^q a_n (e^{i\pi})^n = \sum_{n=p}^q a_n \zeta_0^n = B(0, 0),$$

ce qui montre que les deux premières étapes calculent bien les nombres souhaités. Montrons que les étapes de rang $2j+3$ et $2j+4$ sont correctes. Notons que pour $n \in \mathbb{Z}$, pour $0 \leq k < 2^j$, on a l'alternative exclusive suivante.

$$n = k \pmod{2^j} \Leftrightarrow (n = k \pmod{2^{j+1}} \text{ ou } n = k + 2^j \pmod{2^{j+1}}).$$

Ainsi la somme $A(j, k)$ se décompose sous la forme

$$A(j, k) = \sum_{n=k \pmod{2^{j+1}}} a_n + \sum_{n=k+2^j \pmod{2^{j+1}}} a_n = A(j+1, k) + A(j+1, k+2^j).$$

De même, pour $n = k \pmod{2^{j+1}}$, on a $\zeta_j^n = \zeta_j^k$, et pour $n = k + 2^j \pmod{2^{j+1}}$, on a $\zeta_j^n = -\zeta_j^k$. D'où la décomposition

$$B(j, k) = \zeta_j^k (A(j+1, k) - A(j+1, k+2^j)).$$

De ces décompositions, on obtient bien $A(j+1, k)$ en multipliant bien la première par $1/2$ et la seconde par $\zeta_j^{-k}/2$ en prenant la somme, et $A(j+1, k+2^j)$ en prenant la différence. La $(2j+1)$ -ième étape calcule donc bien (en quatre opérations) les nombres $A(j+1, k)$ et $A(j+1, k+2^j)$. La $(2j+2)$ -ième étape s'en déduit en remarquant que

$$f\left(t + \frac{1}{2^{j+2}}\right) = \sum a_n e_n\left(t + \frac{1}{2^{j+2}}\right) = \sum a_n e_n\left(\frac{1}{2^{j+2}}\right) e_n(t) = \sum a_n \zeta_{j+1}^n e_n(t).$$

Notons N_j le nombre d'opérations nécessaires pour effectuer la $(2j+1)$ -ième étape. Alors $N_0 = 0$ et $N_{j+1} = 2N_j + 42^j$, soit encore $2^{-(j+1)}N_{j+1} = 2^{-j}N_j + 2$. On en déduit que $N_j = 2j2^{j+1}$. En particulier, pour $j = \mu$ et $0 \leq k < 2^\mu$, il existe au plus un entier $p \leq n \leq q$ tel que $n = k \pmod{2^j}$. Les nombres $A(\mu, k) = a_n$ calculent donc les coefficients de f et s'obtiennent en $N_\mu = \mu 2^{\mu+2}$ opérations. \square

Remarque 2.7.5 En particulier, pour $f = \sum_{|n| \leq N} a_n e_n$, il suffit de choisir l'unique l'entier $\mu > 0$ tel que $2^\mu \geq 2N + 1 > 2^{\mu-1}$. L'algorithme FFT calcule bien les coefficients de f en

$$4\mu 2^{\mu-1} \leq 4\mu(2N) \leq 8N \frac{\log(2N+1)+1}{\log 2} = O(N \log N)$$

opérations élémentaires.

Si f est un polynôme trigonométrique, l'algorithme de la transformation de Fourier rapide donne ses coefficients, qui sont aussi calculables par la formule de la transformation discrète donnée dans la proposition 2.7.3. L'algorithme FFT doit aussi, en principe, donner lieu à une formule, et ces deux formules calculent les mêmes valeurs sur les polynômes trigonométriques. Le lemme qui suit montre que ces formules calculent les mêmes nombres pour une application f quelconque.

Cette formule n'a cependant pas d'intérêt pour faire les calculs, puisqu'elle nécessite, évidemment, $O(N^2)$ opérations élémentaires à nouveau! Tout l'art de la FFT est précisément de mieux tenir compte de l'organisation d'un polynôme trigonométrique pour diminuer la redondance du calcul. Ce lemme nous sera néanmoins utile pour étudier la stabilité de l'algorithme de la transformation rapide, c'est-à-dire pour contrôler l'erreur commise si on remplace f par des fonctions approchées.

Lemme 2.7.6 *Pour toute fonction $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ et pour tout $\mu > 0$, l'algorithme de la transformation de Fourier rapide calcule les nombres*

$$A(k, \mu)(f) = 2^{-\mu} \sum_{m=0}^{2^\mu-1} f\left(\frac{m}{2^\mu}\right) e_{-k}\left(\frac{m}{2^\mu}\right),$$

pour tout $0 \leq k < 2^\mu$.

DÉMONSTRATION : Soit $N := 2^\mu$. Soit $A : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ définie par

$$A(a_0, \dots, a_{N-1}) := \left(g\left(\frac{0}{N}\right), \dots, g\left(\frac{N-1}{N}\right) \right),$$

avec pour $t \in \mathbb{Z}$,

$$g(t) := \sum_{n=0}^{N-1} a_n e_n.$$

Alors A est une application \mathbb{C} -linéaire et la proposition 2.7.3 montre que A est injective. Le théorème du rang de l'algèbre linéaire en dimension finie montre alors que l'endomorphisme A est un isomorphisme. L'application A est donc bijective de réciproque $A^{-1}(c_0, \dots, c_{N-1}) = (a_0, \dots, a_{N-1})$ donnée par

$$a_k := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} c_n e_{n-k} \left(\frac{k}{N} \right).$$

Soit maintenant une fonction $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ quelconque. Nous allons utiliser deux fois la bijectivité de A . Tout d'abord, A étant surjective, il existe des coefficients a_n tels que pour tout $0 \leq m < 2^\mu$, on a

$$f\left(\frac{m}{2^\mu}\right) = \sum_{n=0}^{2^\mu-1} a_n e_n\left(\frac{m}{M}\right).$$

Mais l'algorithme FFT doit converger pour la fonction $f := \sum a_n e_n$, et n'utilise que les valeurs de f aux points m/N . On a donc

$$A(k, \mu)(f) = a_k = A^{-1}(f(0/N), \dots, f((N-1)/N)).$$

□

Étude de la stabilité de l'algorithme

Résumons l'algorithme de la transformation de Fourier rapide. Fixons $\epsilon > 0$.

- On fixe un réel $A > 0$ tel que $\|(1 - \chi_A)f\|_{L^1} \leq \epsilon$ et tel que \hat{f} ne varie pas plus de ϵ sur des intervalles de longueur au plus $\pi/2A$.
- On divise l'intervalle $[-A, A]$ en $M = 2^\mu$ intervalles réguliers et l'on calcule des coefficients a_n pour $0 \leq n < M$, à partir des scalaires $f(-A + 2Am/M)$, pour $0 \leq m < M$, à l'aide de l'algorithme décrit par le théorème 2.7.4.
- La transformée de Fourier est alors approchée par la fonction

$$g_{A,\mu}(u) = 2A \sum b_n \chi_{\frac{\pi}{2A}}\left(u - \frac{n\pi}{A}\right),$$

où la somme est calculée pour les indices n compris entre $-M/2$ et $M/2$, et où $b_n = a_p$ avec $0 \leq p < M$ et $n = p \pmod{M}$.

Alors la proposition 2.7.1 laisse espérer que $g_{A,\mu}$ approche \hat{f} avec une erreur de 3ϵ quand $\mu \rightarrow +\infty$. Ce serait exactement le cas si f était donnée par un polynôme trigonométrique sur $[-A, A]$.

