une sous-*-algèbre abélienne maximale de R^d (resp. R^g). Les théorèmes 3 et 4 sont applicables et redonnent facilement, comme cas particuliers, la discussion de [N].

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Quelques résultats sur les espaces vectoriels topologiques.* Note de M. **Alexandre Grothendieck**, présentée par M. Arnaud Denjoy.

Énumération de divers résultats relatifs à la structure des sous-espaces ou espaces quotients de certains espaces vectoriels topologiques, aux applications linéaires d'espaces du type C(K) ou du type L^1, et enfin aux fonctions faiblement mesurables.

1. Quelques résultats négatifs. — *a.* Il existe un espace E du type $(\mathcal{M})$ [*voir* (1)] et un sous-espace vectoriel fermé F tels que le quotient E/F soit isomorphe à l^1. Cela résout par la négative la question 4 de la fin de l'article (1). De même les questions 5, 6, 8 ont une réponse négative (la dernière question a été résolue en collaboration avec M. G. Köthe). Si l'on tient compte des résultats annoncés dans deux Notes antérieures, toutes les questions de (1) sont maintenant résolues.

b. Problèmes de Banach [*voir* (2), p. 244-245]. — Un espace L^1 de dimension infinie ne peut être isomorphe à un quotient d'un espace C(K) (espace des fonctions continues sur un compact K), on en conclut que les propriétés 8 et 9 de Banach sont fausses pour les espaces (M), (*m*), (C) et (C^p). Il existe un sous-espace F de c_0 dont le bidual n'est pas isomorphe à (*m*) (espace des suites bornées), *a fortiori* F n'est pas isomorphe à c_0, donc la propriété 15 de Banach est fausse pour c_0. D'ailleurs, ni F ni son orthogonal dans l^1 n'ont de supplémentaire.

2. Applications faiblement compactes d'espaces C(K). — K est un compact, C(K) l'espace des fonctions continues sur K, E un espace localement convexe complet.

Théorème 1. — *Si u est une application linéaire continue de* C(K) *dans* E, *les conditions suivantes sont équivalentes :*

a. u est faiblement compacte; b. u transforme les suites faiblement convergentes en suites fortement convergentes; c. u transforme les suites de Cauchy faibles en suites faiblement convergentes.

Alors u transforme les parties faiblement compactes en parties compactes, les suites de Cauchy faibles en suites fortement convergentes.

Cet énoncé s'étend immédiatement à d'autres espaces importants, tels les facteurs directs d'espaces C(K) (par exemple les espaces $\mathcal{E}^{(m)}$ de L. Schwartz,

(1) J. Dieudonné et L. Schwartz, *Annales de Grenoble*, 1, 1949, p. 61-101.

(2) Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warsaw, 1932.

construits sur des pavés compacts de R^n), et en partie aux quotients d'espaces $C(K)$. Un énoncé plus fort encore est vrai pour les sous-espaces et espaces quotients de c_0.

Corollaire. — *Une application linéaire continue de* $C(K)$ *dans un espace* L^1 *est faiblement compacte.*

En notant que le dual d'un espace $C(K)$ est un espace L^1, on en déduit aussitôt des indications très spéciales sur les formes bilinéaires continues sur des produits d'espaces du type $C(K)$. Voici une application importante : si E et F sont des espaces de Banach (par exemple), une forme bilinéaire u sur $E \times F$ est dite « intégrale » s'il existe une mesure μ sur le produit $A' \times B'$ des boules faibles de E' et F', telle que, si $x \in E$, $y \in F$, on ait

$$u(x, y) = \int \langle x, x' \rangle \langle y, y' \rangle \, d\mu(x', y')$$

(ces formes bilinéaires ont, en fait, une signification fonctionnelle très simple); une application linéaire u de E dans l'espace de Banach G est dite intégrale, si la forme bilinéaire $\langle u(x), y' \rangle$ sur $E \times G'$ est intégrale. Cela étant :

Théorème 2. — *Une application intégrale est faiblement compacte, et transforme faiblement compacts en compacts. Donc une application composée de deux applications intégrales est compacte.*

3. Théorie de l'intégration. — K désigne un espace localement compact muni d'une mesure μ, E un espace de Banach, $f(t)$ une application faiblement mesurable de K dans E.

