CRITÈRES DE COMPACITÉ DANS LES ESPACES FONCTIONNELS GENERAUX.*

By A. Grothendieck.

1. Introduction.[1] Outre la notion usuelle de compacité (cf. N. Bourbaki [1]), qui est apparue come étant la seule qui soit vraiment fondamentale, on rencontre néanmoins au moins deux autres notions étroitement apparentées, mais de "caractère dénombrable," et qui se sont révélées indispensables dans plusieurs questions qui à priori n'impliquent aucune considération de dénombrabilité.

Nous dirons qu'une partie A d'un espace topologique est *relativement semi-compacte* (resp. *semi-compacte*) si toute suite extraite de A admet une valeur d'adhérence (resp. qui appartienne à A). A sera dite *strictement relativement semi-compacte* (resp. *strictement semi-compacte*) si de toute suite extraite de A on peut extraire une suite converge (resp. qui converge vers un élément de A).

Dans le présent travail, nous étudions des cas étendus où la semi-compacité relative entraine déjà la compacité relative ou la stricte semi-compacité relative. Nous nous y plaçons surtout dans des espaces du type $C_{\mathfrak{S}}(E, F)$, espace des applications continues d'un espace topologique E dans un espace uniforme séparé F, muni de la topologie de la convergence uniforme sur un ensemble $\mathfrak{S}$ de parties de E recouvrant E (pour ces notions fondamentales d'Analyse Fonctionnelle, cf. N. Bourbaki [3]). Les résultats obtenus valent manifestement pour les sous-espaces fermés de tels espaces, ce qui permet de les appliquer à des espaces vectoriels localement convexes généraux.

Dans 2, nous donnons quelques généralités sur les diverses notions de compacité envisagées, destinées surtout à prémunir le lecteur contre certaines

* Received December 27, 1950.

[1] Outre le théorème 5 et la proposition 7 du présent travail, citons notamment encore deux propositions s'appuyant de façon essentielle sur le théorème d'Eberlein (cf. proposition 2 ci-dessous) : 1) l'enveloppe convexe fermée d'une partie faiblement relativement compacte d'un espace de Banach (par exemple) est faiblement compacte; 2) Le produit de deux fonctions faiblement presque-périodiques sur un semi-groupe est faiblement presque-périodique (cf. [6]) ; plus généralement, si E est une algèbre normée complète s'identifiant à l'espace des fonctions complexes continues sur un espace compact, le produit de deux parties faiblement compactes A et B de E (ensemble des xy avec $x \varepsilon A$ et $y \varepsilon B$) est faiblement relativement compact.

erreurs assez naturelles, plutôt que de repéter les développements bien connus et triviaux sur le sujet (tels que: l'image continue d'un espace semi-compact est semi-compact, etc.). Dans 3. nous étudions des cas où la semi-compacité relative entraine la compacité relative, le resultat le plus important est le théorème 2 (et le théorème 1 qui est un corollaire) ; nous y donnons en même temps un critère de compacité relative qui semble à priori encore bien plus faible que la semi-compacité relative. En outre, M. J. Dieudonné a bien voulu me communiquer un autre cas non trivial et très simple où la semi-compacité relative entraine la compacité relative (théorème 3), critère qui ne sera pas essentiel par la suite mais a son intérêt propre dans l'ordre d'idées de ce travail. Dans 4, nous appliquons les résultats obtenus aux espaces localement convexes, en donnant notamment à un classique théorème d'Eberlein pour les espaces de Banach (généralisé par J. Dieudonné et L. Schwartz [5] aux espaces $(\mathfrak{F})$) toute la généralité qui lui appartient. (Ce théorème a été d'ailleurs le point de départ du présent travail). Dans 5. nous établissons un cas non classique ou la semi-compacité relative entraine la *stricte* semi-compacité relative (th. 4) ; ce résultat est d'ailleurs essentiel pour la suite (th. 5) ; la proposition 5 se réduit à une systématisation de réflexions classiques. Nous appliquons ensuite les resultats précédents à la détermination des parties faiblement relativement compactes de l'espace de Banach $C^\infty(E)$ de toutes les fonctions continues et bornées sur un espace topologique E; le critère obtenu donne par exemple immédiatement le résultat suivant. Une fonction faiblement presque périodique à gauche sur un semi-groupe est aussi faiblement presque périodique à droite. Enfin dans 7. nous généralisons le théorème 6 pour obtenir dans les espaces localement convexes un critère de relative compacité faible, approfondissant de beaucoup les résultats de 4, et qui ne semble pas connu même pour les espaces de Banach.

