analogue s'applique aussi aux ensembles A_λ formés par la réunion d'un nombre fini d'ensembles convexes. Le cas général des ensembles quelconques s'achèvera par un passage aux limites.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Résultats nouveaux dans la théorie des opérations linéaires* (II). Note (*) de M. **Alexandre Grothendieck**, présentée par M. Arnaud Denjoy.

Suite de la Note [1]. Les notations sont les mêmes que dans la Note précédente.

Une transformation du théorème 1 de [1] par dualité donne le

Théorème 1. — *Soit u une forme hermitienne sur* $C_0(M)\times C_0(M)$, *alors on a* $u \leqslant u_\mu$, *où* u_μ *est la forme hermitienne positive* $\int f\bar{g}\,d\mu$ *définie par une mesure positive* μ *de norme* $\leqq h\|u\|$.

La meilleure constante possible h est la même que dans le théorème 1 de [1]. Qualitativement, le théorème 1 est la conjonction des deux corollaires suivants :

Corollaire 1. — *Pour toute application* $u : C_0(M) \to L^2$ *il existe une mesure positive bornée* μ *sur* M *telle que u soit continue pour la semi-norme induite sur* $C_0(M)$ *par* $L^2(\mu)$.

Corollaire 2. — *Toute application* $u : L^\infty \to L^1$ *est hilbertienne.*

(La norme hilbertienne est $\leqq 4h\|u\|$.) Énoncés équivalents au corollaire 1 :

Corollaire 3. — *Toute application linéaire faiblement continue de* $L^\infty(\mu)$ *dans un Hilbert* L^2 *se factorise en* $L^\infty(\mu) \to L^2(\mu) \to L^2$, *où la première flèche désigne l'opération de multiplication par une* $f \in L^2(\mu)$. *De même toute application linéaire continue* $L^2 \to L^1(\mu)$ *se factorise en* $L^2 \to L^2(\mu) \to L^1(\mu)$, *où la deuxième flèche désigne l'opération de multiplication par une* $f \in L^2(\mu)$.

Soient M et N deux espaces localement compacts munis de mesures positives μ resp. ν, munissons $M\times N$ de $\mu\otimes\nu$. Alors les $f\in L^\infty(\mu\otimes\nu)$ qui sont *intégrales* sont des opérateurs de multiplication dans tous les $L^p(\mu)\hat{\otimes} L^q(\nu)$, donc dans leurs duals $B(L^p(\mu), L^q(\nu))$. Le corollaire 3 permet de donner une réciproque :

Corollaire 4. — *Les « opérateurs de multiplication » dans* $L^2(\mu)\hat{\otimes} L^2(\nu)$ *(ou encore dans son dual* $B(L^2(\mu), L^2(\nu)))$ *sont exactement les* $f\in L^\infty(\mu\otimes\nu)$ *qui sont intégrales.*

Compte tenu du théorème 1, de [1], le corollaire 2 signifie aussi que les applications $L^\infty \to L^1$ sont préintégrales (la norme préintégrale de u est $\leqq 4h^2\|u\|$). Donc :

(*) Séance du 28 juin 1954.

[1] A. Grothendieck, *Comptes rendus*, 238, 1954, p. 577.

Corollaire 5. — *Les composés* $L^1 \to L^\infty \to L^1 \to L^\infty$ *et* $L^\infty \to L^1 \to L^\infty \to L^1$ *sont intégrales (le deuxième est même nucléaire).*

En comparant le corollaire précédent avec le corollaire 4 du théorème 1, (1), on trouve qu'en composant une séquence de quatre applications linéaires entre espaces du type L^1, L^2, L^∞, telle que le type de deux espaces consécutifs soit distinct, on obtient une application nucléaire. On en conclut la partie non standard du

Corollaire 6. — *Un espace localement convexe nucléaire* E *a un système fondamental de voisinages disqués* V *de zéro tels que les espaces* $\widehat{E_V}$ *soient : a. du type* L^1, *ou b. du type* L^2, *ou enfin c. du type* L^∞. *Si réciproquement, l'espace localement convexe* E *satisfait à deux de ces conditions, il est nucléaire* (2).

En vertu du théorème 1, de (1), une caractérisation vectorielle-topologique des espaces de Hilbert est que l'application identique $E \to E$ soit préintégrale. Une autre caractérisation, conséquence du corollaire 2, est donnée dans la

Proposition 1. — *Soit* E *un espace de Hilbert. Alors* E *est isomorphe à un espace normé quotient d'un espace* L^∞, *et a un espace normé sous-espace d'un espace* L^1. *Réciproquement, si* E *est isomorphe comme espace vectoriel-topologique à un quotient d'un espace* L^∞ *et à un sous-espace d'un espace* L^1, *alors* E *est isomorphe a un espace de Hilbert.*

Proposition 2. — *Soit* G *un groupe localement compact. Si* $f \in L^\infty(G)$ *est combinaison linéaire de fonctions continues de type positif, alors la forme bilinéaire* $\langle \varphi \star \psi, f \rangle$ *sur* $L^1(G) \times L^1(G)$ *est hilbertienne,* i. e. *la fonction* $f(s^{-1}t)$ *sur* $G \times G$ *est hilbertienne. La réciproque est vraie si* G *est compact, ou abélien, ou plus généralement admet une suite de composition formée de tels groupes* (3).