Les coefficients $A(\mu, k)$ dépendent linéairement des scalaires $f(Am/2^\mu)$, avec $-2^{\mu-1} \leq m < 2^{\mu-1}$. Cette simple observation donne déjà un premier résultat de stabilité : si l'on remplace la fonction f par une autre fonction g telle que $|f(t) - g(t)| \leq \epsilon$ pour tout t , l'algorithme FFT donne des coefficients $a_n(g)$ qui convergent vers $a_n(f)$ quand ϵ converge vers zéro.

Malheureusement, dans l'opération de discrétisation décrite ci-dessus, nous avons fait un peu plus que cela : nous avons remplacé la fonction f , supposée dans L^1 et continue par morceaux, par un polynôme trigonométrique f_ϵ , restreint à l'intervalle $[-A, A]$.

Si la fonction f a des points de discontinuité, il n'y a aucun espoir que cette approximation soit uniforme pour $\epsilon > 0$ arbitraire (car f , discontinue, ne pourrait être limite uniforme des polynômes trigonométriques f_ϵ , continues). Le

théorème de Fejér nous apprend seulement que si f (vue comme fonction restreinte à $[-A, A]$ puis étendue en une fonction périodique de période $2A$, et enfin reparamétrisée en une fonction périodique de période 1 par une dilatation) est exactement discontinue aux points d_i avec

$$0 \leq d_1 < \dots < d_\ell < 1,$$

alors pour tout $\alpha > 0$, il existe un polynôme trigonométrique $f_{\epsilon, \alpha}$ de période 1 tel que

- 1) Pour tout t , on a $|f_\epsilon(t)| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|$,
- 2) $|f_{\epsilon, \alpha}(t) - f(t)| \leq \epsilon$ pour $t \in [0, 1]$ à distance au moins α des discontinuités d_i , c'est-à-dire si $|t - d_i| \geq \alpha$ pour $1 \leq i \leq \ell$.

Essayons d'utiliser cette information pour aller plus loin.

Théorème 2.7.7 (Stabilité) *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux telle que $f \in L^1$. Soit $\epsilon > 0$ et $A > 0$ tel que*

- (i) $\|(1 - \chi_A)f\|_{L^1} \leq \epsilon$.
- (ii) $|u - v| \leq \frac{\pi}{2A} \Rightarrow |\widehat{f}(u) - \widehat{f}(v)| \leq \epsilon$.

Soient $M = 2^\mu$ et $a_n(\mu, f)$ les scalaires calculé pour $0 \leq n < M$ à l'aide de l'algorithme décrit par le théorème 2.7.4 à partir des nombres $f(-A + 2Am/M)$ pour $0 \leq m < M$.

Alors il existe un entier $\mu_0 > 0$ tel que pour tout $\mu > \mu_0$ et pour $u \in \mathbb{R}$, on a

$$\left| \widehat{f}(u) - 2A \sum_{n=-2^{\mu-1}}^{2^{\mu-1}} b_n(\mu, f) \chi_{\frac{\pi}{2A}} \left(u - \frac{n\pi}{A} \right) \right| \leq 4\epsilon,$$

avec $b_n(\mu, f) := a_p$, où p est l'unique entier tel que $0 \leq p < M$ et $p = n \pmod{M}$.

DÉMONSTRATION : Notons M le maximum de f sur $[-A, A]$. Fixons $\alpha > 0$. D'après le théorème de Fejér, il existe un polynôme trigonométrique $f_{\epsilon, \alpha}$ qui vérifie les conditions 1) et 2) ci-dessus. Alors, on a les estimations suivantes.

$$\begin{aligned} |b_n(\mu, f) - b_n(\mu, f_{\epsilon, \alpha})| &= \left| 2^{-\mu} \sum_{m \in I} (f - f_{\epsilon, \alpha})(m) \right|, \\ &\leq 2^{-\mu} \sum_{m \in I} |f - f_{\epsilon, \alpha}|(m), \\ &\leq 2^{-\mu} \left(\sum_{m \in I_1} |f - f_{\epsilon, \alpha}|(m) + \sum_{m \in I \setminus I_1} |f - f_{\epsilon, \alpha}|(m) \right), \end{aligned}$$

avec

$$I := \{-A + \frac{kA}{2^\mu} \mid 0 \leq k < 2^\mu\}; \quad I_1 := \{m \in I \mid \exists i \ 1 \leq i \leq \ell \quad |m - d_i| \leq \alpha\}.$$

Mais $|d_i - (-A + k2^{-\mu}A)| < \alpha$ si k , entier, est tel que $k2^{-\mu}A$ varie dans l'intervalle $]A - d_i - \alpha, A - d_i + \alpha[$. L'entier k peut donc prendre au plus $[2\alpha 2^\mu / A] + 1$ valeurs. On a donc

$$\#I_1 \leq \frac{2\alpha \ell 2^\mu}{A} + \ell.$$

On en déduit que

$$|b_n(\mu, f) - b_n(\mu, f_{\epsilon, \alpha})| \leq \epsilon + \frac{1}{2^\mu} \left(\frac{2\alpha \ell 2^\mu}{A} + \ell \right) M = \epsilon + M\ell \left(\frac{2\alpha}{A} + \frac{1}{2^\mu} \right).$$

Il existe donc deux réels $\alpha_0 > 0$ et $\mu_0 > 0$ tel que pour tous $0 < \alpha \leq \alpha_0$ et $\mu \geq \mu_0$, on a

$$2A|b_n(\mu, f) - b_n(\mu, f_{\epsilon/4A, \alpha})| \leq \epsilon.$$

Mais quitte à choisir μ_0 assez grand, les coefficients $b_n(\mu, f_{\epsilon/4A, \alpha_0})$ sont pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ exactement ceux du polynôme trigonométrique $f_{\epsilon/4A, \alpha_0}$. De plus, on a

$$\|\chi_A(f - f_{\epsilon/4A, \alpha_0})\|_{L^1} \leq 2A\epsilon/4A + 2\alpha_0\ell M \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 \leq \epsilon.$$

Nous pouvons donc conclure comme dans la proposition 2.7.1. Pour $\mu > \mu_0$ assez grand et pour $|u| > 2^{\mu-1}\pi/A + \pi/2A$, on a

$$|\hat{f}(u)| \leq \epsilon.$$

Pour $|u| \leq 2^{\mu-1}\pi/A + \pi/2A$, on a

$$\begin{aligned} |g_{A, \mu}(u) - \hat{f}(u)| &\leq |\hat{f}(u) - 2A \sum b_n(\mu, f_{\epsilon/4A, \alpha_0}) \chi_{\pi/2A}(u - \frac{n\pi}{A})| + \epsilon \\ &\leq 3\epsilon + \|(1 - \chi_{2^{\mu-1}\pi/A})f\|_{L^1} \\ &\leq 4\epsilon \end{aligned}$$

pour $\mu > \mu_0$ assez grand. □

Remarque 2.7.8 La FFT a été employée en génie électrique et en radioastronomie dès son invention. Elle fut ensuite appliquée, au milieu des années 1970, à la cristallographie. L'un de ses succès les plus spectaculaires a été, en 1978, la détermination moléculaire d'un virus. Aujourd'hui, la biologie est un champ d'application très prolifique des méthodes cristallographiques. Ces méthodes utilisent abondamment des transformations de Fourier tridimensionnelles (la théorie de Fourier et l'algorithme FFT se généralisent aisément à toutes dimensions). Pour un réseau de $640 \times 640 \times 640$, le nombre de valeurs à calculer dépasse $N = 2.10^8$. On apprécie alors la différence entre $O(N^2)$ et $O(N \log N)$. Le calcul d'une telle transformation de Fourier serait impossible sans cet algorithme !