2. Généralités. Il n'est peut-être pas inutile de rappeler quelles implications on peut ou ne peut pas affirmer entre les diverses notions de compacité envisagées, et quelles simplifications se produisent dans quelques cas classiques. Il est évident que la compacité et la semi-compacité stricte entraînent chacune la semi-compacité, de même pour les notions " relatives " correspondantes. Mais on n'a dans le cas général aucune autre implication entre ces trois couples de notions, car il est bien connu qu'un espace strictement semi-compact peut être non compact (exemple: espace des nombres ordinaux de seconde classe, avec la topologie usuelle) et un espace compact peut ne pas être strictement semi-compact (exemple: produit topologique d'une famille non dénombrable d'intervalles compacts).—D'autre part, il est évident que chacune des trois notions de compacité entraine la notion " relative " correspondante, et que la réciproque est tout à fait fausse. On fera attention ici que pour qu'une partie A d'un espace E soit relativement compacte, il faut et il suffit par définition que son adhérence soit compacte, mais qu'il n'est est plus de même pour la semi-compacité relative et la stricte semi-compacité relative. La condition est évidemment encore suffisante, mais on peut trouver une partie A strictement semi-compacte d'un espace séparé E, dont l'adhérence ne soit pas même semi-compacte. En d'autres termes, il existe un espace séparé non semi-compact E dans lequel une partie strictement semi-compacte A soit dense. Soit en effet X un espace séparé qui soit strictement semi-compact et localement compact mais non compact (par exemple l'espace des nombres ordinaux de seconde classe), a son " point à l'infini," $Y = X \cup (a)$. Pour tout entier naturel n, soit Y_n un exemplaire homéomorphe de Y (X_n correspondant à X et a_n à a) ; supposons les Y_n disjoints et soit b un élément qui n'appartienne à aucun des Y_n. Sur l'ensemble $E = (b) \cup \bigcup_n Y_n$, considérons la topologie dont les ouverts sont les parties qui coupent chaque Y_n suivant un ouvert, et qui, s'ils contiennent b, contiennent aussi les X_n à partir d'un rang assez élevé. On vérifie trivialement les axiomes des ouverts (Bourbaki (1)), et que E est séparé; E n'est pas semi-compact, car il est manifeste que la suite $(a_n)_n$ n'a pas de point adhérent. D'autre part, $A = (b) \cup \bigcup_n X_n$ est partout dense et strictement semi-compact, comme on vérifie aussitôt.

Rappelons enfin que dans un espace métrique, les trois notions de compacité sont équivalentes, ainsi que les notions " relatives " correspondantes. Un autre résultat intéressant, qui nous sera utile par la suite, est le théorème d'A. Weil [10] ; une partie relativement semi-compacte d'un espace uniforme séparé est précompacte. En particulier, dans un espace uniforme séparé et complet, compacité (relative) et semi-compacité (relative) sont la même chose.

La topologie faible d'un espace de Banach ou d'un espace localement convexe quelconque est un exemple d'un topologie en général ni complète ni métrisable, et où les critères de relative compacité qu'on vient de rappeler ne s'appliquent pas tels quels. Plus généralement, il en est ainsi dans les espaces d'applications continues d'un espace topologique dans un autre, muni de la topologie de la convergence simple par exemple. Pourtant un théorème d'Eberlein pour les espaces de Banach, et les résultats de G. Köthe sur ses " espaces parfaits " (cf. G. Köthe [8]) montrent que dans ces espaces, munis de la topologie faible, on a encore identité entre parties relativement semi-compactes et relativement compactes. D'autre part, dans les espaces de Banach encore, un théorème de Šmulian (généralisé aux espaces ($\mathfrak{F}$) dans [5]) affirme l'identité pour la topologie faible entre parties strictement relativement semi-compactes et parties relativement compactes. Ce sont ces résultats qui nous ont guidé et que nous allons généraliser et préciser.

