l'équation $f + Rf = 0$ ($f \in \mathcal{H}$) a pour seule solution $f = 0$, le problème de Dirichlet a une solution unique pour g et h arbitraires. Il est facile d'étendre la théorie au cas (5) où l'on ajoute à r un opérateur différentiel ip', où p' satisfait aux mêmes conditions que p sauf à celle d'être positif. Il faut seulement remplacer R par $R + iA$ où A est une transformation linéaire bornée et hermitienne définie par $p'(f, f) = p_1(Af, f)$, (f, $Af \in \mathcal{H}$).

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une notion de produit tensoriel topologique d'espaces vectoriels topologiques, et une classe remarquable d'espaces vectoriels liée à cette notion.* Note (*) de M. **Alexandre Grothendieck**, présentée par M. Arnaud Denjoy.

La théorie dont nous énumérons ci-après quelques résultats, a été inspirée par la théorie des noyaux-distributions de L. Schwartz, et permet de donner, même pour les espaces tels que $(\mathfrak{E})$ et $(\mathfrak{S})$ considérés par cet auteur, des propriétés topologiques nouvelles.

Notations. — $\mathbf{C}$ est le corps complexe ; tous les espaces vectoriels topologiques envisagés sont localement convexes et séparés; si E est un espace vectoriel topologique, E' désigne son dual, E_f et E'_f (resp. E_τ et E'_τ) désignent E et E' munis de leur topologie faible [resp. de la topologie $\tau(E, E')$ et $\tau(E', E)$, *voir* (1)]. Si F est un autre espace vectoriel topologique, $\mathfrak{L}(E, F)$ désigne l'espace des applications linéaires continues de E dans F, $\mathfrak{B}(E, F)$ l'espace des formes bilinéaires sur $E \times F$ continues par rapport à chaque variable, $B(E, F)$ le sous-espace formé des formes bilinéaires continues.

1. *Définitions générales.* — Soient E, F deux espaces vectoriels topologiques, leur produit tensoriel algébrique usuel $E \otimes F$ est en dualité naturelle avec $\mathfrak{B}(E, F)$, ou avec $B(E, F)$ (cette dernière dualité est déjà séparée). Il existe sur $E \otimes F$ une topologie localement convexe et une seule telle que, quel que soit l'espace localement convexe G, dans l'isomorphisme vectoriel classique entre l'espace de *toutes* les applications bilinéaires de $E \times F$ dans G et l'espace de *toutes* les applications linéaires de $E \otimes F$ dans G, aux applications bilinéaires continues correspondent exactement les applications linéaires continues. Cette topologie est aussi la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de $B(E, F)$. Muni de cette topologie, $E \otimes F$ est appelé *produit tensoriel topologique* de E et F, et son complété, noté $\widehat{E \otimes F}$, est appelé produit tensoriel topologique complété de E et F. Son dual est donc $B(E, F)$.

---

(5) Pour les équations à coefficients constants, ce cas a été traité par une autre méthode par M. J. Leray (*Sém. Bourbaki*, Mai 1951).

(*) Séance du 3 décembre 1951.

(1) J. Dieudonné et L. Schwartz, *Annales de Grenoble*, 1, 1949.

Une notion analogue est obtenue en prenant sur $E \otimes F$ la topologie, plus fine, de la convergence uniforme sur les parties de $\mathfrak{B}(E, F)$ qui sont « équicontinues par rapport à chaque variable »; on obtient ainsi le *produit tensoriel topologique strict*, son complété sera noté $\overline{E \otimes F}$. Son dual est donc $\mathfrak{B}(E, F)$. Les deux notions précédentes coïncident si E et F sont tous les deux des espaces $(\mathcal{F})$, [alors $E \widehat{\otimes} F$ est aussi un espace $(\mathcal{F})$] ou tous les deux des duals forts d'espaces $(\mathcal{F})$ distingués; mais non par exemple quand E est un espace $(\mathcal{F})$ non normable, et F son dual fort.

On a en tous cas une application linéaire continue naturelle $\overline{E \otimes F} \rightarrow E \widehat{\otimes} F$. Si E et F sont complets, on a une application linéaire continue naturelle de $E \widehat{\otimes} F$, et par suite de $\overline{E \otimes F}$ dans $\mathfrak{L}(F'_\tau, E)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de F'. Les opérateurs qui sont images d'éléments de $\overline{E \otimes F}$ sont appelés *opérateurs à trace* [car si $F = E'_\tau$, alors sur $\overline{E \otimes E'_\tau}$, dont le dual $\mathfrak{B}(E, E'_\tau)$ s'identifie aussi à $\mathfrak{L}(E_f, E_f)$, on peut considérer la forme linéaire « *trace* », définie par l'opérateur identique $1 \in \mathfrak{L}(E_f, E_f)$]. Les opérateurs à trace dans E constituent exactement le champ naturel de validité de la théorie de Fredholm, dont je donnerai ailleurs un exposé détaillé. Je me bornerai à signaler ici qu'on peut dans des cas très généraux (en particulier si E est un espace de Banach) définir le déterminant de Fredholm d'un opérateur à trace u, c'est une fonction entière dont les zéros sont les valeurs propres de u. *Elle est de genre* 1 *au plus, et de genre zéro si* E *est un Hilbert ou si u est produit de deux opérateurs à trace.*