Chapitre 3

Transformation de Laplace

Dans la suite, toutes les fonctions considérées seront mesurables. On pourra se limiter par exemples aux fonctions continues par morceaux.

3.1 Définitions et premières propriétés

Soit f une fonction intégrable sur $[0, +\infty)$. Si on pose $f(t) = 0$ pour $t < 0$, alors

$$F(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt.$$

est définie pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, mais aussi sur tout le demi-plan $\{\omega \in \mathbb{C}, \Im m\omega \leq 0\}$.

Plus particulièrement, s'il existe une constante $C \geq 0$ telle que $|f(t)| \leq Ce^{at}$, la fonction F associée converge sur le demi-plan $\{\Im m\omega < -a\}$. Ce type de fonction, bien adapté à la transformation de Laplace, est un bon exemple de fonction à croissance au plus exponentielle.

Définition 3.1.1 Soit $a \in \mathbb{R}$ et \mathcal{E}_a l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ telles que

1. $\forall t < 0, f(t) = 0$;
2. $\forall b > a, fe_{-b} \in L^1$, avec $e_b(t) = \exp(bt)$.

On note $\mathcal{E} := \bigcup_{a \in \mathbb{R}} \mathcal{E}_a$ l'espace des fonctions à croissance au plus exponentielle.

Dans le contexte des transformées de Laplace, et sauf mention contraire, nous conviendrons que toutes les fonctions considérées seront de support dans $[0, +\infty)$. Ainsi la fonction constante 1 est en fait la fonction de Heaviside

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}.$$

De même, la notation \cos renvoie à la fonction élément de \mathcal{E} , donnée par la formule $H(t) \cos t$, qui est bien nulle pour $t < 0$. De manière générale, on peut retenir que l'on supposera toujours implicitement que $f(t) = H(t)f(t)$.

Pour démontrer qu'une fonction est à croissance au plus exponentielle, on pourra utiliser les deux observations suivantes, qui découlent facilement de la définition.

1. $a < b \Rightarrow \mathcal{E}_a \subset \mathcal{E}_b$;
2. $(|f(t)| \leq g(t) \text{ et } g \in \mathcal{E}_a) \Rightarrow f \in \mathcal{E}_a$.

Exemples 3.1.2

Montrer que $1 \in \mathcal{E}_0$, $e^t \in \mathcal{E}_1$, $\cosh, \sinh \in \mathcal{E}_1$, $\cos, \sin \in \mathcal{E}_0$, et $t^n \in \mathcal{E}_0$ pour $n \geq 0$.

Définition 3.1.3 Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{E}_a$. Alors l'intégrale

$$\mathcal{L}f(z) := \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt} dt$$

converge uniformément sur tout demi-plan de la forme $\{\Re z \geq a'\}$ avec $a' > a$. La fonction ainsi définie est analytique sur $\{\Re z > a\}$ au moins. En particulier, la fonction $(a, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto \mathcal{L}(x)$ est de classe \mathcal{C}^∞ . On appelle **transformée de Laplace de f** la fonction $\mathcal{L}f$.

Il peut arriver que cette fonction $\mathcal{L}f$, définie par une intégrale, se prolonge en une fonction analytique sur un domaine plus grand qu'un demi-plan. Par le théorème du prolongement analytique, cette nouvelle fonction est unique sur le domaine considéré; nous la noterons encore $\mathcal{L}f$.

Proposition 3.1.4 Soit $f \in \mathcal{E}_a$. Alors pour $b > a$ fixé, $\mathcal{L}f(z) \rightarrow 0$ quand $|z| \rightarrow +\infty$ uniformément sur $\Re(z) > b$.

C'est l'analogie de la propriété que pour $f \in \mathcal{L}^1$, $\widehat{f}(y) \rightarrow 0$ quand $|y| \rightarrow +\infty$ et la démonstration repose ici aussi sur le théorème de Riemann-Lebesgue.

Propriétés fondamentales de symétrie

Proposition 3.1.5 Soient $f \in \mathcal{E}$, $a > 0$ et $c \in \mathbb{C}$. Alors la transformation \mathcal{L} satisfait les axiomes suivants.

(Translation) $\mathcal{L}(H(t-a)f(t-a)) = e^{-az}\mathcal{L}f(z)$.

(Déphasage) $\mathcal{L}(e^{ct}f(t)) = \mathcal{L}f(z-c)$.

(Dilatation) $\mathcal{L}f(at) = a^{-1}\mathcal{L}f(a^{-1}z)$.

(Primitive) $\mathcal{L}(\int_0^t f(s) ds) = \frac{\mathcal{L}f(z)}{z}$.

(Polynôme) $\mathcal{L}(tf(t)) = -(\mathcal{L}f)'(z)$.

Proposition 3.1.6 (Dérivation)

1) Si f est \mathcal{C}^1 par morceaux et continue sur $[0, +\infty)$ et si $f' \in \mathcal{E}$, alors $f \in \mathcal{E}$ et

$$\mathcal{L}(f'(t))(z) = z\mathcal{L}f(z) - f(0+).$$

2) Si f est \mathcal{C}^k par morceaux et \mathcal{C}^{k-1} sur $[0, +\infty)$ et si $f^{(k)} \in \mathcal{E}$, alors $f \in \mathcal{E}$ et

$$\mathcal{L}(f^{(k)})(z) = z^k\mathcal{L}f(z) - z^{k-1}f(0+) - z^{k-2}f'(0+) - \dots - f^{(k-1)}(0+).$$

Corollaire 3.1.7 (Théorème de la valeur initiale) *Soit f une fonction continue et \mathcal{C}^1 par morceaux sur $(0, +\infty)$. Si $f' \in \mathcal{E}$, alors $f \in \mathcal{E}$ et*

$$\lim_{\Re z \rightarrow +\infty} z\mathcal{L}f(z) = f(0+).$$

Corollaire 3.1.8 (Théorème de la valeur finale) *Soit f une fonction continue et \mathcal{C}^1 par morceaux sur $(0, +\infty)$. Si $f' \in \mathcal{E} \cap L^1$, alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ existe et*

$$\lim_{z \rightarrow 0} z\mathcal{L}f(z) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t).$$

Linéarité

Jusqu'ici, nous avons toujours considéré la transformée d'une seule fonction à la fois. Comme pour la transformée de Fourier, d'autres propriétés importantes de la transformée de Laplace font intervenir deux fonctions. C'est le cas par exemple de la linéarité. La nature de l'espace \mathcal{E} induit ici une petite difficulté. Il faut en effet prendre garde que si f et g sont dans \mathcal{E} , cependant $\mathcal{L}f$ et $\mathcal{L}g$ n'ont aucune raison d'être définie exactement sur le même domaine de \mathbb{C} . On ne peut donc pas écrire en toute rigueur pour tous $c, c' \in \mathbb{C}$,

$$\mathcal{L}(cf + c'g) = c\mathcal{L}f + c'\mathcal{L}g.$$

Toutefois, cette relation est bien sûr satisfaite sur tout domaine de la forme $\{\Re z > a\}$ sur lequel $\mathcal{L}f$ et $\mathcal{L}g$ sont toutes deux définies, c'est-à-dire pour a assez grand, et par suite sur tout domaine de définition commun de $\mathcal{L}f$ et $\mathcal{L}g$ contenant un tel demi-plan. Nous retiendrons donc la linéarité de la transformation de Laplace par la formule ci-dessus pour sa simplicité, mais nous garderons à l'esprit le problème de domaine de définition qu'elle passe sous silence.

