manuscripta math., 5, 323 - 339 (1971)

PLATITUDE D'UNE ADHERENCE SCHEMATIQUE ET LEMME DE HIRONAKA GENERALISE

Alexander Grothendieck et Hamet Seydi

The main aim of this article is to prove the following:
<u>Theorem</u> (<u>Generalized Hironaka's lemma</u>). Let $X \to Y$ be a morphism of schemes, locally of finite presentation, x a point of X and $y = f(x)$. Assume that the following conditions are satisfied:

(i) $\underline{O}_{Y,y}$ is reduced.

(ii) f is universally open at the generic points of the components of X_y which contain x.

(iii) For every maximal generisation y' of y in Y and every maximal generisation x' of x in X which belongs to $X_{y'}$, we have $\dim_{x'}(X_{y'}) = \dim_x(X_y) = d$.

(iv) X_y is reduced at the generic points of the components of X_y which contain x and $(X_y)_{red}$ is geometrically normal over $K(y)$ in x.

Then there exist an open neighbourhood U of x in X and a subscheme U_0 of U which have the same underlying space as U such that $f_0 : U_0 \to Y$ is normal (i.e. f_0 is a flat morphism whose geometric fibers are normal).

INTRODUCTION

Le but de cet article est de démontrer un théorème du type du lemme de Hironaka (EGA IV 5.12.8). Dans le cas noéthérien il peut s'énoncer grosso modo comme suit: <u>Soient</u> $f : X \to Y$ <u>un morphisme de type fini de schémas noéthériens réduits</u>, x <u>un point de</u> X <u>et</u> $y = f(x)$. <u>Supposons que</u>:

(i) <u>toutes les fibres de</u> f <u>sont équidimensionelles de la dimension donnée</u> d <u>au voisinage de</u> x.

(ii) <u>f est universellement ouvert aux points génériques des composantes irréductibles de X_y qui contiennent</u> x (EGA IV § 14 et 15).

(iii) <u>X_y est réduit aux points génériques de ses composantes irréductibles qui contiennent</u> x <u>et</u> $(X_y)_{réd}$ <u>est géométriquement normal sur</u> K(y) <u>en</u> x.

<u>Alors</u> f <u>est normal en</u> x (<u>i.e. plat et à fibre géométriquement normales en</u> x).

Si le morphisme f est projectif, et les hypothèses vérifiées en tout point $x \in X$, le théorème précédent est dû à Mumford. Nous allons esquisser la démonstration de Mumford dans ce cas. Nous allons en déduire que f est normal. Supposons pour simplifier que Y est normal et intègre de point générique η. Posons $K = k(\eta)$ et supposons que X soit un sous-schéma fermé de $\mathbf{P}^n_Y$. Puisque X_η est un sous-schéma fermé de $\mathbf{P}^n_K$ plat sur Spec(K) il définit un unique il définit un unique morphisme $g : \mathrm{Spec}(K) \to H = \mathrm{Hilb}_{\mathbf{P}^n_{\mathbf{Z}/\mathbf{Z}}}$, donc une application rationelle $g: Y \to H$.

Montrons que g est un morphisme. Soient y un point Y,$K = K(y)$ et $Y_1 \to Y$ où Y_1 est un trait dont le point fermé y_1 se projette sur y et le point générique η_1 se projette sur η. Soit U_1 l'ouvert des points de $X_1 = X \times_Y Y_1$ où X_1 est plat sur Y_1; alors d'après la condition (ii) et (EGA IV 15.2.3) l'adhérence schématique $\overline{X}_1$ de U_1 dans X_1 a même espace sous-jacent que X_1. Puisque $\overline{X}_1$ est plat sur Y_1 il définit un unique morphisme $g_1 : Y_1 \to H$. Il est clair que g_1 prolonge l'application rationnelle $Y_1 \longrightarrow Y \xrightarrow{g} H$. D'autre part $((X_1)_{y_1})_{réd}$ est géométriquement normal sur $K_1 = K(y_1)$ d'après la condition iii), donc le lemme de Hironaka s'applique et l'on conclut que $(X_1)_{y_1}$ est géométriquement normal sur K_1.

D'autre part on a un unique morphisme $\mathrm{Spec}(K) \to H$ tel que $Z \times_H K = (X_y)_{réd}$ où Z est le sous-schéma fermé universel de $\mathbf{P}^n_H$. Donc $\mathrm{Spec}(K_1) \to H$ se factorise à travers $(\mathrm{Spec}(K) \to H)$ puisque $(\overline{X}_1)_{y_1}$ est géométriquement normal sur K_1. Donc l'image du point fermé de Y_1 dans H par g_1 ne dépend pas de Y_1. Et puisque Y est normal, $\underline{O}_{Y,y}$ est intersection d'anneaux de valuation de K, on en déduit aisément que g est définie en y, donc g est un morphisme. D'autre part puisque $(\overline{X}_1)_{y_1}$ est géométriquement normal sur K_1, on en conclut que g prend ses valeurs dans l'ensemble des points où Z est "normal" sur H. En outre $(\bar{X}_1)_{y_1}$ étant l'image réciproque de $Z_{g_1(y)}$, on voit que $Z = Z \times_H Y$ a même espace sous-jacent que X, donc $X = Z'$ puisque X et Z' sont réduits, donc X est "normal" sur Y. Cela termine la démonstration.

Dans le cas général la démonstration s'appuie sur un critère valuatif de platitude d'une adhérence schématique donnée plus bas (théorème I2), qui nous permet de ramener la démonstration du résultat principal au cas où Y est un trait, c'est-à-dire à la situation du lemme de Hironaka classique.

Nous tenons ici à remercier Michel Raynaud pour diverses améliorations de la version primitive de ce travail, notamment dans l'élimination d'une hypothèse restrictive dans le théorème I.2.

I. PLATITUDE D'UNE ADHERENCE SCHEMATIQUE

I1: Soient $f : X \to Y$ un morphisme de schémas, U un ouvert rétrocompact de X (i.e. l'injection canonique $i : U \to X$ est quasi-compacte), F un faisceau quasi-cohérent sur X et G_U un quotient quasi-cohérent de F/U plat sur Y.

Problème: Trouver un quotient quasi-cohérent G de F qui prolonge G_U, qui soit plat sur Y, et tel que $u : G \to i_*(G_U)$ soit universellement séparant relativement à Y (cf. EGA IV 11.9.14).