3. Semi-compacité et compacité. Soit E un espace topologique, F un espace uniforme séparé; nous désignons par $C(E,F)$ l'espace des applications continues de E dans F, par $\mathfrak{F}(E,F)$ l'espace de toutes les applications de E dans F, et, si $\mathfrak{S}$ est un ensemble de parties de E, par $\mathfrak{T}_{\mathfrak{S}}$ la structure uniforme sur $C(E,F)$ et $\mathfrak{F}(E,F)$ de la convergence uniforme sur les éléments de $\mathfrak{S}$ (cf. [3]) ; munis de cette structure les espaces précédents seronts désignés par $C_{\mathfrak{S}}(E,F)$ resp. $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$. Si F est séparé et si $\mathfrak{S}$ recouvre E (ce que nous supposons par la suite) ces espaces sont séparés, et si de plus F est complet, il en est même de $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$, mais en général $C_{\mathfrak{S}}(E,F)$ n'est pas complet. On vérifie aussitôt que si un filtre de Cauchy dans $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ converge pour la topologie de la convergence simple, il converge pour $\mathfrak{T}_{\mathfrak{S}}$, d'où suit que pour qu'une partie A de $C_{\mathfrak{S}}(E,F)$ ait une adhérence complète dans cet espace, il faut et il suffit que tout filtre de Cauchy sur A converge en chaque point vers une application *continue* de E dans F. Alors l'adhérence $\bar{A}$ de A pour $\mathfrak{T}_{\mathfrak{S}}$ sera à fortiori complète pour toute $\mathfrak{T}_{\mathfrak{S}'}$, avec $\mathfrak{S}' \supset \mathfrak{S}$. En particulier si A a une adhérence complète dans l'espace $C_s(E,F)$ muni de la structure $\mathfrak{T}_s$ de la convergence simple, il en sera de même à fortiori pour toute $\mathfrak{T}_{\mathfrak{S}}$. A fortiori, si A est relativement compacte dans $C_s(E,F)$, l'adhérence de A dans $C_{\mathfrak{S}}(E,F)$ est complète quel que soit l'ensemble de parties $\mathfrak{S}$.

Enfin, remarquons encore que le théorème de Tychonoff donne immédiatement: Pour qu'une partie de $C_s(E,F)$ soit relativement compacte, il faut et il suffit que 1°) elle le soit dans le produit topologique $\mathfrak{F}_s(E,F)$, c'est-à-dire que pour tout $x \varepsilon E$, l'ensemble des $f(x)$, où $f \varepsilon A$, soit relativement compact dans F; et 2°) que l'adhérence de A dans $C_s(E,F)$ soit la même que dans $\mathfrak{F}_s(E,F)$, c'est-à-dire que toute application de E dans F qui est limite simple d'applications éléments de A, soit continue.

Ces remarques interviennent dans diverses questions d'Analyse Fonctionnelle, et seront essentielles pour la compréhension de la suite.

THÉORÈME 1. *Soit E un espace semi-compact, F un espace uniforme séparé, $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties de E recouvrant E. Si dans F toute partie relativement semi-compacte est relativement compacte (en particulier, si F est complet), alors il en est de même dans l'espace $C_{\mathfrak{S}}(E,F)$.*

Toute partie relativement semi-compacte A de $C_{\mathfrak{S}}(E,F)$ est précompacte (cf. ci-dessus 2.) ; if suffit de montrer que son adhérence est complète, et a fortiori, d'après nos remarques précédentes, que A est relativement compact pour la topologie de la convergence simple. Comme A est évidemment relativement semi-compact pour cette dernière topologie (puisque $\mathfrak{S}$ recouvre E) on est ramené au cas de la topologie $\mathfrak{T}_s$. Mais ce cas est inclus dans le théorème-clef suivant:

Théorème 2. *Soit E un espace semi-compact, F un espace complètement régulier, A une partie de $C_s(E, F)$, E_1 une partie dense de E.*

1°) *Si dans F toute partie relativement semi-compacte est relativement compacte, alors les conditions suivantes sur A sont toutes équivalentes:*

a) *A est relativement compact;*

b) *A est relativement semi-compact;*

c) *pour toute suite (f_n) extraite de A et toute suite (x_i) extraite de E_1, il existe une application continue f de l'adhérence K de l'ensemble des x_i dans F, telle que pour tout $x \in K$, $f(x)$ soit adhérent à la suite des $f_n(x)$. Et pour tout $x \in \complement E_1$, l'ensemble des $f(x)$ avec $f \in A$ est relativement semi-compact;*

d) *pour toute suite (f_n) extraite de A et toute suite (x_i) extraite de E_1, il existe un $X \in F$ qui soit point doublement adhérent à la suite double $(f_n(x_i))$ (par quoi nous entendons que tout voisinage de X rencontre une infinité de lignes et une infinité de colonnes de la suite double chacune en une infinité de termes). Et pour tout $x \in \complement E_1$, l'ensemble des $f(x)$ avec $f \in A$ est relativement semi-compact.*

2°) *De toutes façons (sans plus faire sur F la restriction de la première partie de l'énoncé) chacune des conditions qui précèdent est suffisante pour assurer que toute application de E dans F qui est limite simple d'applications éléments de A est continue; les deuxièmes parties des conditions* c) *et* d) *peuvent être omises.*

Enfin, moyennant la première partie de la condition d), *même si on ne suppose plus que E est semi-compact, toute application de E dans F qui est limite simple d'applications éléments de A est continue.*