3.2 Exemples classiques

Polynôme d'exponentielles : On appelle **polynôme d'exponentielles** toute combinaison linéaire de fonctions de la forme

$$t^n e^{ct} \text{ pour } t \geq 0 \text{ et } c \in \mathbb{C}.$$

Commençons par calculer la transformée de Laplace de la fonction t^α . Pour que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-tz} dt$ converge, il suffit que $\alpha > -1$. Dans ce cas, $\mathcal{L}(t^\alpha)(z)$ est définie pour tout $\Re(z) > 0$ a priori. En particulier pour $x > 0$ réel

$$\mathcal{L}(t^\alpha)(x) = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-tx} dt = x^{-\alpha} \int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u} x^{-1} du$$

avec le changement de variable $u = xt$. Rappelons la définition de la fonction Γ d'Euler définie pour $\Re z > 0$ par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

On a donc :

$$\mathcal{L}(t^\alpha)(x) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{x^{\alpha+1}}.$$

Cette formule reste en fait valable pour $x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. La formule générale s'obtient par modulation. Il vient

$$\mathcal{L}(t^n e^{ct})(z) = \frac{n!}{(z - c)^{n+1}}.$$

Corollaire 3.2.1

- 1) Une fonction définie sur une demi-plan de la forme $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re z > a\}$ est une fraction rationnelle propre (c'est-à-dire une fraction R telle que $R(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$) si et seulement si elle est la transformée de Laplace d'un polynôme d'exponentielles.
- 2) Un polynôme d'exponentielles converge vers zéro en $+\infty$ si et seulement si sa transformée de Laplace est une fraction rationnelle dont chaque pôle a une partie réelle strictement négative.

Un polynôme d'exponentielle est de classe \mathcal{C}^∞ sur $[0, +\infty)$ mais, vue comme fonction sur \mathbb{R} , elle a une singularité en zéro.

Proposition 3.2.2 Soit $R = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle propre. On note $d^\circ R := d^\circ P - d^\circ Q = -n < 0$ son degré et $f := \mathcal{L}^{-1}(R)$ sa transformée de Laplace inverse (telle que $\mathcal{L}f = R$). Alors f est de classe exactement \mathcal{C}^{n-2} sur \mathbb{R} . Plus précisément,

$$\begin{aligned} f(0+) &= \dots = f^{(n-2)}(0+) = 0, \\ f^{(n-1)}(0+) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n R(x) = a_p/b_q, \end{aligned}$$

où a_p et b_q sont les coefficients dominants de P et Q respectivement.

DÉMONSTRATION : La dérivée d'un polynôme d'exponentielles est encore un polynôme d'exponentielle. Toutes les dérivées de f restent donc dans \mathcal{E} . Ainsi

$$\mathcal{L}(f^{(n)}) = z^n \mathcal{L}f - z^{n-1}f(0+) - \dots - f^{(n-1)}(0+).$$

par l'axiome de dérivation. Mais quand x tend vers l'infini, $\mathcal{L}(f^{(n)})(x)$ converge vers zéro, tandis que la fraction $x^n(\mathcal{L}f)(x) = x^n P(x)/Q(x)$ converge vers a_p/b_q . Il s'ensuit que le polynôme $z^{n-1}f(0+) - \dots - z f^{(n-2)}(0+)$ admet une limite quand z tend vers $+\infty$. Ceci n'est possible que si ce polynôme est constant, c'est-à-dire nul. On a donc $f(0+) = \dots = f^{(n-2)}(0+) = 0$ et $\lim(z^n \mathcal{L}f(z) - f^{(n-1)}(0+)) = 0$, d'où le résultat car $\lim_{\infty}(z^n R(z)) = a_p/b_q$. \square

Fonctions hyperboliques : nous allons calculer les transformées de Laplace de \sinh , \cosh , qui sont des exemples de polynômes d'exponentielles. En effet

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \cosh(z) &= \frac{1}{2} \mathcal{L}(e^t + e^{-t})(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} \right) = \frac{z}{z^2 - 1}; \\ \mathcal{L} \sinh(z) &= \frac{1}{2} \mathcal{L}(e^t - e^{-t})(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right) = \frac{1}{z^2 - 1}. \end{aligned}$$

Fonctions circulaires : nous allons calculer les transformées de Laplace de \sin , \cos , $sinc$ et de $\int_0^t sinc ds$.

◇ Comme $\sin'' = -\sin$, l'axiome de dérivation montre que $-\mathcal{L} \sin = \mathcal{L}(\sin'') = z^2 \mathcal{L} \sin - z \sin(0) + \cos(0) = z^2 \mathcal{L} \sin + 1$. De là vient que

$$\mathcal{L} \sin(z) = \frac{1}{1+z^2};$$

et $\mathcal{L} \cos(z) = \mathcal{L} \sin'(z) = z \mathcal{L} \cos(z) - \sin(0) = \frac{z}{z^2+1}$.

◇ On a $|sinc(t)| \leq 1$ donc sa transformée de Laplace est définie sur $\Re z > 0$ et pour $x > 0$, par l'axiome du polynôme,

$$\mathcal{L}(sinc)(x) = \int_x^{+\infty} \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{2} - \arctg x = \arctg \frac{1}{x},$$

avec $\arctg\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{1}{z^{2n+1}}$

pour $|z| > 1$ et donc en particulier pour $\Re(z) > 1$. Les fonctions \arctg et $\mathcal{L} sinc$ sont en fait égales au moins sur le demi-plan $\{\Re(z) > 1\}$ (c'est une conséquence du théorème des zéros isolés, hors programme).

◇ Enfin par l'axiome de la primitive, $\mathcal{L}\left(\int_0^t sinc(s) ds\right)(z) = \frac{1}{z} \arctg\left(\frac{1}{z}\right)$.

Séries entières

Proposition 3.2.3 Soit $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ une série entière de rayon de convergence infini. Supposons qu'il existe $b > 0$ tel que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \frac{n!}{b^n}$ converge. Alors $\mathcal{L} f(z)$ existe pour $\Re(z) > b$ (au moins) et sur ce domaine

$$\mathcal{L} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{n!}{z^{n+1}}.$$

Application : considérons $\sin t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} b^{-2n-1}$ converge pour tout $b > 1$ donc pour $\Re(z) > 1$,

$$\mathcal{L}(\sin t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)!}{(2n+1)! z^{2n+2}} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{z^2}\right)^n = \frac{1}{z^2} \frac{1}{1+\frac{1}{z^2}} = \frac{1}{1+z^2}.$$

On peut de même calculer les transformées de Laplace des fonctions \sin , $\frac{\sin t}{t}$, $\int_0^t \frac{\sin s}{s} ds$, $\cos \sqrt{t}$ et cetera... Bien que cette méthode ne soit pas à négliger, elle n'aboutit pas toujours. Par exemple pour $\cos(t^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{4n}}{(2n)!}$, la condition de la proposition n'est pas satisfaite, alors que $\cos(t^2)$ a une transformée de Laplace au moins sur $\Re(z) > 0$.