Si le problème admet une solution G, elle est nécessairement unique et donnée par $G = \mathrm{Im}(F \to i_*(G_U))$ puisque l'application canonique $F \to i_*(G_U)$ se factorise alors en $F \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{u} i_*(G_U)$ où φ est surjectif et u est injectif. Il est clair que le faisceau G défini par cette formule est un quotient de F qui prolonge G_U. En outre, puisque $i : U \to X$ est quasi-compact, $i_*(G_U)$ est quasi-cohérent (EGA 0_I 9.6.I); donc $G = \mathrm{Im}(F \to i_*(G_U))$ est quasi-cohérent. De plus $u : G \to i_*(G_U)$ est séparant i.e. injectif. La question est donc de savoir si le faisceau $G = \mathrm{Im}(F \to i_*(G_U))$ est plat sur Y, et si $u : G \to i_*(G_U)$ est universellement séparant relativement à Y. On conclut en particulier, de l'unicité de la solution, que pour tout changement de base $g : Y' \to Y$, en posant $X' = X \times_Y Y', U' = U \times_Y Y', F' = F \otimes_{\underline{O}_X} \underline{O}_{X'}$ et $G'_{U'} = G_U \otimes_{\underline{O}_U} \underline{O}_{U'}$, si le problème

(X,U,F,G_U,Y) admet une solution, il en est de même du problème $(X',U',F',G'_{U'},Y')$; et la solution G' du problème $(X',U',F',G'_{U'},Y')$ est l'image réciproque dans X' de la solution G du problème (X,U,F,G_U,Y). Ce qui implique en particulier que le problème est de nature locale sur Y. Il est également clair qu'il est de nature locale sur X. Nous allons maintenant prouver que si $u : G \to i_*(G_U)$ est universellement séparant relativement à Y, G est nécessairement plat sur Y.

PROPOSITION (I 1.0). *Les notations et les hypothèses étant celles de (I 1), alors le problème (I 1) admet une solution si et seulement si* $u : G \to i_*(G_U)$ *est universellement séparant relativement à* Y.

Preuve: On peut supposer que X et Y sont affines: $X = \mathrm{Spec}(B)$ et $Y = \mathrm{Spec}(A)$. Dans ce cas U étant un ouvert rétrocompact de X, U est quasi-compact. On peut donc recouvrir U par un nombre fini d'ouverts affines $X_i (1 \leq i \leq n)$. Soit H le faisceau sur X associé au B-module $\prod_{1 \leq i \leq n} \Gamma(X_i, G_U)$. Alors H est plat sur Y puisque G_U est plat sur Y et les X_i et Y sont affines. Supposons que $u : G \to i_*(G_U)$ soit universellement séparant relativement à Y. Alors le morphisme canonique $G \to H$ est universellement séparant relativement à Y. En appliquant la suite exacte des Tor à la suite exacte $0 \to G \to H \to H/G \to 0$ on voit que H/G est plat sur Y; d'où l'on conclut que G est plat sur Y.

COROLLAIRE (I 1.1). *Les notations et les hypothèses étant celles de (I 1), supposons vérifiée l'une des conditions suivantes:*

i) *X est localement noéthérien et* $G = \mathrm{Im}(F \to i_*(G_U))$ *est cohérent.*

ii) $f : X \to Y$ *est localement de présentation finie et* $G = \mathrm{Im}(F \to i_*(G_U))$ *est de présentation finie.*

Alors le problème (I 1) admet une solution si et seulement si quel que soit $y \in Y$, U_y *contient* $\mathrm{Ass}(G_y)$.

Preuve. Elle résulte de (EGA IV 5.10.2), (EGA IV 11.9.I6 et 11.9.I7) et (I 1.0).

LEMME (I 1.2). *Les notations et les hypothèses étant celles de (I 1) soit* $g : X' \to X$ *un morphisme fidèlement plat et quasi-compact. Posons* $U' = g^{-1}(U)$, $F' = g^*(F)$, $G'_{U'} = g^*(G_U)$.

Alors pour que le problème $(X',U',F',G'_{U'},Y)$ *admette une solution (resp. une solution de présentation finie) il faut et il suffit que le problème* (X,U,F,G_U,Y) *admette une solution (resp. une solution de présentation finie).*

Preuve. On remarque d'abord que U' est rétrocompact dans X'. Soit $Y_1 \to Y$ un morphisme de schémas.
Posons $X_1 = X \times_Y Y_1$, $X'_1 = X' \times_Y Y_1$ et $g_1 = g \times Y_1 : X'_1 \to X_1$. Alors g_1 est fidèlement plat et quasi-compact. Donc en posant
$F_1 = F \otimes_Y Y_1$, $F'_1 = F' \otimes_Y Y_1$, $U_1 = U \times_Y Y_1$, $U'_1 = U' \times_Y Y_1$, $G_{U_1} = G_U \otimes_Y U_1$,
$G'_{U'_1} = G'_U \otimes_Y U'_1$, $i_1 = U_1 \to X'_1$, $i'_1 = U'_1 \to X'_1$, $G_1 = \mathrm{Im}(F_1 \to i_{1*}(G_{1U_1}))$,
$G'_1 = \mathrm{Im}(F'_1 \to i'_{1*}(G'_{1U'_1}))$, on conclut que $G' = g_{1*}(G_1)$. Donc pour que
$u'_1 = G'_1 \to i'_*(G'_{1U'_1})$ soit séparant, il faut et il suffit que
$u_1 : G_1 \to i_{1*}(G_{1U_1})$ le soit (cf. EGA IV II.9.10 (i) et (ii) a)). On en conclut donc d'après la proposition (I 1.0) que le problème $(X',U',F',G'_{U'},Y)$ admet une solution si et seulement si le problème (X,U,F,G_U,Y) en admet une. En outre pour que G' soit de présentation finie il faut et il suffit que G le soit.

