ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Résultats nouveaux dans la théorie des opérations linéaires* (I). Note (*) de M. **Alexandre Grothendieck**, présentée par M. Arnaud Denjoy.

Le résultat essentiel de cette Note est le théorème 1 : L'opérateur identique d'un espace de Hilbert est préintégral. Démonstration à paraître au *Boletim da Sociedade de Matematica de São Paulo*. Voir ma thèse et un article antérieur (1).

Pour fixer les idées, il n'est question que d'espaces de Banach. Je suis les notations et la terminologie de ma thèse [*voir* aussi (1) et le séminaire de L. Schwartz 1953-1954], sauf que je désigne par $\check{\otimes}$ ce qui avait été noté $\hat{\hat{\otimes}}$. Je suppose donc connue la signification de $E \hat{\otimes} F$, $E \check{\otimes} F$, la notion de forme bilinéaire et d'application *intégrale*. Les notations L^1, L^2, L^∞ désignent des espaces construits sur une mesure de Radon arbitraire, qui peut être différente d'un espace à l'autre dans une même formule. $C_0(M)$ désigne l'espace des fonctions continues nulles à l'infini sur l'espace localement compact M ; dans tous les énoncés, on pourrait remplacer L^∞ par $C_0(M)$. Les flèches désignent des applications linéaires continues.

Rappelons (*thèse*, § 4, n° 6) qu'une forme bilinéaire u sur $E \times F$ est dite *semi-intégrale gauche* si E est le quotient d'un espace G (qu'on peut alors supposer être un espace quelconque du type L^1) tel que u soit intégrale sur $G \times F$. Analogue pour *semi-intégrale droite*. On dit que u est *préintégrale* si E est le quotient d'un G et F le quotient d'un H (on peut alors supposer que G et H sont des espaces L^1 quelconques ayant E resp. F pour quotient) tels que u soit intégrale sur $G \times H$. Une application linéaire $E \to F$ est dite semi-intégrale gauche (resp. ...) si la forme bilinéaire sur $E \times F'$ qu'elle définit l'est. Donc u est semi-intégrale gauche si et seulement si l'image de la boule unité de E est semi-intégrale (2). Critère « transposé » pour les applications semi-intégrales droites. Donc u est préintégrale si et seulement si les composées $L^1 \to E \to F \to L^\infty$ sont intégrales (3).

On a une notion évidente de « norme semi-intégrale gauche » (resp. norme semi-intégrale droite, resp. norme préintégrale) d'une forme bilinéaire ou d'une application linéaire.

(*) Séance du 28 juin 1954.

(1) *Ann. Inst. Fourier*, 4, 1954, p. 73-112. (Ma thèse n'est pas encore parue.)

(2) Par exemple contenue dans l'image de la boule unité d'un espace G convenable par une application intégrale ; ou encore si pour toute application $L^1 \to E$, le composé $L^1 \to E \to F$ est intégral, ou encore si pour toute application $F \to L^1$, le composé $E \to F \to L^1$ est intégral.

(3) Ou aussi si les composés $E \to F \to L^1 \to L^\infty$ ou encore $L^\infty \to L^1 \to E \to F$ le sont ; ces deux derniers sont même alors nucléaires.

Proposition. — *Les applications semi-intégrales gauches (resp. droites) d'un espace de Hilbert dans un autre sont exactement les applications de Hilbert-Schmidt.*

(La norme semi-intégrale — gauche ou droite — est ici comprise entre la norme de Hilbert-Schmidt et son produit par $\sqrt{2}$).

Une forme bilinéaire u sur $E \times F$ est dite *hilbertienne* si elle est continue pour des normes préhilbertiennes continues convenables sur E, F. Si $E = F$, u symétrique (cas des scalaires réels) ou hermitienne (scalaires complexes), cela signifie aussi que u est différence de deux formes « positives ». Donc une application linéaire $E \to F$ est dite hilbertienne (par exemple de « norme hilbertienne » ≤ 1) si elle se factorise en $E \to L^2 \to F$ (où $E \to L^2$ et $L^2 \to F$ sont de norme ≤ 1) [4].

Une fonction f sur un produit $I \times J$ est dite *fonction intégrale* (resp. *fonction hilbertienne*) si elle est bornée et définit une forme bilinéaire intégrale (resp. hilbertienne) sur $l^1(I) \times l^1(J)$. En principe, cela peut se vérifier par le fait que la « norme intégrale » (resp. hilbertienne) de la matrice restriction de f à $M \times N$ (M et N, parties finies de I resp. J) reste bornée. Définition analogue, plus généralement, si I et J sont des espaces localement compacts munis de mesures μ (resp. ν) et si f est une classe de fonctions mesurables sur $I \times J$ muni de $\mu \otimes \nu$. Si $I = J$ et si f est « hermitienne », f est hilbertienne si et seulement si elle est différence de deux fonctions bornées « de type positif ».

