mais aussi s'il désigne l'*implication*, car alors $p|p$, abrégé en $\bar{p}$, est vrai quel que soit p. Il ne faut pas oublier qu'à côté de sa *proposition*, Nicod pose une *règle* : « Si $p|(r|q)$ est vraie, et si p est vraie, alors q est vraie ». Cette règle oblige à écarter l'implication.

C. Proposons-nous de définir *toutes* les structures d'anneau dans une algèbre de Boole. Il faut trouver, en premier lieu, deux opérations $(\top)$ et $(\perp)$, associatives toutes les deux, l'une d'elles, $(\perp)$, par exemple, étant doublement distributive par rapport à l'autre. Ce premier problème admet 4 solutions : $(\bigvee \text{ et } \cdot)$, $(\cdot \text{ et } \bigvee)$, $(\dot{+} \text{ et } \bigvee)$, $(+ \text{ et } \cdot)$, en désignant par $p \dot{+} q$ l'opération $pq \bigvee p'q'$, et par $p+q$, $pq' \bigvee qp'$. Mais l'opération $(\top)$, prise isolément, doit définir une structure de groupe; par là se trouvent exclues les deux premières solutions. Il ne reste que les deux structures précédemment signalées.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la complétion du dual d'un espace vectoriel localement convexe.* Note (*) de M. **Alexandre Grothendieck**, présentée par M. Élie Cartan.

Soient E un espace vectoriel localement convexe, S un ensemble de parties bornées, convexes, symétriques et fermées de E, E'_S (resp. $\hat{E}'_S$), l'espace des formes linéaires sur E continues (resp. dont les restrictions aux éléments de S sont continues), munis de la topologie de la convergence uniforme sur les éléments de S. Soit E_0 le sous-espace engendré par $\bigcup S$; on vérifie immédiatement que E'_S (resp. $\hat{E}'_S$) est séparé si et seulement si E_0 est dense dans E (resp. égal à E) et que $\hat{E}'_S$ est complet. Si donc $E'_S = \hat{E}'_S$ (et plus généralement si tout $u \in \hat{E}'_S$ a une restriction à E_0 continue), E'_S sera complet. Nous allons établir une réciproque de cette propriété, en supposant toujours E séparé.

Proposition 1. — *Si les éléments de* S *sont précompacts, pour que* E'_S *soit complet, il faut (et il suffit) que la restriction à* E_0 *de tout* $u \in \hat{E}'_S$ *soit continue.*

On se ramène en effet facilement à la

Proposition 2. — *Si les éléments de* S *sont précompacts,* E'_S *est dense dans* $\hat{E}'_S$.

Tout se ramène à montrer que si $A \in S$, $u \in \hat{E}'_S$, et $\varepsilon > 0$, il existe $v \in E'_S$ telle que $|(u-v)(A)| < \varepsilon$. Soient V un voisinage convexe symétrique fermé de l'origine tel que $|u(A \cap V)| < \varepsilon/4$, M un sous-espace de dimension finie de E tel que $A \subset A \cap M + V$; si v coïncide avec u sur M, on voit que $(u-v)(A) \subset u((A-A) \cap V) + v((A-A) \cap V) \subset 2u(B) + 2v(B)$, où $B = A \cap V$ (on note que $A - A = 2A$ car A est symétrique convexe). On a $|u(B)| < \varepsilon/4$, il suffit que l'on ait $|v(B)|$ le sous-espace M, de $< \varepsilon/4$, et le problème se pose donc ainsi : on connaît une forme u_0 sur M de dimension finie, telle

(*) Séance du 6 février 1950.

que $|u_0(B)| < \alpha$, B étant fermé convexe précompact; peut-on prolonger continûment u_0 à tout E, de telle sorte que $|v(B)| < \alpha$? Or, $\overset{-1}{u_0}(\alpha)$ étant complet, est encore fermé dans le complété $\hat{E}$ de E et n'y rencontre donc pas l'adhérence $\overline{B}$ de B (relativement fermé dans E). On peut alors faire le prolongement dans $\hat{E}$ par le théorème de Hahn-Banach, en considérant un voisinage convexe $\overline{B} + U$ du *compact* $\overline{B}$ qui ne recontre pas $\overset{-1}{u_0}(\alpha)$, C. Q. F. D.

Comme le dual de E est le même pour la topologie donnée et sa topologie faible, et que les ensembles bornés sont faiblement précompacts, ces propositions seront d'application assez générale. Signalons les

Corollaires. — 1° Si $E_0 = E$ et si les éléments de S sont précompacts, le complété de E'_S s'identifie à $\hat{E}'_S$.

2° Si E'_S est complet, il en est de même de E'_T pour $T \supset S$ (S, T ensembles de parties bornées de E, sans plus).

En utilisant le fait que E s'identifie à un dual topologique de son dual faible, on obtient de plus :

3° Le complété de E s'identifie à l'espace des formes linéaires sur son dual dont les restrictions aux parties équicontinues sont faiblement continues, muni de la topologie de la convergence uniforme sur ces parties. (On retrouve en particulier le complété pour la topologie faible.)

4° Si E est complet, toute topologie localement convexe plus fine qui a même dual, et plus généralement qui puisse se définir par une famille de semi-normes *semi-continues* (soit : par un système fondamental de voisinages convexes *fermés*) est encore complète. [En particulier la topologie forte de Mackey associée (1) et la topologie induite par le bidual fort (2) sont encore complètes.]

5° Si E est complet, toute forme linéaire sur son dual dont les restrictions aux parties équicontinues sont faiblement continues est faiblement continue. On retrouve ainsi un fait connu pour les espaces de Fréchet et leurs limites inductives (2).

---

(1) *Cf.* G. W. Mackey, *Transactions of the Amer. Math. Soc.*, 57, 1945, p. 155-207 et 59, 1946, p. 520-537.

(2) *Cf.* J. Dieudonné, et L. Schwartz, *La dualité dans les espaces* ($\mathcal{F}$) *et* ($\mathcal{LF}$) (à paraître aux *Annales de Grenoble*, 1950).