LEMME (I 1.3). *Les notations et les hypothèses étant celles de* (I 1) *supposons* Y *artinien* = Spec(A) *et qu'il existe un épimorphisme de schémas* $Y' \to Y$ (i.e. $A \to \Gamma(Y',\underline{O}_{Y'})$ *est injectif*) *tel qu'après ce changement de base le problème ait une solution. Alors le problème* (X,U,F,G_U,Y) *admet une solution.*

Preuve. On peut supposer X affine, $X = \mathrm{Spec}(B)$. D'après (II) si le problème admet une solution G, elle est donnée par $G = \mathrm{Im}(F \to i_*(G_U))$.
D'autre part, puisque $\mathrm{Ker}(A \to \Gamma(Y',\underline{O}_{Y'})) = \bigcap_{y \in Y} (\mathrm{Ker}(A \to \underline{O}_{Y',y})) = 0$, donc il existe un nombre fini de points $y_i \in Y'(1 \leq i \leq m)$ tels que
$\bigcap_{1 \leq i \leq m} (\mathrm{Ker}(A \to \underline{O}_{Y',y_i}) = 0$, A étant artinien. Donc quitte à remplacer
Y' par $\coprod_{1 \leq i \leq m} \mathrm{Spec}(O_{Y',y_i})$, on peut supposer Y' affine = Spec(A').
Puisque X est affine et que U est rétrocompact dans X, U est quasi-compact. On peut donc le recouvrir par un nombre fini d'ouverts affines $X_i (1 \leq i \leq n)$. Soit H le faisceau sur X associé au B-module

$\prod_{1\leq i\leq n} \Gamma(X_i,G_U)$. Alors H est plat sur Y puisque G_U est plat sur Y et les X_i et Y sont affines. Soient $G=\mathrm{Im}(F\to i(G_U))$, $G'=G\otimes_Y Y'$, $H'=H\otimes_Y Y'$ et soit G'_0 la solution du problème après le changement de base $Y'\to Y$. Alors il est clair que $G'_0=\mathrm{Im}(G'\to H')$, et $G'_0\to H'$ est universellement séparant relativement à Y', puisque G'_0 est la solution du problème après le changement de base $Y'\to Y$. La suite exacte des Tor montre que H'/G'_0 est plat sur Y'. Or $H'/G'=(H/G)\otimes_Y Y'$, donc H/G est plat sur Y puisque Y est artinien et $A\to A'$ est injectif (EGA IV 11.4.3). Alors la suite exacte $0\to G\to H\to H/G\to 0$ montre que $G\to H$ est universellement séparant relativement à Y, donc il en est de même de $G\to i_*(G_U)$, d'où la conclusion d'après (I 1.0).

<u>COROLLAIRE</u> (I 1.3.1). <u>Les notations et les hypothèses étant celles de</u> (I 1) <u>supposons</u> Y <u>artinien</u> = Spec(A) <u>et qu'il existe une famille de morphismes</u> $(Y_\alpha\to Y)_{\alpha\in I}$ <u>tel qu'après chacun des changements de base</u> $Y_\alpha\to Y$ <u>le problème ait une solution et que l'intersection des noyaux des homomorphismes canoniques</u> $A\to\Gamma(Y_\alpha,\underline{O}_{Y_\alpha})$ <u>soit réduite à</u> 0. <u>Alors le problème</u> (X,U,F,G_U,Y) <u>admet une solution.</u>

<u>Preuve</u>. En posant $Y'=\coprod_{\alpha\in I} Y_\alpha$, alors $Y'\to Y$ est un épimorphisme et le problème admet une solution après le changement de base $Y'\to Y$, d'où la conclusion d'après (I 1.3).

<u>REMARQUE</u> (I 1.3.2). <u>D'après un résultat récent de D. Ferrand sur la descente de la platitude par un morphisme fini, le lemme</u> (I 1.3) <u>est vrai si l'on suppose que</u> Y <u>est localement noethérien et que</u> $Y'\to Y$ <u>est un épimorphisme fini</u>.

<u>THEOREME</u> (I 2). <u>Les notations et les hypothèses étant celles de</u> (I 1), <u>supposons que</u> $f:X\to Y$ <u>soit localement de type fini</u>, Y <u>localement noethérien et</u> $G=\mathrm{Im}(F\to i_*(G_U))$ <u>cohérent. Alors le problème</u> (I 1) <u>admet une solution si et seulement s'il en admet une après tout changement de base</u> $Y'\to Y$, <u>où</u> Y' <u>est un trait (i.e. le spectre d'un anneau de valuation discrète) ou un schéma local artinien.</u>

<u>Si de plus pour tout</u> $y\in f(Z)$ <u>avec</u> $Z=X-U$, <u>le complété</u> $\hat{\underline{O}}_{Y,y}$ <u>de l'anneau local</u> $\underline{O}_{Y,y}$ <u>est réduit, le problème</u> (I 1) <u>admet une solution si et</u>

<u>seulement s'il en admet une après tout changement de base</u> $Y' \to Y$, <u>où</u> Y' <u>est un trait</u>.

Nous prouverons d'abord le lemme suivant:

<u>LEMME</u> (I 2.1). <u>Les notations et les hypothèses étant celles de</u> (I 1), <u>supposons que</u> X <u>et</u> Y <u>soient localement noéthériens et</u> $G = \mathrm{Im}(F \to i(G_U))$ <u>cohérent. Soient</u> $Z = Z - U$ <u>et</u> y <u>un point de</u> Y. <u>Supposons de plus que</u>:

(i) <u>Quel que soit</u> $x \in \mathrm{ass}(G_U) = \mathrm{ass}(G)$ (cf. EGA IV 5.10.2) <u>si</u> T <u>désigne le sous-schéma réduit de</u> X <u>ayant pour espace sous jacent l'adhérence</u> $\overline{\{x\}}$ <u>de</u> $\{x\}$, <u>alors</u> $T_y \cap U$ <u>est dense dans</u> T_y, <u>et la même condition est vérifiée sur tout</u> X' <u>étale sur</u> X.

(ii) <u>Il existe une famille de morphismes locaux</u> $Y_\alpha \to Y' = \mathrm{Spec}(\underline{O}_{Y,y})$, <u>les anneaux locaux</u> $A = \Gamma(Y_\alpha, \underline{O}_{Y\alpha})$ <u>étant séparés, tels qu'après chacun des changements de base</u> $Y_\alpha \to Y$, <u>le problème</u> (I 1) <u>ait une solution, et que l'intersection des noyaux des homomorphismes canoniques</u> $u_\alpha : \hat{\underline{O}}_{Y,y} \to A_\alpha$ <u>soit réduit à</u> 0.

(iii) <u>Les anneaux de</u> X <u>aux points de</u> $Z_y = X_y - U_y$ <u>sont à fibres formelles géométriquement normales</u>.

<u>Alors</u> G <u>est plat sur</u> Y <u>en tout point</u> x <u>de</u> X_y <u>et</u> U_y <u>contient</u> $\mathrm{ass}(G_y)$.

<u>Réciproquement, si</u> G <u>est plat sur</u> Y <u>en tout point</u> x <u>de</u> X_y <u>et</u> U_y <u>contient</u> $\mathrm{ass}(G_y)$, <u>et si de plus</u> f <u>est localement de type fini, alors les conditions</u> (i) <u>et</u> (ii) <u>précédentes sont satisfaites</u>.