Démonstration. On a de toutes façons manifestement a) $\to$ b) $\to$ c); montrons que si E est semi-compact, c) entraine d); il suffit de montrer que la première partie de la condition c) entraine la première partie de la condition d). Soit en effet, avec les notations de d), $x_0 \in E$ adhérent à la suite (x_i) et soit f l'application stipulée dans c), relative aux suites (x_i) et (f_n); je dis que $f(x_0)$ est doublement adhérent à la suite double $(f_n(x_i))$. En effet, s'il existait un voisinage ouvert V de $f(x_0)$ tel que sauf pour un nombre fini d'indices i l'on ait "$f_n(x_i) \varepsilon \complement V$ pour $n \geqq n_0(i)$," on aurait,, sauf pour un nombre fini d'indices: $f(x_i) \varepsilon \complement V$, d'où $f(x_0) \varepsilon \complement V$ ce qui est absurde; et s'il existait un voisinage ouvert V de $f(x_0)$ tel que sauf pour un nombre fini d'indices n l'on ait "$f_n(x_i) \varepsilon \complement V$ pour $i \geqq i_0(n)$," on aurait sauf pour un nombre fini d'indices $f_n(x_0) \varepsilon \complement V$, d'où $f(x_0) \varepsilon \complement V$, ce qui est encore absurde.— Pour prouver la première partie du théorème, tout revient donc à prouver que d) entraine a). Mais de d) resulte manifestement que pour *tout* $x \varepsilon E$ l'ensemble des $f(x)$, avec $f \varepsilon A$ est une partie relativement semi-compacte de F, donc relativement compacte en vertu de l'hypothèse sur F. En tenant compte d'une remarque faite plus haut, tout revient donc à montrer que toute application de E dans F qui est limite simple d'applications éléments de A est continue. Cela est inclus dans la deuxième partie du théorème, cette deuxième partie revenant manifestament à prouver que si E est un espace topologique quelconque, et F complètement régulier, alors la première condition énoncée dans d) est suffisante pour assurer que toute application f de E dans F qui est limite simple d'applications éléments de A est continue (E_1 désignant une partie dense dans E).

F étant complèment régulier, sa topologie peut être considérée comme la moins fine de celles qui rendent continues certaines fonctions numériques ϕ_i sur F ([2], page 11, proposition 4). On voit alors qu'on peut se ramener au cas où F est la droite numérique, la continuité de f équivalant en effet à la continuité de chacun des fonctions numériques $\phi_i \circ f$ sur E (d'autre part $\phi_i \circ f$ est limite simple de fonctions $\phi_i \circ g$ où g parcourt A, et l'ensemble de ces $\phi_i \circ g$ jouit manifestement des propriétés envisagées pour A lui-même). Supposons donc que F soit la droite numérique; on sait que pour démontrer la continuité de f, il suffit de montrer que l'on a $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \varepsilon E_1}} f(x) = f(x_0)$ pour tout $x_0 \varepsilon E$ ([1] page 38, th. 1). Nous démontrerons cette relation par l'absurde, en reprenant une idée d'Eberlein. Supposons donc qu'il existe un $x_0 \varepsilon E$ et un $\alpha > 0$ tels que pour tout voisinage V de x_0, il existe un $x \varepsilon V \cap E_1$ tel que $|f(x) - f(x_0)| \geqq \alpha$. On pourrait alors par récurrence construire deux suites d'éléments de A et de E_1 respectivement, (f_i) et (x_i), telles que l'on ait (on suppose les suites construites déjà jusqu'aux termes de rang $n-1$):

a) $|f_n(x_i) - f(x_i)| \leqq 1/n$ $(0 \leqq i \leqq n-1)$ (cela est possible, f étant limite simple d'éléments de A).

b) $|f_i(x_n) - f_i(x_0)| \leqq 1/n$ $(0 \leqq i \leqq n)$.

c) $|f(x_n) - f(x_0)| \geqq \alpha$ (ce que est encore possible par hypothèse).

Il existe un point z doublement adhérent à la suite double $(f_i(x_j))$, et comme pour i constant la suite $(f_n(x_i))$ tend vers $f(x_i)$ en vertu de a) et la suite $(f_i(x_n))$ vers $f_i(x_0)$ en vertu de b), z est adhérent à chancune des suites $(f(x_n))$ et $(f_n(x_0))$. Or, en vertu de la première des inégalités a), la deuxième suite tend vers $f(x_0)$; on a donc $z = f(x_0)$, et $f(x_0)$ serait valeur d'adhérence de la première suite, contrairement aux inégalités c). CQFD.

COROLLAIRE 1. *L'énoncé du théorème* 1 *reste valable si on suppose E localement compact, ou métrique, et plus généralement si toute application de E dans F dont les restrictions aux parties semi-compactes de E sont continues, est continue.*

En effet, on se ramène évidemment à montrer que si A est relativement semi-compact pour la topologie de la convergence simple, toute limite simple d'applications éléments de A est continue, ce qui est déjà une conséquence du théorème 1.

