(donc, dans l'exemple ci-dessus, nous posons que le *m-treillis* dans l'exemple 1° et P dans l'exemple 2° possèdent les éléments o, 1, P est un treillis distributif dans l'exemple 2°, et l'anneau R dans l'exemple 4° possède au moins un élément unité à droite qui est contenu dans S). Il en résulte que les éléments $\overline{O}=\bigwedge(o)$ et $\bar{\varepsilon}=\bigwedge(\varepsilon)$ de L ont les mêmes propriétés dans L.

Chaque congruence E dans P définit une *classe-zéro* $H=E(o)$ (classe des éléments congrus à o), qui possède les propriétés caractéristiques : $H\in L$ et $H.P\subseteq H$. La famille des congruences ainsi associées à un tel ensemble H contient des éléments maximal et minimal qu'on peut définir directement en termes de H. Pour la $(\Sigma^*, .)$ algèbre L, la classe-zéro H a la forme simple : $H=\bigwedge(h)$, où $h.x<h$ pour chaque x de L; et les congruences maximale et minimale dont H est la classe-zéro sont définies respectivement par :

$$a\equiv b \quad \text{si} \quad a+h=b+h, \tag{1}$$

et

$$a\equiv b \quad \text{si} \quad h::a=h::b \tag{2}$$

($h::a$ étant l'élément x de L maximal par rapport à la propriété $a.x<h$).

Finalement on a une correspondance biunivoque, $H \rightleftarrows H^*$, entre les classes-zéro de P et de L, tels que les congruences maximales et minimales dans P dont H est la classe-zéro sont respectivement les restrictions à P (considéré comme un sous-ensemble de leur extension L) des congruences maximales et minimales dans L dont H^* est la classe-zéro.

Les démonstrations paraîtront dans un autre Recueil.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Quelques résultats relatifs à la dualité dans les espaces* $(\mathcal{F})$. Note de M. **Alexandre Grothendieck**, présentée par M. Elie Cartan.

Soient E un espace $(\mathcal{F})$, E' son dual fort, E'' son bidual fort [1]. Les résultats suivants répondent partiellement à certaines questions posées dans [1].

Proposition 1. — *Toute partie bornée dénombrable de* E'' *est contenue dans l'adhérence faible d'une partie bornée de* E. [*Le qualificatif* faible *dans* E'' *réfère à la topologie* $\sigma(E'', E')$.]

Corollaires. — 1° E'' *est complet pour la topologie forte.*

2° *Toute partie bornée de* E'' *est relativement faiblement semi-compacte.*

3° E'' *est faiblement semi-complet.*

Proposition 2. — *Toute forme linéaire sur* E', *bornée sur les parties bornées,*

[1] J. Dieudonné et L. Schwartz, *La dualité dans les espaces* $(\mathcal{F})$ *et* $(\mathcal{LF})$ (à paraître aux *Annales de Grenoble*, 1950). La terminologie est celle de cet article.

est, dans le dual algébrique de E', *faiblement adhérente à une partie bornée de* E''.

Corollaires. — 1° *Si* E *est distingué (en particulier, si* E *est réflexif), toute forme linéaire sur* E' *bornée sur les bornés est fortement continue.*

2° *Si une forme linéaire sur* E' *est bornée sur les parties bornées, ses restrictions aux parties de* E' *compactes pour* $\sigma(E', E'')$ *sont continues pour cette topologie. Si* E'' *est complet pour* $\tau(E'', E')$, *toute forme sur* E' *bornée sur les ensembles bornés est fortement continue.*

Proposition 3. — *Toute partie convexe cerclée de* E' *dont l'intersection avec toute partie bornée est un voisinage de l'origine pour la topologie induite par la topologie forte, est un voisinage fort de l'origine.*

Corollaires. — 1° *Pour qu'une application linéaire de* E', *dans un espace localement convexe soit continue pour la topologie forte de* E', *il suffit que ses restrictions aux parties bornées le soient.*

2° *Si* F *est un espace localement convexe complet, l'espace des applications linéaires fortement continues de* E' *dans* F, *muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées, est complet.*

Proposition 4. — *Si* E' *est fortement séparable,* E *est distingué.*

Ces propositions se démontrent toutes indépendamment les unes des autres, et leur démonstration fait intervenir essentiellement le fait que E est métrisable. La proposition qui suit fait intervenir la proposition 2.

Proposition 5. — *Si le sous-espace fermé* F *de l'espace* ($\mathfrak{F}$) E *est distingué, le dual fort de* F *s'identifie au quotient de* E' *fort par le sous-espace* F^0 *orthogonal à* F.