<u>En particulier si les conditions</u> (i), (ii) <u>et</u> (iii) <u>précédentes sont satisfaites pour tout point</u> y <u>de</u> f(Z), <u>le problème</u> (I 1) <u>admet une solution</u>.

<u>Réciproquement si le problème</u> (I 1) <u>admet une solution et si</u> f <u>est localement de type fini, les conditions</u> (i) <u>et</u> (ii) <u>précédentes sont satisfaites en tout point de</u> Y.

<u>Preuve</u>. Soit M_α l'idéal maximal de A_α; comme A_α est séparé (i.e. $\bigcap_{n \in N} M_\alpha^n = 0$), l'intersection des $I_{\alpha,n} = u_\alpha^{-1}(M_\alpha^n)$, pour tous les indices α et n, est donc égale à l'intersection des noyaux des u_α, donc est réduite à 0 par l'hypothèse (ii). Puisque $I_{\alpha,n}$ contient $\mathfrak{m}_y^n \hat{\underline{O}}_{Y,y}$, on en conclut que $Y'_{\alpha,n} = \mathrm{Spec}(\hat{\underline{O}}_{Y,y}/I_{\alpha,n})$ est artinien pour tous les indices α et n. Soit H_α la solution du problème (I 1) après le changement

de base $Y\to Y$. D'après (I 1), $H_\alpha = \mathrm{Im}(F_\alpha \to i_{\alpha *}(G_{\alpha U_\alpha})$ où $F_\alpha = F\times_Y Y_\alpha$, $G_{\alpha U_\alpha} = G_U \times_y U_\alpha$, $U_\alpha = U\times_Y Y_\alpha$ et $i_\alpha : U_\alpha \to X_\alpha = X\times_Y Y_\alpha$ est l'injection canonique. Puisque $Y_{\alpha,n} = \mathrm{Spec}(A_\alpha / M_\alpha^n)$, $Y'_{\alpha,n}$ est un épimorphisme, on en conclut d'après le lemme (I 1.3) et (ii) que le problème (I 1) admet une solution après chacun des changements de base $Y'_{\alpha,n}\to Y$. Soit (J_λ) la famille des intersections finies des $I_{\alpha,n}$. Posons $Y'' = \mathrm{Spec}(\underline{O}_{Y,y}/J)$, alors puisque chaque $I_{\alpha,n}$ contient une puissance de $\hat{\mathfrak{m}}_y = \mathfrak{m}_y \hat{\underline{O}}_{Y,y}$, J_λ contient une puissance de $\hat{\mathfrak{m}}_y$, donc Y''_λ est artinien. Supposons que J_λ soit intersection des I_{α_i,n_i} $(1\leq i\leq r)$, alors le morphisme canonique $\left(\coprod_{1\leq i\leq r} Y'_{\alpha_i,n_i}\right) \to Y''_\lambda$ est un épimorphisme; donc d'après le lemme (I 1.3) et (ii) le problème (I 1) admet une solution après le changement de base $Y''_\lambda \to Y$ puisqu'il en admet une après le changement de base $\left(\coprod_{1\leq i\leq r} Y'_{\alpha_i,n_i}\right)\to Y$. Comme l'intersection des $I_{\alpha,n}$ est réduite à 0 et que $\hat{\underline{O}}_{Y,y}$ est complet, on en conclut que les J_λ forment un système fondamental de voisinages de 0 dans $\hat{\underline{O}}_{Y,y}$ (Bourbaki, Alg. comm. chap. III, §2, prop. 8, où on peut dans la démonstration remplacer la suite décroissante par un ensemble filtrant quelconque). Donc pour tout entier e, $\hat{\mathfrak{m}}_y^e = \mathfrak{m}_y^e \hat{O}_{Y,y}$ contient un des J_λ, donc le problème (I 1) admet une solution après le changement de base $Y'_e = \mathrm{Spec}(\hat{\underline{O}}_{Y,y}/\mathfrak{m}_y^e) = \mathrm{Spec}(\underline{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_y^e)\to Y$.

Nous avons donc réduit le problème au cas où l'ensemble d'indice est $\mathbb{N}$ et où $Y_\alpha = \mathrm{Spec}(O_{Y,y}/\mathfrak{m}_y^\alpha)$. Quitte à localiser X en un point x de X_y et Y au point $y=f(x)$, nous sommes ramenés, dans le cas où f est local, x étant le point fermé et $y=f(x)$, à prouver que G est plat sur Y au point x et que U_y contient $\mathrm{Ass}(G)$. Puisque G est plat sur Y en tout point de U, nous pouvons supposer que $x\in Z = X - U$. Donc nous sommes ramenés au cas où les fibres formelles de $B = \underline{O}_{X,x}$ sont géométriquement normales. Par descente fidèlement plate (EGA IV 3.3.I) et (II.2) nous pouvons remplacer X par le spectre du henselisé $\tilde{B}$ de B. Nous ne détruirons pas les hypothèses (i) et (ii) et $\tilde{B}$ est à fibres formelles géométriquement normales (EGA IV 18.7.2). Mais de plus le morphisme $X' = \mathrm{Spec}(\hat{B}) \to X = \mathrm{Spec}(B)$ est cette fois-ci à fibres géométriquement intègres (EGA IV I8.9.I), donc si les T_β sont les cycles premiers associés à G sur X, ceux associés à $G' = G\times_X X'$ sur X sont les T'_β images réciproques des T dans X' d'après (EGA IV 3.3.I) appliqué ici avec $X = X'$,