Remarque 1. La démonstration du théorème 2 met en évidence que si on suppose la topologie de F définie comme la moins fine des topologies rendant continues certaines applications ϕ_i de F dans des espaces complètement réguliers F_i, alors les critères énoncés dans le théorème 2 équivalent à ceux qu'on en déduit en supposant que les hypothèses envisagées sont vérifiées, non pour A lui-même à priori, mais pour chacun des ensembles $A_i \subset C(E, F_i)$ (où pour tout i, on désigne par A_i l'ensemble des $\phi_i \circ f$ où f parcourt A).

Remarque 2. Supposons que la suite double (x_{ij}) prenne ses valeurs dans un espace métrique F, et y soit relativement compacte. Alors on vérifie que la non-existence d'un point doublement adhérent à la suite double implique l'existence d'une " suite double extraite " $(x_{i_\alpha j_\beta}) = (y_{\alpha,\beta})$, telle que $\lim_\alpha \lim_\beta y_{\alpha\beta}$ et $\lim_\beta \lim_\alpha y_{\alpha\beta}$ existent tous deux et soient distincts. En effet, l'application du procédé diagonal permet de construire une suite d'indices (i_α) telle que $\lim_{\alpha\to\infty} x_{i\alpha, j}$ existe pour tout j. Une seconde application du procédé diagonal permet d'obtenir une suite d'indices j_β telle que $\lim_{\beta\to\infty} x_{i_\alpha, j_\beta}$ existe pour tout i_α, et que $\lim_\beta (\lim_\alpha x_{i_\alpha, j_\beta})$ existe. Enfin on peut supposer en extrayant encore au besoin une suite partielle de la suite (i_α), que $\lim_\alpha (\lim_\beta x_{i_\alpha, j_\beta})$ existe. Mais les deux limites doubles $\lim_\alpha (\lim_\beta x_{i_\alpha, j_\beta})$ et $\lim_\beta (\lim_\alpha x_{i_\alpha, j_\beta})$ ne peuvent être égales, car leur valeur commune serait manifestement un point doublement adhérent à la suite double (x_{i_α, j_β}).

D'autre part, une suite double telle que $\lim_i (\lim_j x_{i,j})$ et $\lim_j (\lim_i x_{ij})$

existent et soient distincts n'a manifestement pas de point doublement adhérent (car un tel point devrait être identique à chacune de ces limites doubles). Il suit aussitôt le

Corollaire 2. *Soit E un espace semi-compact, F un espace métrique, A un ensemble d'applications continues de E dans F tel que l'ensemble des $f(x)$ où $f \varepsilon A$ et $x \varepsilon E$, soit relativement compact. Pour que A soit relativement compact dans $C_s(E, F)$, il faut et il suffit qu'il n'existe pas de suite (x_i) extraite de E et de suite (f_j) extraite de A, telles que $\lim_i . \lim_j . f_j(x_i)$ et $\lim_j . \lim_i . f_j(x_i)$ existent tous deux et soient distincts. La condition subsiste si on assujettit la suite (x_{ij}) à être extraite d'une partie partout dense fixe E_1 de E. Et cette condition reste suffisante pour assurer que A est relativement compact, même si E n'est plus supposé semi-compact.*

De la démonstration du théorème 2, ou du théorème 2 directement, on déduit immédiatement le résultat suivant:

Proposition 1. *Soit E un espace semi-compact, E un espace complètement régulier, A une partie relativement compacte de l'espace $C_s(E, F)$. Alors A est encore relativement compact dans l'espace $C_s(\tilde{E}, F)$, où $\tilde{E}$ est l'espace obtenu en munissant E de la topologie la moins fine rendant continues les applications éléments de A. En particulier, toute application f de E dans F que est limite simple d'applications éléments de A, est encore continue au sens de la topologie de $\tilde{E}$* (c'est à dire que, pour tout $x_0 \varepsilon E$ et tout voisinage V de $f(x_0)$ dans F, il existe un nombre fini d'éléments $f_i \varepsilon A$ et des ouverts Ω_i dans F, tels que $f_i(x_0) \varepsilon \Omega_i$ pour tout i, et que $f_i(x) \varepsilon \Omega_i$ pour tout i entraine $f(x) \varepsilon V$.[2]

Signalons pour être complet un autre cas intéressant et non classique où la semi-compacité relative entraine la compacité relative, qui m'a été signalé par M. J. Dieudonné:

Théorème 3. *Soit E un espace complètement régulier dont la topologie $\mathfrak{T}$ soit plus fine qu'une certaine topologie métrisable $\mathfrak{T}_0$. Alors dans E les parties (relativement) compactes, (relativement) semi-compactes et (relativement) strictement semi-compactes sont identiques, et leur topologie métrisable.*

---

[2] En fait, cet énoncé est loin d'être profond, du moins si E est compact. On peut en effet montrer alors par voie directe le résultat bien moins restrictif: Si E est *compact*, F un espace topologique *séparé quelconque*, A un ensemble *quelconque* d'applications continues de E dans F, alors toute application *continue* de E dans F qui est limite simple d'applications éléments de A, est déjà continue quand on munit E de la topologie la moins fine rendant continues les applications éléments de A.