3.3 De Fourier à Laplace

3.3.1 Inversion

Pour $c \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{E}_c$, fixons $a > c$. Alors $fe_{-a} \in L^1$, avec $e_{-a}(t) = \exp(-at)$. Comme $f(t) = 0$ pour $t < 0$, on a successivement, pour tout $b \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}f(a + ib) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(a+ib)t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-at}e^{-ibt} dt = \widehat{fe_{-a}}(b).$$

Théorème 3.3.1 (Formule d'inversion de Mellin-Fourier) *Soit $f \in \mathcal{E}$ et fixons $a \in \mathbb{R}$ tel que $fe_{-a} \in L^1$. On suppose que $r \mapsto \mathcal{L}f(a + ir)$ est de classe L^1 . Alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ où f est continue, on a*

$$f(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}f(a + ir)e^{(a+ir)x_0} dr.$$

DÉMONSTRATION : On a $\mathcal{L}f(a + ir) = \widehat{fe_{-a}}(r)$ et par hypothèse, $\widehat{fe_{-a}} \in L^1$. Par le théorème d'inversion L^1 , il en résulte que

$$f(x_0)e^{-ax_0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}f(a + ir)e^{irx_0} dr.$$

D'où le résultat en multipliant chaque membre de cette égalité par e^{ax_0} . \square

3.3.2 Convolution

Théorème 3.3.2 *Soient $f, g \in \mathcal{E}$. Alors $f \star g \in \mathcal{E}$ et $\mathcal{L}(f \star g) = \mathcal{L}f \cdot \mathcal{L}g$.*

DÉMONSTRATION : Remarquons d'abord que pour $a, a' \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{E}_a \cap \mathcal{E}_{a'} = \mathcal{E}_{\min(a, a')}; \quad \mathcal{E}_a \cup \mathcal{E}_{a'} = \mathcal{E}_{\max(a, a')}.$$

Si f et g sont deux fonctions dans \mathcal{E} , elles sont donc dans le même espace \mathcal{E}_a quitte à prendre a assez grand. Ainsi fe_{-a} et ge_{-a} sont L^1 , ce qui montre que $(fe_{-a}) \star (ge_{-a}) \in L^1$. De plus pour $s < 0$ ou $s > t$, on a $g(s)f(t-s) = 0$. Il en résulte que $(fe_{-a}) \star (ge_{-a})(t) = 0$ pour tout $t < 0$ et, pour presque tout $t \geq 0$,

$$(fe_{-a}) \star (ge_{-a})(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(s)f(t-s)e^{-a(t-s)}e^{-as} ds = e^{-at} \int_0^t g(s)f(t-s) ds$$

Ainsi $(fe_{-a}) \star (ge_{-a}) = (f \star g)e_a$, ce qui montre que $f \star g \in \mathcal{E}$. Enfin, On a

$$\mathcal{L}(f \star g)(a + ib) = \widehat{fe_a \star ge_a}(b) = \widehat{fe_a}(b)\widehat{ge_a}(b) = \mathcal{L}f(a + ib)\mathcal{L}g(a + ib).$$

\square

Remarque 3.3.3 *On notera qu'au passage, on a montré que pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, on a*

$$f \star g(t) = \int_0^{+\infty} g(s)f(t-s) ds.$$

3.3.3 Régularisations

Dans le chapitre sur la transformation de Fourier, nous avons déjà observé qu'une des principales vertus du produit de convolution est qu'il est régularisant : le produit est de classe \mathcal{C}^k dès que l'une des deux fonctions l'est. Dans le contexte de la transformation de Laplace, ce résultat est rarement utilisable tel quel. En effet les fonctions dont on calcule le produit peuvent certes être \mathcal{C}^∞ sur $[0, +\infty)$ mais, vues comme fonctions définies sur \mathbb{R} , elles sont généralement discontinues en zéro (exactement si $f(0+) \neq 0$, car $f(0-) = 0$). On retiendra cependant la propriété suivante, que nous utiliserons pour étudier les équations différentielles ordinaires linéaires.

Proposition 3.3.4 *On suppose que $f \in L^\infty \cap \mathcal{E}$ et $g \in \mathcal{E}$. Alors $f \star g$ est continue.*

DÉMONSTRATION : Soit $a \geq 0$ tel que $g \in \mathcal{E}_a$ et soit $b > a$. Alors $ge_{-b} \in L^1$. Comme fe_{-b} est bornée, la convolée $(f \star g)e_{-b} = (fe_{-b}) \star (ge_{-b})$ est continue bornée, ce qui montre bien que $f \star g$ est continue. \square

Proposition 3.3.5 *Soit $f \in \mathcal{E}$ et $g : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de support dans $[0, +\infty)$ qui, restreinte à $[0, +\infty)$, est de classe \mathcal{C}^1 . Alors $g \star f$ est dérivable en tout point t_0 où f est continue et*

$$(g \star f)'(t_0) = (g' \star f)(t_0) + f(t_0) g(0+).$$

DÉMONSTRATION : Nous allons d'abord considérer trois cas particulier.

\diamond Supposons d'abord que $g = 1$. Alors $1 \star f(t) = \int_0^t f(s) ds$ et comme f est continue en t_0 , $1 \star f$ est bien dérivable en t_0 , de dérivée $f(t_0)$, ce qui démontre la proposition dans le cas où $g = 1$.

\diamond S Supposons que $g(t) = t$ pour $t \geq 0$. Alors $f \star g(t) = \int_0^t (t-s)f(s) ds$. Il en résulte que

$$(f \star g)'(t) = \int_0^t f(s) ds + tf(t) - tf(t) = \int_0^t f(s) ds = 1 \star g(t),$$

ce qui démontre la proposition dans le cas où $g(t) = t$.

\diamond Supposons que g de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} (en particulier $g(0+) = 0$). Fixons $\epsilon > 0$ et supposons que f est continue en $t_0 \geq 0$. Puisque g' est uniformément continue sur le segment $[-2, t_0 + 1]$, il existe un réel $1 > \alpha > 0$ tel que pour $0 \leq |h| < \alpha$, pour $-\alpha \leq s \leq t_0$ et pour $|s - t| \leq \alpha$,

$$|g'(t) - g'(s)| \leq \epsilon.$$

Le théorème des accroissements finis montre alors que $|g(s+h) - g(s) - hg'(s)| \leq \epsilon h$. D'autre part

$$\begin{aligned} (g \star f)(t_0 + h) &= \int_0^{t_0+h} g(t_0h - s)f(s) ds = \int_{-\alpha}^{t_0} g(u+h)f(t_0-u) du \\ &= g \star f(t_0) + h (g' \star f)(t_0) \\ &\quad + \int_{-\alpha}^{t_0} (g(u+h) - g(u) - hg'(u))f(t_0-u) du. \end{aligned}$$

D où $|(g \star f)(t_0 + h) - (g \star f)(t_0) - h(g' \star f)(t_0)| \leq \epsilon h \int_0^{t_0 + \alpha} |f(s)| ds,$

ce qui démontre la proposition dans le cas où g est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et par linéarité

$$g \star f(t) = g_1 \star f(t) + g(0+) (1 \star f)(t) + g'(0+) (t \star f)(t).$$

La proposition s'ensuit alors aisément des trois cas précédants. \square

Remarque 3.3.6 Si f n'est pas continue en t_0 , mais a des limites à droite et à gauche, on peut cependant montrer que $g \star f$ a tout de même des dérivées à gauche et à droite, égales respectivement à

$$(g' \star f)(t_0) + g(0+)f(t_0 - 0) \quad ; \quad (g' \star f)(t_0) + g(0+)f(t_0 + 0).$$

Corollaire 3.3.7 Soit $a < b$. Soit $f \in \mathcal{E}$, $n \geq 1$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe \mathcal{C}^n sur $[0, +\infty)$. On suppose que f est continue sur (a, b) . Si $n \geq 2$, on suppose en outre que g est de classe \mathcal{C}^{n-2} sur \mathbb{R} , c'est-à-dire que

$$g(0+) = \dots = g^{(n-2)}(0+) = 0,$$

Alors $g \star f$ est de classe \mathcal{C}^n sur (a, b) et

$$\begin{aligned} \text{pour } 1 \leq k < n, \quad & (g \star f)^{(k)} = g^{(k)} \star f, \\ \text{pour } k = n, \quad & (g \star f)^{(n)}(t) = (g^{(n)} \star f)(t) + g^{(n-1)}(0+) f(t). \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION : Par récurrence sur n . Le cas $n = 1$ est exactement la proposition précédente. Soit g de classe \mathcal{C}^{n+1} sur $[0, +\infty)$ et \mathcal{C}^n sur \mathbb{R} . Supposons la proposition vraie pour toutes les fonctions \mathcal{C}^n sur $[0, +\infty)$ et de classe \mathcal{C}^{n-1} sur \mathbb{R} . Alors puisque $g(0+) = \dots = g^{(n-1)}(0+) = 0$, l'hypothèse de récurrence montre que $g \star f$ est dérivable n fois sur (a, b) et que pour $k < n$, $(g \star f)^{(k)} = g^{(k)} \star f$ d'une part, $(g \star f)^{(n)} = g^{(n)} \star f + g^{(n-1)}(0+)f$ d'autre part. Mais $g^{(n-1)}(0) = 0$ par hypothèse sur g , ce qui donne la première partie du résultat au rang $n + 1$.