$Y=X$, $=\underline{O}_X$ et $\emptyset = G$). Donc l'hypothèse (i), à savoir $T_\beta \cap U_y \neq \emptyset$ pour tout β, est vérifiée en remplaçant (X,G,U,Y) par (X',G',U',Y), où $U' = U \times_X X'$. On peut donc supposer que X est le spectre d'un anneau local complet B. Désignons toujours par H la solution du problème (I 1) après le changement de base $Y_\alpha \to Y$. Il est clair que H_α est un quotient de $G_\alpha = G \times_Y Y_\alpha$. En passant à la limite, on trouve un quotient $\varphi : G \to H$ qui est plat sur Y (EGA III 10.2.I a)). Soit $x_1 \in U_y$, on a un isomorphisme $(G_{x_1}/\mathfrak{m}_y^\alpha G_{x_1}) \to (H_{x_1}/\mathfrak{m}_y^\alpha H_{x_1}) = (H_\alpha)_{x_1}$ pour tout α, donc on en conclut que φ_{x_1} induit un isomorphisme entre les complétés de G_{x_1} et H_{x_1} pour la topologie $\mathfrak{m}_y \underline{O}_{X,x}$-adique. Donc $\varphi_{x_1} : G_{x_1} \to H_{x_1}$ est injectif, donc bijectif puisqu'il est surjectif. Comme $T_\beta \cap U_y \neq \emptyset$ pour tout β, on en conclut que pour tout $x' \in \mathrm{Ass}(G_U) = \mathrm{Ass}(G)$ il existe une spécialisation x_1' de x tel que $\varphi_{x_1'} : G_{x_1'} \to H_{x_1'}$ soit un isomorphisme, donc $\varphi_{x'} : G_{x'} \to H_{x'}$ est un isomorphisme puisque H et G sont cohérents. On en conclut que $N = \mathrm{Ker}(G \xrightarrow{\varphi} H)$ est nul en tout point $x' \in \mathrm{Ass}(G)$, donc $N = 0$ (cf. EGA IV S.I.7(i)), i.e., $G = H$, donc G est plat sur Y au point x. En particulier $G_y = H_y = (H_\alpha)_y$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$; on en conclut donc que U_y contient $\mathrm{Ass}(G_y) = \mathrm{Ass}((H_\alpha)_y)$ puisque H_α est la solution du problème (I 1) après le changement de base $Y_\alpha \to Y$ (cf. I 1.1). Cela termine la démonstration de la première partie du lemme. Supposons réciproquement que G soit plat sur Y en tout point x de X_y, que U_y contienne $\mathrm{Ass}(G_y)$ et que f soit localement de type fini. Pour tout entier $e \geq 1$, posons $Y_e' = \mathrm{Spec}(\underline{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_y^e)$, $X_e' = X \times_Y Y_e'$, $G_e' = G \otimes_Y Y_e'$, $G'_{e_{U'}} = G_U \otimes_Y U_e'$, $U_e' = U \times_Y Y_e'$ et $i_e : U_e' \to X_e'$ l'injection canonique. Puisque G est plat sur Y en tout point de X_y, on en conclut que G_e' est plat sur Y_e'. En outre $(U_e')_y$ contient $\mathrm{Ass}((G_e')_y)$ puisque U_y contient $\mathrm{Ass}(G_y)$ par hypothèse et que $(G_e')_y = G_y$. Donc le problème (I 1) admet G_e' comme solution après le changement de base $Y_e' \to Y$ d'après (I 1.1). Cela prouve donc que la condition (ii) est satisfaite en prenant pour famille (Y') la famille (Y_e') $e \in \mathbb{N}$. Il nous reste donc à prouver que la condition (i) est satisfaite. Cela découle de la remarque suivante:

<u>REMARQUE</u> (I 2.2). <u>Les notations étant celles de</u> (I 2.1) <u>supposons de plus que</u> $f : X \to Y$ <u>soit localement de type fini</u>. <u>On suppose de plus que</u>

pour tout morphisme $Y' \to Y$, *où* Y' *est un trait dont le point fermé* Y' *se projette sur* y, *il existe un ouvert* V *de* X *contenant* U *et* X_y, *tel qu'en posant* $V' = V \times_Y Y'$, $U' = U \times_Y Y'$, $F'/V' = (F/V) \otimes_Y Y'$, $G'_{U'} = G_U \otimes_Y U'$, *le problème* $(V', U', F', G'_{U'}, Y)$ *ait une solution. Alors la condition* (i) *de* (I 2.1) *est satisfaite.*

En effet il est facile de voir que la condition (i) de (I 2.1) est équivalente à la suivante: pour toute générisation $y'(\neq y)$ de y, tout élément $x \in X_y - U_y$ et toute générisation $x' \in \mathrm{Ass}(G_U)\ X_{y'}$ de x, il existe une spécialisation x'' de x qui appartient à U_y et qui est une générisation de x, et cette condition est satisfaite sur tout X' étale sur X.

Prenons un trait Y_1 et un morphisme $h : Y_1 \to X$ tel que $h(y_1) = x$ et $h(y_1') = x'$, y_1 et y_1' étant le point fermé et le point générique de Y_1 respectivement (cf. EGA II 7.1.7). Soient $g = f \circ h : Y_1 \to Y$, $X_1 = X \times_Y Y_1$ et soient $f_1 : X_1 \to Y_1$, $g_1 : X_1 \to X$ les projections canoniques; il y a une Y_1 section $h_1 : Y_1 \to X_1$ telle que $h = g_1 \circ h_1$ (EGA 1.3.3.14). Puisque $g(y_1) = y$, il existe un ouvert V de X contenant U et X qui vérifie les conditions de l'hypothèse avec $Y' = Y_1$. On peut supposer que $V = X$. Posons $x_1 = h_1(y_1)$, $x_1' = h_1(y_1)$ et soit G_1 la solution du problème (I 1) après le changement de base $Y_1 \to Y$. Puisque $x' \in \mathrm{Ass}((G_U)_{y'})$, alors il existe une générisation z' de x' appartenant à $\mathrm{Ass}((G_{1U_1})y_1)$ (cf. EGA IV 4.2.7 (ii)). Soit $\dot{T}$ le sous-schéma réduit de X_1 ayant pour espace sous-jacent l'adhérence $\overline{\{z'\}}$ de $\{z'\}$. Puisque G_1 est plat sur Y_1 et que f_1 est localement de type fini, on en conclut que toute générisation maximale x_1'' de z' dans T_{y_1} appartient à $\mathrm{Ass}((G_{1U_1})y_1)$ (EGA IV 12.1.1.5), donc $x_1'' \in (U_1)_{y_1}$ puisque $(U_1)_{y_1}$ contient $\mathrm{Ass}((G_{1U_1})y_1)$, donc $x'' \in (U_1)_{y_1}$ puisque $(U_1)_{y_1}$ contient $\mathrm{Ass}((G)_{y_1})$, donc $x'' = g_1(x_1'')$ est une spécialisation de x' qui appartient à U_y et qui est une générisation de x. Puisque les hypothèses de (I 2.2) sont satisfaites sur tout X' étale sur X, on en conclut donc que la condition (i) de (I 2.1) est satisfaite.