2. *Cas des espaces* $(\mathcal{F})$. — *Si* E *et* F *sont des espaces* $(\mathcal{F})$, *alors tout* $u \in E \widehat{\otimes} F$ *est de la forme* $u = \sum_i \lambda_i x_i \otimes y_i$, *où* (x_i) *et* (y_i) *sont des suites dans* E *resp.* F *tendant vers zéro, et où* $\sum_i |\lambda_i| \leq 1$, *et réciproquement. Les* x_i, y_i *peuvent être pris resp. dans deux compacts fixes, si l'on suppose que u varie dans une partie compacte de* $E \widehat{\otimes} F$. *Les formes linéaires sur* $B(E, F)$ *définies par les* $u \in E \widehat{\otimes} F$ *sont exactement celles qui sont continues pour la topologie de la convergence uniforme sur le produit de deux compacts; si* G *est un espace de Banach, les formes linéaires continues sur* $\mathfrak{L}(E, G)$ *muni de la topologie de la convergence compacte, s'identifie à* $E \widehat{\otimes} G'$.

3. *Espaces nucléaires.* — En général, E et F étant des espaces complets, l'application linéaire naturelle de $E \widehat{\otimes} F$ dans $\mathfrak{L}(F'_\tau, E)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de F', n'est *ni sur*, *ni un isomorphisme vectoriel topologique dans*. On dit que l'espace complet E est *nucléaire*, si quel que soit l'espace complet F, l'application linéaire ci-dessus

est un isomorphisme (topologique) sur. Comme exemples, indiquons les espaces ($\mathfrak{E}$) et ($\mathfrak{S}$) de L. Schwartz [*voir* (2)] et les espaces de fonctions holomorphes sur un ouvert du plan complexe. *Pour que l'espace complet* E *soit nucléaire, il faut et il suffit que pour toute partie équicontinue convexe cerclée* A' *de* E', *existe une suite* (x'_i) *dans* E' *tendant fortement vers zéro, une suite* (ρ_i) *de formes linéaires sur l'espace vectoriel* $\mathbf{C}$. A', *uniformément bornées sur* A' *et une suite sommable de nombres positifs* $\lambda_i > 0$, *telles que pour* $x' \in A'$ *on ait*

$$x' = \sum_i \lambda_i \rho_i(x') x'_i.$$

Cela implique qu'il existe une partie équicontinue convexe cerclée fermée $B' \supset A'$ *telle que* A' *soit partie relativement compacte de* $\mathbf{C}$.B' *pour la topologie définie par la « boule »* B'; ou, ce qui revient au même, que pour tout voisinage convexe cerclé U de zéro dans E, existe un voisinage V de zéro, précompact pour la topologie définie par le seul voisinage U. *A fortiori*, les parties bornées de E sont relativement compactes, en particulier E est réflexif. *Si* E *est un espace* ($\mathcal{F}$) *nucléaire,* E' *fort est nucléaire. Si* F *est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace nucléaire* E, *alors* F *et* E/F *sont nucléaires.*

On en conclut que si A' est une partie convexe cerclée de E'/F^0, et φ l'application canonique de E' sur E'/F^0, alors il existe une application linéaire ψ de $\mathbf{C}$.A' dans E' telle que $\psi(A)$ soit bornée, et $\varphi \circ \psi =$ identité. Si E est un espace ($\mathcal{F}$) nucléaire, l'énoncé analogue vaut aussi dans E/F lui-même. Le produit vectoriel topologique d'une famille d'espaces nucléaires est nucléaire. Enfin, signalons que tout opérateur compact dans un espace ($\mathcal{F}$) nucléaire est opérateur à trace. On peut montrer que son déterminant de Fredholm a des propriétés très spéciales, impliquant entre autres qu'il est de genre zéro.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les matrices peu différentes d'une matrice triangulaire.* Note (*) de M. **Alexandre Ostrowski**, présentée par M. Henri Villat.

Bornes pour les déterminants et les racines fondamentales portant sur les bornes des modules des éléments situés au-dessous et au-dessus de la diagonale principale.

1. I. *Soit* $A = (a_{\mu\nu})$ $(\mu, \nu = 1, \ldots, n)$ *une matrice telle que l'on ait*

$$(1) \qquad |a_{\mu\nu}| \leqq m \quad (\mu > \nu), \qquad |a_{\mu\nu}| \leqq M \quad (\mu < \nu).$$

(2) L. Schwartz, *Act. Sc. et Ind.*, n° 1122, Hermann, Paris.

(*) Séance du 26 novembre 1951.