Il suffit de montrer que toute partie relativement semi-compacte A est relativement compacte. Car alors, son adhérence $\bar{A}$ étant compacte et la topologie induite par $\mathfrak{T}_0$ sur $\bar{A}$ étant séparée et moins fine que celle induite par $\mathfrak{T}$, elle doit lui être identique, d'où suit que $\bar{A}$ est métrisable et *strictement* semi-compact. Tout revient donc à montrer que tout ultra-filtre ϕ sur A converge vers quelque $x_0 \varepsilon E$. Mais A étant aussi relativement semi-compact pour $\mathfrak{T}_0$ qui est métrisable, A est relativement compact pour $\mathfrak{T}_0$, donc ϕ converge pour $\mathfrak{T}_0$ vers un $x_0 \varepsilon E$. Tout revient à montrer que la convergence a lieu aussi au sens de $\mathfrak{T}$, donc (cf. [2] p. 11, proposition 9) que pour toute fonction numérique continue f sur E, $f(x)$ converge vers $f(x_0)$ suivant le filtre ϕ. Soit $\mathfrak{T}_f$ la topologie la moins fine sur E rendant continues f et l'application identique de E sur E muni de $\mathfrak{T}_0$, cette topologie est métrisable, plus fine que $\mathfrak{T}_0$ et moins fine que $\mathfrak{T}$. A est donc aussi relativement semi-compact pour $\mathfrak{T}_f$, donc relativement compact pour cette topologie, ϕ tend donc vers une limite $y \varepsilon E$ au sens de $\mathfrak{T}_f$, et on a forcément $y = x_0$ puisque $\mathfrak{T}_f$ est plus fine que $\mathfrak{T}_0$. Il suit bien que $f(x)$ tend vers $f(x_0)$ suivant le filtre ϕ, CQFD.

COROLLAIRE. *Soit E un espace topologique, F un espace métrique, $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties de E recouvrant E. Supposons qu'il existe une suite d'ensembles éléments de $\mathfrak{S}$ dont la réunion soit partout dense dans E (en particulier, il suffit qu'il existe dans E une suite partout dense). Alors dans $C_{\mathfrak{S}}(E, F)$ les parties (relativement) compactes, (relativement) semi-compactes et (relativement) strictement semi-compactes sont identiques.*

Remarquons que le théorème 3 aurait pu se démontrer aussi rapidement sans l'aide des ultra-filtres, en montrant directement que sur l'adhérence des parties relativement semi-compactes, les topologies $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}_0$ sont identiques. Mais la méthode employée montre plus généralement que si on considère un ensemble de topologies $\mathfrak{T}_i$ sur E où les parties (relativement) semi-compactes soient (relativement) compactes, et si cette famille de topologies admet un plus petit élément $\mathfrak{T}_0$ séparé, alors la borne supériere $\mathfrak{T} = \operatorname{Sup}_i \mathfrak{T}_i$ satisfait à la même hypothèse que les $\mathfrak{T}_i$.

4. Appplications aux espaces vectoriels localement convexes. Les théorèmes 1 et 2 s'appliquent aux sous-espaces fermés d'espaces $C_{\mathfrak{S}}(E, F)$. De manière générale, l'application du théorème 1 peut se présenter ainsi: On donne un ensemble B d'applications d'un ensemble E dans un espace uniforme séparé F dont les parties relativement semi-compactes soient relativement compactes, examiner s'il en est de même dans B muni d'une topologie

$\mathfrak{T}_{\mathfrak{S}}$. On pourra l'affirmer dès qu'on aura trouvé sur E, pour toute partie relativement semi-compacte A de B, une topologie rendant continues les applications éléments de A, et assez peu fine pour que toute application de E dans F dont les restrictions aux parties semi-compactes de E sont continues, et qui soit par ailleurs limite au sens de $\mathfrak{T}_{\mathfrak{S}}$ d'applications éléments de A, soit élément de B. Remarque analogue pour l'application du théorème 2, quand $\mathfrak{T}_{\mathfrak{S}}$ est la topologie de la convergence simple, mais alors on a intérêt à prendre sur E une topologie aussi fine que possible donnant encore suffisamment de parties semi-compactes pour que toute application de E dans F dont les restrictions à ces parties sont continues (et de plus limite simple d'éléments de A) soit continue. Ces deux considérations se reflètent exactement dans les deux propositions qui vont suivre.