Fin de la démonstration de (I 2.1): Il nous reste donc à prouver que si U_y contient $\mathrm{Ass}(G_y)$ les conditions de la remarque (I 2.2) sont satisfaites. En effet soit $Y' \to Y$ un morphisme de schémas, où Y' est un trait. Posons $X' = X \times_Y Y'$, $F' = F \otimes_Y Y'$, $G'_{U'} = G_U \otimes_Y Y'$, $U' = U \times_Y Y'$, $i' : U' \to X'$

l'injection canonique et $G' = G = G_Y Y$. Soient $G'' = \mathrm{Im}(F' \to i'_*(G'_{U'}))$, η et ξ le point fermé et le point générique de Y. Puisque U_y contient $\mathrm{Ass}(G_y)$, alors U' contient $\mathrm{Ass}(G'_\eta)$ (EGA IV 3.3) donc $\pi : G'_\eta \to i'_*(G'_{U'})_\eta$ est injective. Or π se factorise en $G'_\eta \to G''_\eta \to i_*(G'_{U'})_\eta$, donc $G'_\eta \to G''_\eta$ est injective donc bijective puisque G" est un quotient de G'. De même u_ξ contient $\mathrm{Ass}(G''_\xi)$ puisque U contient Ass(G"). Donc G" est une solution du problème (I 1) après le changement de base $Y' \to Y$ (cf. I 1.1), d'où la conclusion.

REMARQUE (I 2.3). *Moyennant les notations et les hypothèses préliminaires de* (I 2.1) *supposons de plus que le complété* $\hat{\underline{O}}_{Y,y}$ *de l'anneau local* $\underline{O}_{Y,y}$ *soit réduit, et que pour tout changement de base* $Y' \to Y_0 = \mathrm{Spec}(\hat{O}_{Y,y})$ *fini, où* Y *est un trait, le problème* (I 1) *admet la solution. Alors la condition* (ii) *de* (I 2.1) *est satisfaite d'après* (EGA IV 10.5.10).

Démonstration de (I 2). Pour prouver que le problème (I 1) admet une solution, il suffit de prouver qu'il en admet une après tout changement de base:

$$\mathrm{Spec}(\hat{\underline{O}}_{Y,y}) \to Y \quad \text{avec} \quad y \in f(Z) .$$

On se ramène donc au cas où les anneaux locaux de X sont excellents. L'assertion découle donc de (I 2.1), (I 2.2) et (I 2.3), et du fait que si le problème (I 1) admet une solution après tout changement de base $Y' \to Y$ où Y' est un schéma local artinien, la condition (ii) de (I 2.1) est satisfaite pour tout point y de Y: il suffit de prendre $Y = \mathrm{Spec}(\underline{O}_{Y,y} / \mathfrak{m}_y^\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{N}$.

COROLLAIRE (I 2.4). *Les notations et les hypothèses étant celles de* (I 2) *supposons de plus que:*

(i) $\mathrm{Supp}(G) = X$.

(ii) *Quel que soit* $y \in f(Z)$.

a) U_y *est dense dans* X_y.

b) $(G_U)_y$ *est équidimensionnel de dimension donnée* d *et vérifie* (S_1).

Alors pour que le problème (I 1) *ait une solution, il faut et il suffit que la condition* (ii) *de* (I 2.1) *soit satisfaite en tout point* y *de* f(Z).

Preuve. Soit y un point de $f(Z)$, posons $Y' = \mathrm{Spec}(\underline{O}_{Y,y})$, $X = X \times_Y Y'$ et soit y' le point fermé de Y. Alors la condition (ii) de (I 2.4) est satisfaite au point y' après le changement de base $Y' \to Y$. De même on a $\mathrm{Supp}(G'_{y'}) = X'_{y'}$ et en particulier $\mathrm{Supp}((G'_{U'})_{y'}) = U'_{y'}$. Donc $X'_{y'} \simeq X_y$ est équidimensionnel et de dimension d d'après (EGA IV 10.6.2 et (ii b)), en tenant compte de ce que $U_y \simeq U_y$ et $(G'_{U'})_{y'} \simeq (G_U)_y$. Soit $x' \in \mathrm{Ass}(G_U) \cap X'_{y'}$ et soit T le sous-schéma réduit de X' ayant pour espace l'adhérence $\overline{\{x'\}}$ de $\{x'\}$ dans X'. Alors on a $\dim(T_{y'}) = d = \dim(X'_{y'})$ puisque $y' \in \mathrm{Ass}((G'_{U'})_{y'})$ et $(G'_{U'})_{y'}$ est équidimensionnel de dimension d et vérifie (S_1). En outre quel que soit y'' tel que $T_{y''} \neq \emptyset$, toutes les composantes irréductibles de $T_{y''}$ sont de dimension supérieure ou égale à $\dim(T_{y'}) = d = \dim(X'_{y'})$ d'après le théorème de Chevalley (EGA IV 13.1.3), donc sont des composantes irréductibles de $X''_{y''}$ puisque $\dim(X'_{y''}) = d$. On en conclut que $T_{y''} \cap U'$ est dense dans $T_{y''}$ puisque $U'_{y''}$ est dense dans $X'_{y''}$. En remplaçant X' par X'' étale sur X', on voit bien que la condition (ii) de (I 2.4) sur X'' est satisfaite en y', de même la condition $\dim(X''_{y''}) = d$ pour tout $y'' \in Y'$ et $U''_{y''}$ est dense dans $X''_{y''}$. En appliquant le raisonnement précédent on voit donc que quel que soit $x'' \in \mathrm{Ass}(G''_{U''})$, si T' désigne le sous-schéma réduit de X'' ayant pour espace sous-jacent l'adhérence $\overline{\{x''\}}$ de $\{x''\}$ dans X'', $U'' \cap T'_y$ est dense dans T'_y. Donc la condition (i) de (I 4.1) est satisfaite en tout point y de $f(X)$. Puisque les anneaux locaux de X' sont excellents, on en conclut que $U'_y = U_y$ contient $\mathrm{Ass}(G'_y) = \mathrm{Ass}(G_y)$ si la condition (ii) de (I 2.1) est satisfaite, d'où la conclusion d'après (I 1.1).

COROLLAIRE (I 2.5). Les notations et les hypothèses étant celles de (I 2.4), supposons de plus que pour tout $y \in f(Z)$ le complété de l'anneau local $\underline{O}_{Y,y}$ soit réduit. Alors pour que le problème (I 1) admette une solution il faut et il suffit qu'il en admette une après tout changement de base $Y' \to Y$, où Y' est un trait.