Montrons maintenant que la fonction $(g \star f)^{(n)}$, égale à $g^{(n)} \star f$ sur (a, b) , est dérivable encore une fois. Pour cela, il suffit d'appliquer une nouvelle fois la proposition ci-dessus à la fonction $g^{(n)}$. Il vient en effet que

$$(g^{(n)} \star f)' = g^{(n+1)} \star f + g^{(n)}(0+)f. \quad \square$$

3.3.4 Injectivité de la transformée de Laplace

Théorème 3.3.8 Soient f et g dans \mathcal{E} continues en x_0 . Alors

$$\mathcal{L}f = \mathcal{L}g \Rightarrow f(x_0) = g(x_0).$$

DÉMONSTRATION : Soit $\varphi_n(t) = H(t)n^2te^{-nt} \in L^\infty$. Alors $\varphi_n \star f$ est continue. De plus $\mathcal{L}\varphi_n(z) = n^2/(n+z)^2$. Ainsi pour b assez grand fixé, la fonction

$$r \mapsto \mathcal{L}(f \star \varphi_n)(b+ir) = \mathcal{L}(f)(b+ir)\mathcal{L}(\varphi_n)(b+ir)$$

est de classe L^1 . Nous pouvons appliquer la formule de Mellin-Fourier, la fonction $f \star \varphi_n$ étant continue. Ainsi

$$\varphi_n \star f(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n^2 \mathcal{L}f(b+ir)}{(n+b+ir)^2} e^{(b+ir)x_0} dr.$$

Si $\mathcal{L}f = \mathcal{L}g$, alors la formule ci-dessus montre que $\varphi_n \star f(x_0) = \varphi_n \star g(x_0)$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient que $f(x_0) = g(x_0)$. \square

On peut définir une transformée de Laplace inverse, que l'on notera \mathcal{L}^{-1} , unique aux points de discontinuité près de la fonction d'origine

$$\mathcal{L}f = F \Leftrightarrow (\mathcal{L}^{-1}F = f \text{ sauf aux points de discontinuité de } f).$$

Dans les problèmes pratiques, très souvent (nous verrons des exemples), la fonction F est donnée et on cherche la fonction f dont elle est la transformée. Il est tentant mais délicat d'utiliser la formule de Mellin-Fourier à cette fin, en remplaçant $\mathcal{L}f$ par F dans l'expression de l'intégrale. Il se présente ici une sérieuse difficulté.

Remarque 3.3.9 Il existe une fonction analytique F telle que l'intégrale

$$f(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F(z)e^{zt} dz$$

converge vers une valeur indépendante de b et qui pourtant n'est la transformée de Laplace d'aucune fonction.

Exemple : considérons la fonction $F(z) = e^{z^2}$. Alors pour tout $b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} e^{z^2} e^{zt} dz &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(b+is)^2} e^{(b+is)t} ds \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{b^2} e^{bt} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} e^{i(t+2b)s} ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(e^{b^2+bt} \right) \left(\sqrt{2\pi} e^{-\frac{(t+2b)^2}{4}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/4} \end{aligned}$$

est bien une fonction indépendante de b . Pourtant $F(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$ contrairement à une transformée de Laplace qui convergerait vers zéro d'après la proposition 3.1.4.

Cependant, l'idée peut être fructueuse. Donnons sans démonstration une condition suffisante pour qu'elle soit concluante.

Théorème 3.3.10 (admis) Soit F une fonction analytique sur $\Re z > a$. Pour $b > a$ et $r > 0$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$f_{r,b}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-ir}^{b+ir} F(z)e^{zt} dz.$$

On suppose qu'il existe $\alpha > \frac{1}{2}$ et $C \geq 0$ tels que

$$|F(z)| \leq C(1 + |z|)^{-\alpha} \text{ pour } \Re(z) > a.$$

On suppose de plus que pour un $b_0 > a$, $f_{r,b_0}(t)$ converge simplement quand $r \rightarrow +\infty$ vers une fonction $f(t) \in \mathcal{E}$,

Alors pour tout $b > a$, $f_{r,b}(t)$ converge simplement vers la même fonction $f(t)$ et F est la transformée de Laplace de f .

3.3.5 De Laplace aux séries de Fourier

Théorème 3.3.11 Soit f une fonction périodique de période 2π continue et \mathcal{C}^1 par morceaux. Posons

$$G(z) = \int_0^{2\pi} f(t)e^{-zt} dt.$$

$$\text{Alors } f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} G(in)e^{int} \quad \text{et pour } \Re(z) > 0, \quad \mathcal{L}f(z) = \frac{G(z)}{1 - e^{-2\pi z}}.$$

DÉMONSTRATION : La formule pour $f(t)$ exprime le théorème de Dirichlet pour les séries de Fourier. Considérons

$$g(t) = H(t)f(t) - H(t - 2\pi)f(t).$$

C'est la fonction qui coïncide avec f sur $[0, 2\pi)$ et qui s'annule ailleurs. C'est donc une fonction L^1 à support compact dont la transformée de Laplace est partout définie. Or le calcul donne immédiatement $\mathcal{L}(g) = G(z)$. D'autre part l'axiome de translation donne

$$\begin{aligned} G(z) = \mathcal{L}(g) &= \mathcal{L}(H(t)f(t)) - \mathcal{L}(H(t - 2\pi)f(t)) \\ &= \mathcal{L}f(z) - \mathcal{L}(H(t - 2\pi)f(t - 2\pi)) \\ &= \mathcal{L}f(z) - e^{-2\pi z} \mathcal{L}f(z). \end{aligned}$$

On obtient la deuxième identité du théorème. □

3.4 Équations différentielles ordinaires

Équations

Nous allons montrer comment la transformée de Laplace permet de résoudre les équations différentielles linéaires ordinaires à coefficients constants de manière très efficace. Ces équations apparaissent dans une grande variété de situation.

Nous considérerons plus particulièrement le cas suivant. Un système physique (par exemple mécanique) est excité par une force extérieure, donnée par une fonction $f \in \mathcal{E}$. Si l'état du système est connu au temps $t = 0$, nous supposons que les données phénoménologiques du problème permettent de décrire l'évolution du système par une équation de la forme

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + a_2 y^{(n-2)}(t) + \cdots + a_n y(t) = f(t), \\ y(0) = c_0, y'(0) = c_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = c_{n-1}. \end{cases} \quad (3.1)$$

avec pour inconnue y , des coefficients constants $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ et des conditions initiales $c_0, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{C}$. Nous allons voir qu'une telle équation a toujours une solution sur $[0, +\infty)$ et qu'elle est unique.