Si E est un espace vectoriel localement convexe séparé, il peut être considéré comme l'espace des formes linéaires continues sur son dual faible E', muni d'une topologie $\mathfrak{T}_{\mathfrak{S}}$ (théorème de Mackey, cf. [9] et [5]) $\mathfrak{S}$ étant un ensemble de parties convexes et *faiblement compactes* recouvrant E'. D'autre part on peut montrer ([7]) que si E est complet, tout forme linéaire sur E' dont les restrictions aux éléments de $\mathfrak{S}$ sont continues, est faiblement continue, c'est à dire élément de E. Comme par ailleurs toute limite simple d'applications linéaires est linéaire, on obtient en premier lieu la généralisation du théorème d'Eberlein annoncée au début:

PROPOSITION 2. *Si E est un espace localement convexe séparé complet ou seulement complet pour la topologie $\tau(E, E')$ de Mackey associée,* (cf. [5] et [9]) *ses parties relativement semi-compactes et relativement compactes sont identiques* (et ceci d'ailleurs manifestement pour toute topologie localement convexe sur E donnant le même dual).

En second lieu, on a le résultat

PROPOSITION 3. a) *Sous les conditions de la proposition précédente, pour qu'une partie A de E soit faiblement relativement compacte, il faut et il suffit qu'elle soit bornée, et qu'il n'existe pas de suite (x_i) extraite de A et de suite (x'_j) extraite d'une partie faiblement compacte convexe de E', telles que $\lim_i \lim_j \langle x_i, x'_j \rangle$ et $\lim_j \lim_i \langle x_i, x'_j \rangle$ existent et soient distincts.*

b) *Plus généralement, soit (K_α) une famille de parties convexes de E', relativement faiblement compactes (et non forcément fermées), telle que la famille des adhérences faibles $\overline{K_\alpha}$ engendre algébriquement E', et que E soit complet pour la topologie de la convergence uniforme sur les $\overline{K_\alpha}$. Alors le* *critère précédent de relative faible compacité de A subsiste, si on assujettit la suite (x'_i) à être extraite de quelque K_α.*

Remarque 3. On voit facilement que les propositions précédentes valent encore si on suppose non pas E complet, mais seulement ses parties bornées et fermées complètes (il suffit de passer au complété de E pour la topologie donnée ou la topologie $\tau(E, E')$). De façon plus générale encore, les propositions 2 et 3 valent pour une partie particulière A de E, dès qu'on sait que l'enveloppe convexe fermée de A est complète (ne fût-ce que pour $\tau(E, E')$ lorsqu'il s'agit de proposition 2 ou proposition 3a)).—Comme toute partie faiblement compacte de E est forcément complète pour les topologies envisagées, il ne semble pas raisonnable d'espérer généraliser encore ces derniers résultats (mais nous approfondirons encore considérablement la proposition 2 par le théorème 7 plus bas).

Il est d'ailleurs facile de construire un espace vectoriel non complet, hyperplan fortement fermé d'un dual faible d'un espace de Banach par exemple, dans lequel il y ait des parties semi-compactes non relativement compactes. Soit en effet Ω un espace localement compact et semi-compact, mais non compact (par exemple l'espace des nombres ordinaux de seconde classe), soit $\hat{\Omega}$ l'espace compact obtenu par adjonction du "point à l'infini" ϖ. Soit E l'espace des fonctions complexes continues sur $\hat{\Omega}$, muni de la norme de la convergence uniforme, E' son dual (espace des mesures de Radon sur $\hat{\Omega}$). Si on identifie tout point de $\hat{\Omega}$ avec la mass $+1$ placée en ce point, la topologie de $\hat{\Omega}$ s'identifie à la topologie induite par la topologie faible de E'. Il est manifeste que ϖ n'appartient pas au sous-espace fortement fermé engendré par Ω (sa distance à ce dernier est égale à 1), il existe donc un hyperplan fortement fermé V de E' contenant Ω et non ϖ. Dans cet espace (muni de la topologie faible), Ω est semi-compact et non faiblement relativement compact.