En démontrant (I 2.4) nous avons en fait démontré:

COROLLAIRE (I 2.6). Les notations et les hypothèses étant celles de (I 2.4) soit y un point de Y. Alors pour que $G = \mathrm{Im}(F \to i_*(G_U))$ soit plat *sur Y en tout point de* X_y *et que* U_y *contienne* $\mathrm{Ass}(G_y)$, *il faut et il suffit que la condition* (ii) *de* (I 2.1) *soit satisfaite au point* y. *Si le complété* $\underline{O}_{Y,y}$ *est réduit, il faut et il suffit que le problème admette une solution après tout changement de base* $Y_1 \to Y' = \mathrm{Spec}(\underline{O}_{Y,y})$, *où* Y_1 *est un trait.*

II. APPLICATION AU LEMME DE HIRONAKA GENERALISE

Nous allons maintenant appliquer I 2.6 à la démonstration du théorème suivant:

THEOREME (II 1). *Soient* $f : X \to Y$ *un morphisme de schémas, localement de présentation finie,* x *un point de* X *et* $y = f(x)$. *On suppose vérifiées les conditions suivantes:*

(i) $\underline{O}_{Y,y}$ *est réduit.*

(ii) f *est universellement ouvert aux points génériques des composantes irréductibles de* X_y *qui contiennent* x (EGA IV §14 *et* 15).

(iii) *Pour toute générisation maximale* y' *de* y *dans* Y *et toute générisation maximale* x' *de* x *dans* X *appartenant à* $X_{y'}$, *on a* $\dim_{x'}(X_{y'}) = \dim_x(X_y) = d$.

(iv) X_y *est réduit aux points génériques de ses composantes irréductibles qui contiennent* x, *et* $(X_y)_{\text{réd}}$ *est géométriquement normal sur* K(y) *en* x.

Alors il existe un voisinage ouvert U *de* x *dans* X *et un sous-schéma* U_0 *de* U *ayant même espace sous-jacent que* U, *tel que* $U_0 \to Y$ *soit normal (i.e. plat et à fibres géométriquement normales) et localement de présentation finie. Si de plus* Y *est réduit au voisinage de* y *(c'est le cas si* Y *est localement noéthérien), on peut choisir* U *de telle sorte que* U_0 *soit égal à* $U_{\text{réd}}$, *donc tel que* $U_{\text{réd}} \to Y_{\text{réd}}$ *soit normal et localement de présentation finie.*

Preuve. Supposons d'abord que Y soit un schéma noéthérien excellent (EGA IV 7.8), par exemple le spectre d'une $\mathbf{Z}$-algèbre de type fini. Les hypothèses et la conclusion étant de nature locale sur X et Y, on peut supposer que Y est réduit et que $(X_y)_{\text{réd}}$ est géométriquement normal sur K(y). En outre en remplaçant X par $X_{\text{réd}}$, on ne détruit aucune des hypothèses faites, on peut donc supposer X réduit. De plus d'après le théorème de Chevalley (EGA IV 13.1.3) et l'hypothèse (iii), pour toute générisation x' de x, on a $\dim_{x_1'}(X_{f(x_1')}) = d$. Or l'ensemble Z des points x_1 de X tels que $\dim_{x_1'}(X_{f(x_1')}) = d$ est constructible (EGA IV 9.9.1), donc Z est un voisinage de x (EGA III 9.2.5). Donc quitte à se restreindre à un voisinage suffisamment petit de x, on peut supposer que toutes les composantes irréductibles des fibres de f sont de dimension d. Soit U l'ensemble des points x de X où f est normal (c'est-à-dire l'ensemble des points x de X où f est plat sur Y et tel que $X_{f(x)}$ soit géométriquement normal sur K(f(x)) au point x.), U est ouvert (EGA IV 11.3.1 et 12.1.6) et contient les générisations maximales de x dans X_y (cf. EGA IV 15.2.3 (ii) et (IV)). On est donc ramené à prouver que $x \in U$; quitte à se restreindre à l'ouvert complémentaire des adhérences dans X des composantes irréductibles de X_y qui ne rencontrent pas U (cet ouvert contient x puisque U contient les générisations maximales de x dans X_y), on peut supposer que $U \cap X_y$ est dense dans X_y. Donc si Z est le sous-schéma réduit de X ayant pour espace sous-jacent $X - U$, on en conclut que $\dim(Z_y) < d$. Or d'après le théorème de Chevalley cité précédemment, l'ensemble $F_d(Z)$ des points x' tels que $\dim_{x'}(Z_{f(x')}) \geq d$ est fermé dans Z, donc aussi dans X. Donc quitte à se restreindre à l'ouvert $X - F_d(Z)$, qui contient x puisque $\dim(Z_y) < d$, on peut supposer que quel que soit $x' \in X$, on a $\dim_{x'}(Z_{f(x')}) < d$, ce qui implique que $U \cap X_{y'}$ est dense dans X_y quel que soit $y' \in Y$, puisque les composantes irréductibles des fibres de f sont de dimension d. A fortiori U est dense dans X, puisque X est réduit. Donc avec comme données du problème (I 1) $F = \underline{O}_X$, $G_U = \underline{O}_U$ (alors $G = \mathrm{Im}(F \to i_*(G_U)) = \underline{O}_X$ d'après ce qu'on vient de voir), les hypothèses (i) et (ii) de (I 2.4) sont satisfaites. Or pour prouver que $x \in U$ il suffit de prouver que X_y est réduit i.e. U_y contient $\mathrm{Ass}(\underline{O}_{X_y})$ et que X est plat sur Y en tout point de X_y. Comme le complété $\underline{O}_{Y,y}$ est réduit, puisque Y est excellent et réduit (EGA IV 7.8.3 (vii)); il suffit de prouver que tout morphisme local $Y_1 \to Y' = \mathrm{Spec}(\hat{\underline{O}}_{Y,y})$, où Y_1 est un trait, le problème (I 1) admet une solution après le changement de base $Y_1 \to Y_1$ d'après (I 2.6). Or $U_1 = U \times_Y Y_1$ est dense dans $X_1 = X \times_Y Y_1$ pour les mêmes raisons que précédemment, et X_1 est normal en tout point de U_1 (EGA IV 11.3.13), donc $(X_1)_{\text{réd}}$ est l'adhérence schématique de U_1 dans X_1. On se ramène donc au cas où X_1 est réduit, donc aussi plat sur Y_1. Soient y_1 et y_1' le point générique et le point fermé de Y_1 respectivement. D'abord on a $\mathrm{Ass}(\underline{O}_{(X_1)_{y_1}}) = \mathrm{Ass}(\underline{O}_{X_1})$ d'après (EGA IV 3.3.1), donc $(U_1)_{y_1}$ contient $\mathrm{Ass}(\underline{O}_{(X_1)_{y_1}})$ puisque U contient $\mathrm{Ass}(\underline{O}_{X_1})$ (cf. EGA IV 5.10.2). Enfin $(X_1)_{y_1'}$ est réduit en ses points maximaux et $((X_1)_{y_1'})_{\text{réd}}$ est normal et équidimensionnel, donc les anneaux locaux de X_1 aux points de $(X_1)_{y_1'}$, qui sont caténaires, sont également équidimensionnels comme il est facile de voir. Alors le lemme de Hironaka (EGA IV 5.12.8) s'applique donc $(X_1)_{y_1'}$ est normal, ce qui entraîne que $(U_1)_{y_1'}$ contient $\mathrm{Ass}(\underline{O}_{(X_1)_{y_1'}})$ puisque $(U_1)_{y_1'}$ est dense dans $(X_1)_{y_1'}$. Cela termine la démonstration dans le cas où Y est excellent.