L'élémentaire proposition 2 est surtout intéressante grâce à l'identité entre formes hilbertiennes et intégrales sur $L^1 \times L^1$. Prenant $\check{f} = g \star h$, avec g, $h \in L^2(G)$, on voit que $f(s^{-1}t)$ appartient à $C_0(G) \hat{\otimes} C_0(G)$, d'où facilement :

Corollaire. — *Toute forme bilinéaire continue sur* $C_0(G) \times C_0(G)$ *invariante par les translations gauches, définit une forme bilinéaire continue sur* $L^1(G) \times L^1(G)$ *invariante par les translations gauches* (4).

Pour finir, indiquons que l'on peut délimiter un système de 14 classes naturelles de « produits tensoriels topologiques » et d'applications linéaires correspondantes entre espaces de Banach, stable par passage d'une classe à la classe

(2) Ce corollaire implique sans plus que l'espace ($\mathcal{E}$) de L. Schwartz est nucléaire, d'où la liste des espaces nucléaires usuels.

(3) La condition restrictive de la dernière partie de l'énoncé est probablement inutile; d'autre part, les deux normes « naturelles » pour f correspondant aux deux propriétés envisagées dans l'énoncé, sont les mêmes.

(4) En fait ce corollaire implique déjà le théorème 1 de (1).

« duale », et pour l'opération naturelle qui nous a fait passer de la classe des applications intégrales aux applications semi-intégrales (5).

Chacune de ces classes se caractérise de diverses façons simples. Quand un des espaces E, F est un L^1, L^2 ou L^∞, il n'y a plus que cinq ou six classes remarquables distinctes d'applications linéaires de E dans F, et si E et F sont tous deux d'un des types L^1, L^2 ou L^∞, il ne reste heureusement que *deux* classes (les applications linéaires continues quelconques, et les applications intégrales) si E et F sont de type distinct, et *trois* classes si E et F sont de même type (la classe intermédiaire étant la classe des applications hilbertiennes dans le cas de L^1 ou de L^∞, et celle des applications de Hilbert-Schmidt dans le cas de L^2). On peut déterminer pour les applications les plus fréquentes en analyse (convolutions, multiplications) à quelles classes elles appartiennent, et déterminer ainsi leurs propriétés vectorielles-topologiques essentielles, qui semblaient ignorées jusqu'ici.

TOPOLOGIE. — *Sur la somme d'indices des coïncidences de deux représentations.* Note de M. **Josef Weier**, transmise par M. Henri Villat.

Désignons par n un nombre naturel, — par f et f' des représentations homotopes d'une variété euclidienne et finie à n dimensions en elle-même, — par λ et λ' le nombre de Lefschetz (1) de f et de f'. Supposons que le nombre des points fixes de f et aussi de f' soit fini. Alors la somme d'indices des points fixes de f est égale à $(-1)^n\lambda$; et celle de f', à $(-1)^n\lambda'$. Puisque le nombre de Lefschetz est un invariant d'homologie, les sommes d'indices des points fixes de f et f' sont égaux. C'est un théorème bien connu [*voir* par exemple Hopf (2)].

Soient plus généralement Q, R des variétés topologiques et compactes à n dimensions et g, g' des représentations homotopes de Q en R, — de même, h, h' des représentations homotopes de Q en R. De plus supposons que le nombre des coïncidences de (g, h) et pareillement de (g', h') soit fini. Alors les sommes d'indices des coïncidences de (g, h), ou de (g', h'), sont des nombres bien définis; désignant ces sommes par μ et μ' on peut — en correspondance avec le cas des points fixes — nommer $(-1)^n\mu$ le « nombre de *Lefschetz* » de la paire (g, h) des deux représentations g et h.

Puis, comme pour les points fixes, on aura le théorème suivant :

Théorème. — *En variétés topologiques et compactes la somme d'indices des*

(5) Ce système est d'ailleurs « engendré » par la classe (naturelle certes !) de toutes les applications linéaires continues (à l'aide des opérations précédentes).

(1) *Trans. Amer. Math. Soc.*, 28, 1926, p. 1.

(2) *Math. Zeitschr.*, 29, 1929, p. 493.