Il en est donc en particulier ainsi chaque fois que E' est fortement séparable.

Signalons encore une proposition plus générale et plus facile, qui redonne immédiatement la réflexivité des espaces $D_{(L^p)}$ considérés par M. L. Schwartz (²).

Proposition 6. — *Soit* E *un espace localement convexe séparé dont la topologie puisse se définir comme la moins fine de celles qui rendent continues les applications* f_i, *éléments d'une famille d'applications linéaires de* E *dans des espaces semi-réflexifs* F_i. *Pour que* E *soit semi-réflexif, il faut et il suffit alors que ses parties bornées et fermées soient complètes.*

Notons enfin une simplification de notre résultat (³) : l'hypothèse de précompacité est entièrement inutile, car on montre facilement que l'espace E'_S des formes linéaires sur E dont les restrictions aux parties éléments de S sont continues, ne dépend encore que de S et de la topologie faible de E. Les corollaires 2 et 4 de (³) peuvent d'ailleurs s'obtenir facilement directement, et

(²) *Théorie des distributions*, 2 (à paraître prochainement aux *Publications de l'Institut de Mathématiques de Strasbourg*).

(³) A. Grothendieck, *Comptes rendus*, 230, 1950, p. 605.

se trouvent déjà dans ([4]). Mais donnons un autre corollaire intéressant : *Si l'espace localement convexe* E *est complet et son dual fort semi-réflexif, alors* E *est réflexif.*

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une famille de polynômes orthogonaux qui contient les polynômes d'Hermite et de Laguerre comme cas limites.* Note (*) de M. **Félix Pollaczek**, présentée par M. Henri Villat.

Ci-dessous, nous montrons que les polynômes $P_n(z; \lambda, \varphi)$ définis par la formule de récurrence

$$(1)\qquad nP_n - 2[(n-1+\lambda)\cos\varphi + z\sin\varphi]P_{n-1} + (n-2+2\lambda)P_{n-2} = 0$$
$$(n=1, 2, \ldots;\ P_0=1,\ P_{-1}=0)$$

où $\lambda > 0$, $0 < \varphi < \pi$, sont orthogonaux, avec le poids

$$(2)\qquad \rho(z) = Ce^{-(\pi-2\varphi)z}\Gamma(\lambda+iz)\Gamma(\lambda-iz),\qquad C=\frac{(2\sin\varphi)^{2\lambda}}{\pi\Gamma(2\lambda)},$$

dans l'intervalle $-\infty < z < \infty$, les relations d'orthogonalité étant

$$(3)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} P_m P_n \rho\, dz = \frac{\Gamma(n+2\lambda)}{n!\,\Gamma(2\lambda)}\delta_{mn}\qquad (m, n=0, 1, \ldots).$$

Ces polynômes pourraient être déduits par le processus de confluence

$$P_n(z; \lambda, \varphi) = \lim_{\varepsilon=0} P_n\left(\varepsilon z + \cos\varphi;\ \lambda,\ \frac{2\sin\varphi}{\varepsilon},\ -\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\varepsilon}\right),$$

des polynômes hypersphériques généralisés $P_n(z; \lambda, 2a, 2b)$, définis par les relations

$$nP_n = 2[(n-1+\lambda+a)z+b]P_{n-1} - (n-2+2\lambda)P_{n-2}\qquad (n=1, 2, \ldots;\ P_0=1,\ P_{-1}=0),$$

et orthogonaux dans $(-1, 1)$ que M. G. Szegö ([1]), généralisant nos polynômes $P_n(z; a, b)$ ([2]) a construits récemment; mais, la théorie des $P_n(z; \lambda, \varphi)$ étant plus simple, il est préférable de la développer sans recourir aux propriétés des $P_n(z; \lambda, a, b)$.

Multipliant (1) par x^{n-1} et sommant, on obtient pour la fonction

$$(4)\qquad g(x, z) = \sum_0^\infty x^n P_n(z)\qquad (|x|<1)$$

l'équation différentielle $(x^2 - 2x\cos\varphi + 1)\,dg/dx = 2g(\lambda\cos\varphi + z\sin\varphi - \lambda x)$

([4]) G. W. Mackey, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 59, 1946, p. 520-537.

(*) Séance du 17 avril 1950.

([1]) *Cf.* par exemple *Comptes rendus*, 228, 1949, p. 1998-2000. Le Mémoire de M. Szegö sera publié dans le *Bull. Amer. Math. Soc.*

([2]) *Comptes rendus*, 228, 1949, p. 1363-1365.