Cas général. Les hypothèses et la conclusion étant de nature locale sur X et Y, on peut supposer X et Y affines ($Y = \mathrm{Spec}(A)$). Alors il existe une sous $\mathbf{Z}$-algèbre de type fini A_0 de A et un morphisme de type fini $X_0 \to Y_0 = \mathrm{Spec}(A_0)$ tel que $X \simeq X_0 \otimes_{A_0} A$ (EGA IV 8.9.1). Soit X' le sous-schéma réduit de X_0 ayant pour espace sous-jacent l'adhérence $\overline{g(X)}$ de $g(X)$, où $g : X \to X_0$ est la projection canonique. Alors $X_0' \otimes_{A_0} A$ a même espace sous-jacent que X et est un sous-schéma fermé de X. Donc quitte à remplacer X par $X_0' \otimes_A A_0$ on peut supposer que $X_0 = X_0'$. En particulier pour toute générisation maximale x_0' de x telle que $x_0' = g(x')$. On en conclut donc que $\dim_x(X_y) = \dim_{x_0}((X_0)_{y_0})$ avec $y_0 : f_0(x)$ d'après (EGA IV 4.2.7) et (iii). Comme dans la première partie, quitte à se restreindre à un voisinage ouvert suffisamment petit de x_0, on peut supposer que les composantes irréductibles des fibres de f_0 sont de dimension d. En outre X est plat sur Y aux points génériques des composantes irréductibles de X_y qui contiennent x d'après (iii), (iv) et ((EGA IV 15.2.3), qui est vrai en remplaçant l'hypothèse Y est noéthérien par l'hypothèse $f : X \to Y$ est localement de présentation finie (cf. [2] Cor. 3.5)). Alors en remplaçant A_0 par une sous-$\mathbf{Z}$-algèbre de type fini plus grande de A, on peut supposer que X_0 est plat sur Y_0 aux points génériques des composantes irréductibles de $(X_0)_{y_0}$ qui contiennent x_0 (ce sont aussi les projections dans X_0 des points génériques des composantes irréductibles de X_y qui contiennent x) d'après (EGA IV 11.2.6.1). Donc la condition (ii) et (II 1) est vraie pour x_0 (EGA IV 2.4.6). Soient N le nilradical de A_0 et $\mathcal{N}$ le faisceau sur Y associé à NA. Alors $\mathcal{N}$ est de type fini, et puisqu'il est nul au point y, il est nul dans un voisinage V de y dans Y (cf. EGA 0_I 5.2.2). Donc quitte à se restreindre à un voisinage ouvert de y, on peut supposer que le morphisme $Y \to Y_0$ se factorise à travers $(Y_0)_{réd} \to Y_0$; et en remplaçant Y_0 par $(Y_0)_{réd}$ et X_0 par $X_0 \times_{y_0} (Y_0)_{réd}$, on peut supposer que Y_0 est réduit. Donc la condition (i) de (II 1) est vraie pour x_0. Il est clair que la condition (iv) de (II 1) est également vraie pour x_0. On en conclut donc, d'après la première partie de la démonstration, qu'il existe un voisinage ouvert U'_0 de x_0 dans X_0 tel que $(U'_0)_{réd} \to Y_0$ soit normal (et de type fini nécessairement). Prenant $U_0 = (U'_0)_{réd} \times_{Y_0} Y$ et $U = U_0 \times_Y Y_0$, on en conclut que U_0 est un sous-schéma de U ayant même espace sous-jacent que U, et que $U_0 \to Y$ est normal et localement de présentation finie. Nous avons donc prouvé l'existence de U et U_0. Si de plus Y est réduit au voisinage de x d'après (EGA IV 11.3.13), donc en prenant U suffisamment petit, on peut supposer $U_0 = U_{réd}$. En particulier $U_0 = U_0 \times_Y Y_{réd} \to Y_{réd}$ est normal et localement de présentation finie. Cela termine la démonstration de (II 1).

<u>COROLLAIRE</u> (II 2). <u>Les notations et les hypothèses étant celles de</u> (II 1), <u>supposons de plus que</u> $\underline{\mathcal{O}}_{X,x}$ <u>soit réduit</u>. <u>Alors</u> f <u>est normal au point</u> x, <u>donc aussi dans un voisinage de</u> x (cf. EGA IV 11.3.1 <u>et</u> 12.1.6).

<u>COROLLAIRE</u> (II 3). <u>Soit</u> $f : X \to Y$ <u>un morphisme localement de présentation finie</u>. <u>On suppose de plus que les conditions</u> (i), (ii), (iii) <u>et</u> (iv) <u>de</u> (II 1) <u>sont satisfaites pour tout point</u> x <u>de</u> X. <u>Alors</u> $X_{réd} \to Y$ <u>est normal et localement de présentation finie</u>.

<u>Preuve</u>. D'après la condition (ii) de (II 1), $Y_0 = f(X)$ est un voisinage de chacun de ses points, donc est ouvert. Donc puisque Y_0 est réduit,

on en conclut d'après (II 1) que $X_{\text{réd}} \to Y_0$ est normal et localement de présentation finie; a fortiori $X_{\text{réd}} \to Y$ est normal et localement de présentation finie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GROTHENDIECK, A., DIEUDONNE, J.: Eléments de Géométrie algébrique chap. IV: Etude locale des schémas ... (cité EGA IV), Paris, P.U.F. (I.H.E.S., Publ. Math., n° 24 (1965), n° 28 (1966), n° 32 (1967).

[2] -, SEYDI, H.: Morphismes universellement ouverts (à paraître).

Alexander GROTHENDIECK
Collège de France
Place Marcelin-Berthelot
F-75 Paris 5e (France)

Hamet SEYDI
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie
F-75 Paris 5e (France)

(Reçu le 3 mai, 1971)