Comme dans tout problème différentiel, il nous faut préciser dans quel espace de fonctions nous cherchons les solutions éventuelles. Attention : la fonction f est seulement continue par morceaux. Or, on peut montrer que la dérivée d'une fonction réelle vérifie toujours le théorème des valeurs intermédiaires : l'image d'un intervalle par la dérivée est encore un intervalle. Il en résulte que si f a des points de discontinuité, il est sans espoir de trouver une fonction n fois dérivable sur $[0, +\infty)$ solution de notre équation.

Cependant, parce que leur intérêt physique est bien trop important (essayez de modéliser la frappe d'une corde de piano par un de ses marteaux, ou faites appel à votre culture en électronique pour donner des exemples de systèmes excités par des signaux discontinus...), nous ne voulons pas renoncer aux excitations discontinues, éléments de \mathcal{E} . Nous devons donc élargir l'espace des solutions possibles, et, en même temps, affaiblir le sens que nous donnons à l'équation différentielle (3.1).

En général, pour des équations aux dérivées partielles, il est nécessaire d'introduire des fonctions "généralisée" (des distributions, voir la suite de ce cours) comme solutions possibles, mais notre contexte est suffisamment modeste pour en faire l'économie. Pour les (systèmes d') équations différentielles ordinaires, il suffira de chercher les solutions parmi les éléments de \mathcal{E} qui sont continues sur $(0, +\infty)$, et d'exiger seulement qu'elles vérifient l'équation différentielle partout, sauf aux points de discontinuité de f . Les conditions initiales devront être comprises en tant que limite et dérivées à droite.

Ce point de rigueur éclairci, supposons qu'il existe une solution $y \in \mathcal{E}$ (ce qui est le cas, nous le démontrerons). Alors en transformant par \mathcal{L} les deux membres de l'équation, l'axiome de dérivation montre que

$$z^n \mathcal{L}y - z^{n-1} c_0 - z^{n-2} c_1 - \cdots - c_{n-1} + a_1 (z^{n-1} \mathcal{L}y - z^{n-2} c_0 - \cdots - c_{n-2}) + \cdots + a_{n-1} (z \mathcal{L}y - c_0) + a_n \mathcal{L}y = \mathcal{L}f.$$

Soit encore

$$P \cdot \mathcal{L}y - Q = \mathcal{L}f,$$

avec

$$P(z) := \sum_{k=0}^n a_{n-k} z^k; \quad a_0 = 1; \quad Q(z) := \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-k-1} a_k c_j z^{n-1-j-k}. \quad (3.2)$$

Dans les applications numériques, les coefficients des polynômes P et Q se calculent aisément, directement à partir des propriétés fondamentales de la transformée de Laplace, sans qu'il soit nécessaire de se référer aux formules compliquées ci-dessus. On retiendra seulement que P est un polynôme qui dépend uniquement des coefficients a_k , alors que Q dépend aussi des coefficients c_k , et que ce dernier polynôme est nul si tous les coefficients c_k le sont.

Quoi qu'il en soit,

$$\mathcal{L}y = \frac{1}{P} \cdot \mathcal{L}f + \frac{Q}{P}.$$

Or nous savons calculer la transformée de Laplace inverse d'une fraction rationnelle (par la méthode des résidus ou directement en décomposant la fraction en éléments simples). Comme un produit de convolution se transforme en produit simple par \mathcal{L} , on obtient une jolie formule.

Théorème 3.4.1 *Pour $f \in \mathcal{E}$, $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$, $(c_k)_{0 \leq k \leq n-1} \in \mathbb{C}^n$, il existe une unique fonction $y \in \mathcal{E}$, continue sur $(0, +\infty)$, telle que*

$$y(0^+) = c_0, \quad y'(0^+) = c_1, \dots, y^{(n-1)}(0^+) = c_{n-1},$$

et satisfaisant, partout où f est continue, l'équation

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + a_2 y^{(n-2)}(t) + \dots + a_n y(t) = f(t).$$

De plus, la fonction y est indéfiniment dérivable en tout point où f l'est. Enfin, elle vérifie la formule suivante.

$$y = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{Q}{P} \right) + \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{P} \right) \star f,$$

où P et Q sont définis par (3.2).

DÉMONSTRATION :

Unicité. Si y_1 et y_2 sont deux solutions dans le sens généralisé du théorème, alors $y := y_1 - y_2$ est une fonction de \mathcal{E} , continue sur $(0, +\infty)$, telle que $y(0^+) = \dots = y^{(n-1)}(0^+) = 0$ et qui vérifie pour tout t , sauf là où f n'est pas continue,

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-2)} + \dots + a_n y(t) = 0.$$

La théorie générale des équations différentielles montre qu'alors y est de classe \mathcal{C}^∞ sur $[0, +\infty)$, puis que y est identiquement nulle, ce qui démontre l'unicité.

Existence.

Pour $f = 0$, vous savez déjà depuis longtemps que l'équation à une unique solution, que l'on notera y , et qu'elle est une polynôme d'exponentielles. D'après la discussion qui précède l'énoncé du théorème, puisque y est dans \mathcal{E} , $\mathcal{L}y = Q/P$, mais alors $y = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{Q}{P} \right)$.

Pour f quelconque, en posant $y_f := y - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{Q}{P}\right)$, on se ramène à chercher une solution de l'équation différentielle du théorème, mais avec des conditions initiales nulles. Posons alors

$$y_f := \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{P}\right) \star f.$$

Puisque P est de degré n , la fonction $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{P}\right)$ est de classe \mathcal{C}^{n-2} sur \mathbb{R} , et \mathcal{C}^∞ sur $[0, +\infty)$. Ainsi $y_f \in \mathcal{E}$ et sur tout intervalle ouvert où f est continue, y_f est de classe \mathcal{C}^n d'après le corollaire 3.3.7. De plus

$$y_f^{(k)}(t) = \begin{cases} (\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{P}\right))^{(k)} \star f, & \text{pour } k < n, \\ ((\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{P}\right))^{(n)} \star f)(t) + (\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{P}\right))^{(n-1)}(0+)f(t) \\ = ((\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{P}\right))^{(n)} \star f)(t) + f(t), & \text{pour } k = n. \end{cases}$$

Le calcul direct montre alors que y_f est solution (avec des conditions initiales nulles). \square

Remarque 3.4.2 La démonstration ci-dessus nous rappelle un fait que vous connaissez déjà, mais dans un nouveau langage. Toute solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants se décompose en la somme $y = y_o + y_f$ de deux fonctions.

La première

$$y_o := \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{Q}{P}\right)$$

est la solution de l'équation homogène associée, où f est remplacée par la fonction nulle.

La seconde

$$y_f := \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{P}\right) \star f,$$

est une solution dite particulière de l'équation originelle, où les conditions initiales sont remplacées par zéro.

Le fait nouveau est que cette dernière solution se présente sous la forme d'un produit de convolution.