Théorème 1. — *L'application identique d'un espace de Hilbert sur lui-même est préintégrale* [5].

Énoncés équivalents :

Corollaire 1. — *Il y a identité entre applications linéaires préintégrales et hilbertiennes, et entre fonctions intégrales et hilbertiennes.*

Donc *sur un produit* $L^1 \times L^1$, *les formes intégrales sont identiques aux formes hilbertiennes.*

Corollaire 2. — *Tout composé* $L^1 \to L^2 \to L^\infty$, $L^2 \to L^\infty \to L^1$, $L^\infty \to L^1 \to L^2$ *est intégral (les deux derniers sont mêmes nucléaires).*

Appliquant ceci à l'application identique $l^1 \to l^2$, et $l^2 \to c_0$ (qui est donc semi-intégrale droite resp. gauche), on trouve la généralisation d'un théorème peu connu de Littlewood, ainsi qu'un énoncé « dual » :

Corollaire 3. — $l^1 \check{\otimes} L^1 \subset l^2 \hat{\otimes} L^1$, à fortiori *toute suite sommable dans* L_1 *est de carré absolument sommable.*

---

(4) Cela signifie aussi que l'image de la boule unité de E est contenue dans un « ellipsoïde » (borné) de F, par exemple dans l'image de la boule unité d'un Hilbert par une application linéaire continue.

(5) La norme préintégrable h, dans le cas où la dimension est infinie, est une constante universelle, comprise entre $\pi/2$ et sh $\pi/2$.

Corollaire 3 *bis*. — $l^2 \check{\otimes} L^\infty \subset c_0 \hat{\otimes} L^\infty$, à fortiori *toute suite de carré absolument sommable dans* L^∞ *est « nucléaire »*.

Les injections indiquées dans ces deux corollaires sont de norme $\leq h$, et même de norme $\leq \sqrt{2}$ (meilleure constante possible). C'est aussi la meilleure constante dans la conséquence suivante :

Corollaire 4. — *Les composés* $L^2 \to L^1 \to L^2$ *et* $L^2 \to L^\infty \to L^2$ *sont du type Hilbert-Schmidt* (d'ailleurs réciproquement, les Hilbert-Schmidt peuvent se factoriser ainsi).

L'application identique $l^1 \to c_0$ est un composé $l^1 \to l^2 \to c_0$, donc intégrale (en fait on voit facilement que sa norme intégrale est 1). Énoncé équivalent :

Corollaire 5. — $l^1 \check{\otimes} E \to c_0 \hat{\otimes} E$ (*toute suite sommable dans* E *est nucléaire*).

Le corollaire suivant est encore équivalent au théorème 1 :

Corollaire 6. — $C_0(M) \hat{\otimes} C_0(M)$ *est l'ensemble des combinaisons linéaires des fonctions* $\in C_0(M \times M)$ *« de type positif »*.

MÉCANIQUE DES FLUIDES. — *Traînée et porosité aérodynamique d'une bande perméable; cas des tôles perforées.* Note de MM. **Jacques Valensi** et **René de Possel**, transmise par M. Joseph Pérès.

Les mesures de traînée effectuées par les Auteurs pour une bande de toile métallique ([1]) ont été reprises pour des tôles perforées. Elles conduisent à l'expression déjà trouvée en fonction de la porosité aérodynamique, mais à des résultats différents en fonction de la porosité géométrique. Comparaison avec les mesures effectuées par d'autres Auteurs.

1° Résumons quelques résultats précédents. D'après nos mesures ([1]) et celles d'autres Auteurs ([2]), ([3]), nous avons admis la loi *locale*

$$k(V, i) = -\frac{\Delta p}{\left(\frac{1}{2}\rho V^2\right)} = \chi V^{\gamma-2} \cos i \tag{1}$$

où V est la vitesse immédiatement avant la paroi perméable, i l'angle de cette vitesse avec la normale, χ et γ des constantes pour une paroi donnée, ρ la densité et Δp l'accroissement de pression.

En étendant la théorie du sillage d'Oseen, nous en avons déduit pour une bande plane indéfinie la formule *globale* approchée suivante

$$C_x = -\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho a^2} = 4(1-\sigma) \tag{2}$$

([1]) *Comptes rendus*, 236, 1953, p. 2211.

([2]) G. I. Taylor and R. M. Davies, *Aeronautical research council*, reports and memoranda, n° 2237, 1944.

([3]) L. F. G. Simmons and C. F. Cowdrey, *id.*, n° 2276, 1944.