ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Critères généraux de compacité dans les espaces vectoriels localement convexes. Pathologie des espaces* ($\mathcal{LF}$). Note (*) de

M. **Alexandre Grothendieck**, présentée par M. Arnaud Denjoy.

La première partie de cette Note généralise des résultats d'Eberlein et de Krein en indiquant des cas très étendus où, dans un espace localement convexe, la semi-compacité d'un ensemble entraîne la compacité de son enveloppe convexe fermée. La seconde partie annonce l'existence de contre-exemples résolvant des problèmes relatifs aux espaces ($\mathcal{LF}$).

1. Fréquemment, la topologie d'un espace vectoriel localement convexe séparé se définit explicitement comme la moins fine des topologies sur E rendant continues des applications linéaires f_i de E dans des espaces localement convexes séparés F_i [il en est en particulier ainsi pour les espaces usuels de fonctions dérivables, et divers espaces fonctionnels définis par des conditions de croissance à l'infini; *cf.* par exemple (²)]. E s'identifie alors à un sous-espace du produit vectoriel-topologique $F = \Pi F_i$; cette remarque permet d'établir le critère suivant (grâce au fait que pour une partie *convexe* de F, il revient au même qu'elle soit fermée pour les diverses topologies localement convexes sur F donnant le même dual F') :

Théorème 1. — *Soit* E *un espace vectoriel,* (f_i) *une famille d'applications de* E *dans des espaces vectoriels localement convexes séparés* F_i, *soit* T (*resp.* T_τ) *la topologie sur* E *la moins fine qui rende continue les* f_i [*resp. quand chaque* F_i *est muni de* $\tau(F_i, F'_i)$ (¹)], *supposons* E *séparé pour* T. *Pour qu'une partie* convexe A *de* E *soit relativement compacte pour* T, *il faut et il suffit que tout* $f_i(A)$ *soit relativement compact dans* F_i *et que l'adhérence de* A *soit complète pour* T_τ.

L'intérêt de ce théorème vient du fait qu'il est moins exigeant *a priori* de supposer une partie de E complète pour T_τ que pour T; en particulier, le théorème s'applique pour les topologies faibles sur les F_i, on a le

Corollaire. — *Sous les conditions précédentes, pour qu'une partie* A *de* E *soit faiblement relativement compacte, il faut et il suffit que les* $f_i(A)$ *le soient, et que l'adhérence de* A *soit complète pour* T_τ. *La proposition* 6 *de* (³) *en est un cas particulier.*

Notons maintenant la très facile

Proposition 1. — *La topologie de tout espace localement convexe séparé peut se définir comme ci-dessus, les* F_i *étant des* espaces de Banach.

Si alors E est un espace localement convexe séparé quelconque, de dual E',

---

(*) Séance du 30 octobre 1950.

(¹) J. Dieudonné et L. Schwartz, *Annales de Grenoble,* 1950.

(²) L. Schwartz, *Publications de l'Institut Mathématique de Strasbourg.*

(³) A. Grothendieck, *Comptes rendus,* 230, 1950, p. 1561-1563.

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

appliquons la proposition 1 pour la topologie $\tau(E, E')$, puis le corollaire du théorème 1; en notant que dans le cas des espaces de Banach et leur topologie faible, les résultats qui suivent sont classiques [théorèmes d'Eberlein; *cf.* ([1]) et Krein ([4])], on démontre immédiatement le cas particulier *faible* du

THÉORÈME 2. — *Soit* A *une partie d'un espace localement convexe séparé* E. *Pour que son enveloppe convexe et fermée (resp. son enveloppe convexe cerclée et fermée)* C *soit compacte, il faut et il suffit que* A *soit relativement semi-compact, et* C *complète pour* $\tau(E, E')$.

(Par relativement semi-compact, nous entendons : toute suite extraite admet une valeur d'adhérence). Le cas général se déduit facilement du cas faible, en notant que si A est relativement semi-compact, il est précompact (théorème de A. Weil), donc aussi son enveloppe convexe (cerclée) fermée C, de plus C est complète, car elle est faiblement compacte.

COROLLAIRE. — *Soit* E *un espace localement convexe séparé et complet dont toute partie bornée et fermée soit complète* (à fortiori, *il suffit que* E *soit complet*). *Alors, si* A *est une partie faiblement relativement semi-compacte, son enveloppe convexe cerclée fermée est faiblement compacte* (à fortiori, A *est faiblement relativement compact*).

Le théorème 2 sera d'application commode chaque fois qu'on aura besoin d'un critère *dénombrable* de compacité, ou d'un critère de compacité pour une enveloppe convexe, ce qui n'est pas rare [par exemple en théorie ergodique, *cf.* ([5]), et théorie de l'intégrale faible].

2. Signalons seulement ici qu'une simplification d'un important cas *pathologique* construit par G. Köthe nous a permis de l'adapter pour infirmer simultanément, pour des espaces ($\mathcal{LF}$) réflexifs et séparables, les conjectures de 1, 2, 3, 4, 9 et 10 signalées comme ouvertes dans ([1]). Enfin, remarquons qu'un résultat de topologie générale permet d'énoncer le corollaire suivant des propositions 1 et 2 de ([5]) : toute forme linéaire sur E′, uniformément bornée sur les parties bornées, est continue *pour les suites* pour la topologie $\sigma(E', E'')$.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Fonctions presque automorphes inférieures : les presque cycliques et les presque elliptiques.* Note (*) de M. **PAUL MÉTRAL**, présentée par M. Joseph Pérès.

Suivant l'importance que l'on donne à la notion de substitution ou à celle de domaine, on peut construire différentes théories de fonctions presque automorphes : il existe dans cette indétermination une certaine analogie avec celle

---

([4]) M. KREIN, *C. R. U. R. S. S.*, vol, 14, 1937, p. 5-7.

([5]) F. EBERLEIN, *Transactions of the Amer. Math. Soc.*, 67, n° 1, p. 217-240.

(*) Séance du 23 octobre 1950.