Théorème 3. — *Si f a localement une image relativement faiblement compacte, plus généralement, si pour tout compact* $K_0 \subset K$ *et tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un compact* $K_1 \subset K_0$ *tel que* $\mu\left(K_0 \cap \complement K_1\right) < \varepsilon$, *et que* $f(K_1)$ *soit relativement faiblement compact, alors f est faiblement localement presque partout égale à une fonction fortement mesurable. Même conclusion si* E *est réflexif.*

Corollaire. — *Si* K *est une partie faiblement compacte du Banach* E, *et* μ *une mesure sur* K, *alors le support de* μ *est séparable.*

Par ailleurs, je construis une application faiblement sommable du segment $(0, 1)$ dans l'espace (m) des suites bornées, qui n'est pas faiblement presque partout égale à une application fortement mesurable, et telle que pour tout $h \in L^\infty$, l'intégrale faible $\int_0^1 f(t) h(t) \, dt$ soit élément de c_0.

Théorème 4. — *Si* E *est un espace* L^1, *et si* $f(t)h(t)$ *est faiblement sommable dans* L^1 *pour toute fonction h continue et à support compact, alors* $f(t)$ *est faiblement localement presque partout égale à une fonction fortement mesurable. De plus, si la puissance de* K *ou de* L^1 *est strictement inférieure au plus petit aleph inaccessible, il suffit que* $f(t)$ *soit faiblement sommable, pour être faiblement sommable dans* L^1.

4. Une théorie duale de la théorie de Nachbin ([3]). — Théorème 5. — *Pour que l'espace de Banach* λ *soit tel que pour toute application linéaire continue* u *de* λ *dans un quotient* E/F *d'un espace de Banach* E *par un sous-espace réflexif* F, *existe une application linéaire* v *de* λ *dans* E *de norme au plus égale à* u *et telle que* $ux = vx$ *mod.* F *pour tout* $x \in \lambda$, *il faut et il suffit que* λ *soit isomorphe avec sa norme à un espace* L^1. *Si l'on n'astreint pas* F *à être réflexif, cette condition devient :* λ *est isomorphe avec sa norme à un espace* l^1 (I) *des familles sommables de nombres sur un ensemble d'indices* I (*dénombrable ou non*).

La démonstration s'appuie sur les résultats de ([3]), que je complète en retour, en montrant que dans le théorème fondamental 4, l'hypothèse de l'existence d'un point extrémal est superflue.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur les valeurs exceptionnelles de Julia et un problème qu'elles soulèvent.* Note de M. **Daniel Dugué**, présentée par M. Gaston Julia.

I. Tout d'abord je désire apporter certains compléments au théorème donné dans ma Note du 29 janvier 1951 (*Sur les valeurs exceptionnelles de fonctions ayant plusieurs singularités essentielles*). Les mêmes méthodes que celles auxquelles je faisais allusion permettent de démontrer :

Théorème I.1. — *Si une fonction est méromorphe à l'intérieur d'un cercle* $|Z| < R$ *qu'elle admet comme coupure avec un ensemble exceptionnel* E *de plus d'une valeur, sauf à l'origine singularité essentielle au voisinage de laquelle deux valeurs sont exceptionnelles, l'une de ces deux valeurs au moins appartient à* E et

Théorème I.2. — *Si une fonction méromorphe, sauf en une ligne singulière* (*éventuellement fermée*) L *qui peut être décomposée en deux parties* L_1 *et* L_2 ($L_1 + L_2 = L$) *a un ensemble exceptionnel* E_1 *au voisinage de* L_1 *et* E_2 *au voisinage de* L_2, E_1 *et* E_2 *comprenant chacun plus d'un point,* E_1 *et* E_2 *ont au moins un point commun.*

Ces deux résultats tiennent au fait que l'on peut séparer les singularités : c'est-à-dire que $f(z)$ ayant un ensemble S de singularités peut être décomposé en un produit de deux fonctions $f_1(z)$ et $f_2(z)$ ayant respectivement S_1 et S_2 pour ensemble de singularités et étant régulières partout ailleurs avec $S_1 + S_2 = S$. Dans le cas du théorème I.1 ce fait est une conséquence immédiate des résultats classiques de Mittag Leffler et de Weierstrass; dans le cas du théorème I.2 la démonstration a été donnée par H. Poincaré dans son mémoire *Sur les fonctions à espace lacunaire* (*American Journal of Mathematics*, t. XIV) utilisé par M. Borel dans sa thèse.

II. Une fonction sans valeurs exceptionnelles de Picard peut parfaitement admettre des valeurs exceptionnelles de Julia, c'est-à-dire des valeurs prises

---

([3]) L. Nachbin, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 68, 1950, p. 28-46.