Système d'équations

La méthode ci-dessus fonctionne tout aussi bien pour les système d'équations différentielles. Considérons en effet $n \geq 1$ équations différentielles d'ordre au plus $p \geq 1$.

$$\sum_{k=0}^n \sum_{j=1}^p a_{ik}^j y_j^{(k)} = f_i, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n,$$

où a_{ij}^k sont des constantes et les f_j sont des fonctions dans \mathcal{E} . Ce système a aussi une écriture matricielle sous la forme

$$\sum_{j=0}^p A_j y^{(j)} = f, \quad (3.3)$$

$$\text{avec } A_j := (a_{ij}^k)_{1 \leq i, k \leq n}; \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}; \quad y := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Pour que le système soit non dégénéré, nous allons supposer de plus que

$$\det A_p = \det(a_{ip}^k) \neq 0.$$

Calculons la transformée de Laplace de chaque membre de 3.3. Notons

$$F = \mathcal{L}f := \begin{pmatrix} \mathcal{L}f_1 \\ \vdots \\ \mathcal{L}f_n \end{pmatrix}; \quad Y = \mathcal{L}y := \begin{pmatrix} \mathcal{L}y_1 \\ \vdots \\ \mathcal{L}y_n \end{pmatrix}.$$

On obtient à l'aide de l'axiome de dérivation l'équation suivante.

$$\left(\sum_{j=0}^p A_j z^j Y \right) - C = F, \quad (3.4)$$

où C est un vecteur colonne de polynôme en z qui dépend des conditions initiales

$$y(0+), \dots, y^{(p-1)}(0+).$$

D'où l'équation

$$A(z)Y(z) = F(z) + C$$

avec $A(z) : \sum_{j=0}^p z^j A_j$. Mais cette dernière matrice est inversible pour $\Re z > a$ dès que a est assez grand. En effet, en développant $\det A$ suivant les puissances de z , on reconnaît un polynôme de degré z^{np} et de coefficient dominant $\det A_p \neq 0$. Ce polynôme, non nul, n'a qu'un nombre fini de zéros et ne s'annule pas sur tout un demi-plan $\Re z > a$ (il suffit de choisir a égal à la plus grande partie réelle des zéros du polynôme). D'où pour $\Re z > a$

$$Y(z) = A^{-1}(z)F(z) + A^{-1}C.$$

Puisque l'inverse de A se calcule à partir de son déterminant et de la transposée de sa commatrice suivant la formule

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t \text{Com}(A),$$

la matrice A^{-1} est une matrice de fractions rationnelles propres. Si pour toute matrice $B = (b_{ij})$, on note $\mathcal{L}^{-1}B := (\mathcal{L}^{-1}(b_{ij}))$, alors on a ici encore une jolie formule analogue à celle de la solution d'une unique équation.

$$y = \mathcal{L}^{-1}(A^{-1}C) + \mathcal{L}^{-1}(A^{-1}) \star f.$$

Ici, $\mathcal{L}^{-1}(A^{-1})$ est une matrice de polynômes d'exponentielles et f est un vecteur de coordonnées dans \mathcal{E} . On généralise le produit matriciel en posant

$$B \star f = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \star (f_j)_{1 \leq j \leq m} := \left(\sum_{j=1}^m b_{ij} \star f_j \right)_{1 \leq i \leq n}.$$

Ici encore, l'analogie avec le cas d'une équation unique est parfait : la solution est la somme de la solution homogène, et d'une solution particulière donnée par des conditions initiales nulles. Cette dernière se calcule par un produit de convolution avec le vecteur f .

3.5 Exemple : un problème de stabilité.

À titre d'illustration, considérons le système mécanique suivant (figure 3.1), constitué de deux ressorts de même raideur k accouplés sur deux masses $m, M > 0$ et supposons que la masse M est soumise à une force Mf (ce choix de normalisation se justifie par la simplicité des équations que nous allons obtenir ainsi). Alors si on dénote par x et y les positions des masses m et M relatives à leur équilibre, la loi fondamentale de la mécanique de Newton donne les équations suivantes.

$$\begin{cases} x'' + 2\omega_1^2 x + \omega_1^2 y = 0, \\ y'' + 2\omega_2^2 x + 2\omega_2^2 y = f, \end{cases}$$

avec $\omega_1^2 := k/m$ et $\omega_2^2 := k/M$.

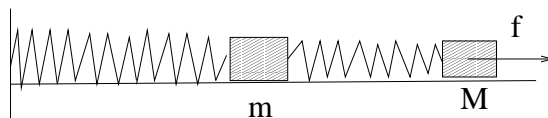


FIG. 3.1 – Un système de deux ressorts

Supposons pour simplifier que les conditions initiales sont nulles. Alors les transformées de Laplace des équations ci-dessus donnent le système

$$\begin{pmatrix} (z^2 + 2\omega_1^2) & \omega_1^2 \\ \omega_2^2 & (z^2 + 2\omega_2^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{z^4 + 2(\omega_1^2 + \omega_2^2)z^2 + 3\omega_1^2\omega_2^2} \begin{pmatrix} (z^2 + 2\omega_2^2) & -\omega_1^2 \\ -\omega_2^2 & (z^2 + 2\omega_1^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix},$$

Il existe donc deux fractions rationnelles R_1 et R_2 telles que $X = R_1 F$ et $Y = R_2 F$. Précisément,

$$R_1 = \frac{-\omega_1^2}{z^4 + 2(\omega_1^2 + \omega_2^2)z^2 + 3\omega_1^2\omega_2^2}; \quad R_2(z) = \frac{z^2 + 2\omega_1^2}{z^4 + 2(\omega_1^2 + \omega_2^2)z^2 + 3\omega_1^2\omega_2^2}.$$

Notons que

$$(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 3\omega_1^2\omega_2^2 = \omega_1^4 + \omega_2^4 - \omega_1^2\omega_2^2 > \omega_1^4 + \omega_2^4 - 2\omega_1^2\omega_2^2 = (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 > 0.$$

Le polynôme $Z^2 + 2(\omega_1^2 + \omega_2^2)Z + 3\omega_1^2\omega_2^2$ a donc deux zéros, distincts et négatifs. On en déduit que le polynôme $P(z) := z^4 + 2(\omega_1^2 + \omega_2^2)z^2 + 3\omega_1^2\omega_2^2$ a exactement 4 racines, simples et imaginaires pures,

$$\pm i\sqrt{-(\omega_1^2 + \omega_2^2) \pm \sqrt{\omega_1^4 + \omega_2^4 - \omega_1^2\omega_2^2}}$$

l'on notera ic_1, \dots, ic_4 . De plus, on vérifie facilement que ces racines ne sont pas zéro du polynôme $z^2 + 2\omega_1^2$. Ainsi R_1 et R_2 n'ont que des pôles simples, et il existe des constantes a_1, \dots, a_4 et b_1, \dots, b_4 telles que

$$\mathcal{L}^{-1}(R_1)(t) = \sum_{k=1}^4 a_k e^{ic_k t}; \quad \mathcal{L}^{-1}(R_2)(t) = \sum_{k=1}^4 b_k e^{ic_k t}.$$

Mais d'après la discussion du paragraphe précédent,

$$x(t) = \sum_{k=1}^4 a_k e^{ic_k t} \star f; \quad y(t) = \sum_{k=1}^4 b_k e^{ic_k t} \star f.$$

Remarque 3.5.1 Supposons que f est à support compact, c'est-à-dire que qu'il existe un instant $t_0 > 0$ tel que $f(t) = 0$ pour $t \geq t_0$. Alors pour $t > t_0$, l'expression de x et y ci-dessus s'écrivent sous la forme suivante.

$$x(t) = \sum_{k=1}^4 a_k e^{ic_k t} \int_0^{t_0} f(s) e^{-ic_k s} ds; \quad y(t) = \sum_{k=1}^4 b_k e^{ic_k t} \int_0^{t_0} f(s) e^{-ic_k s} ds.$$

Ainsi, même si le système n'est perturbé par f que sur un temps fini, le système ne va pas tendre vers sa position d'équilibre, même au bout d'un temps très long : la perturbation reste essentiellement comparable à la taille de f sur $[0, t_0]$ à chaque instant. Pour obtenir un système stable, il faut du frottement, qui amortira le système jusqu'à l'équilibre. Vous connaissiez ce phénomène pour des exemples simples de fonctions f . La transformée de Laplace permet de traiter ce problème pour toutes les fonctions f en même temps. On peut se poser par exemple la question suivante : Comment modifier le système ci-dessus pour que le système soit stable (c'est-à-dire pour que x et y tendent vers zéro) pour toute perturbation f à support compact ?