La proposition 3 donne un critère pour qu'une suite de E converge faiblement; il faut et il suffit en effet qu'elle soit faiblement relativement compacte, et qu'elle converge sur une partie totale E'_1 de E' (car sur une partie faiblement compacte de E, la topologie $\sigma(E, E')$ coïncide forcément avec la topologie séparée moins fine $\sigma(E, E'_1)$). Nous ne donnons pas l'énoncé explicite, qui de toutes façons pourra beaucoup s'améliorer plus bas. Mais donnons une application immédiate de la proposition 3b), due à ce que le bidual E'' d'un espace E (cf. [5]) est engendré par les adhérences faibles des parties bornées de E:

PROPOSITION 4. *Soit E un espace localement convexe, E' son dual fort* (cf. [5]) *supposé complet, E'' le dual de E' fort. Pour qu'une partie A de E' soit relativement compacte pour $\sigma(E', E'')$ il faut et il suffit qu'elle soit fortement bornée, et qu'il n'existe pas de suite bornée (x_i) extraite de E et de suite (x'_j) extraite de A, telles que* $\lim_i . \lim_j . \langle x_i, x'_j \rangle$ *et* $\lim_j . \lim_i . \langle x_i, x'_j \rangle$ *existent et soient distincts.*

Ici encore, il suffit de supposer seulement que les parties fermées et bornées de E' fort sont complètes. Et on a encore un critère correspondant pour qu'une suite dans E' converge pour $\sigma(E', E'')$: il faut et il suffit qu'elle soit relativement compacte pour cette topologie, et qu'elle converge sur une partie totale de E.—Noter que si on suppose A faiblement relativement compact, il est inutile de supposer E' fort complet (car l'adhérence forte de A sera déjà complète).

5. Critères de semi-compacité stricte. Soit de nouveau E un espace topologique, F un espace uniforme séparé, $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties de E recouvrant E. Pour qu'un filtre sur une partie *relativement compacte* A de $C_{\mathfrak{S}}(E, F)$ converge, il faut et il suffit qu'il converge en chaque point d'une partie partout dense E_1 de E (puisque la topologie de la convergence simple sur E_1 est encore séparée sur $C(E, F)$, et moins fine que la topologie $\mathfrak{T}_{\mathfrak{S}}$). Si on suppose seulement A relativement semi-compact, la conclusion subsiste à condition de se borner aux filtres définis par des *suites* (f_n). En effet, cette suite ne peut avoir dans $C_{\mathfrak{S}}(E, F)$ qu'une seule valeur d'adhérence, (définie par ses valeurs sur E_1), et d'autre part on vérifie immédiatement que dans une partie relativement semi-compacte d'un espace topologique séparé C, les suites convergentes sont précisément celles qui ont un seul point adhérent.

PROPOSITION 5. *Soit E un espace topologique, F un espace uniforme séparé, $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties de E recouvrant E. Supposons qu'il existe une suite (E_i) de parties de E, dont la réunion soit partout dense, et telle que dans chacun des espaces $C_{\mathfrak{S}_i}(E_i, F)$ ($\mathfrak{S}_i$ désignant la trace de $\mathfrak{S}$ sur E_i), la (semi-)compacité relative d'une partie de l'espace entraine sa stricte semi-compacité relative. Alors il en est de même dans $C_{\mathfrak{S}}(E, F)$.*

Soit en effet (f_n) une suite relativement (semi-)compacte dans $C_{\mathfrak{S}}(E, F)$. Pour tout i, la suite des restrictions des f_n à E_i forme alors une suite relativement (semi-)compacte dans $C_{\mathfrak{S}_i}(E_i, F)$, ce qui permet par hypothèse d'extraire de (f_n) une suite dont les restrictions à E_i convergent dans $C_{\mathfrak{S}_i}(E_i, F)$. Par le procédé diagonal, on peut alors extraire de (f_n) une suite telle que pour *tout* i, la suite des restrictions à E_i converge dans $C_{\mathfrak{S}_i}(E_i, F)$. Cette suite converge en particulier en chacun des points de $\bigcup_i E_i$, qui est dense dans E, d'où resulte qu'elle converge dans $C_{\mathfrak{S}}(E,F)$ en vertu de nos remarques préliminaires.

Une partie du corolllaire du théorème 3 est contenu dans la proposition précédente (savoir que dans $C_{\mathfrak{S}}(E,F)$, la semi-compacité relative entraine la stricte semi-compacité relative, sous les hypothèses spécifiées dans ce corollaire). La partie la plus profonde du corollaire en question échappe pourtant à la proposition 5, en revanche nous avons le

COROLLAIRE. *Si E contient une suite partout dense, et si dans F toute partie relativement (semi-)compacte est strictement semi-compacte, alors il en est de même dans $C_{\mathfrak{S}}(E,F)$.*

Mais on notera que quelque simple que soit l'espace F (par exemple le segment compact $(0,1)$), pour avoir des résultats dans le genre du précédent, il faut faire quelque hypothèse sur le couple $(E,\mathfrak{S})$. Ainsi, si E est un espace discret non dénombrable, et $F=(0,1)$ on sait bien que le produit topologique $C_s(E,F)$ est compact, mais non strictement semi-compact.—Il est tout aussi évident que la moindre des choses qu'il faille supposer sur F pour avoir un résultat, c'est que dans F lui-même toute partie relativement compacte soit strictement relativement semi-compacte.

Le théorème suivant tire son intérèt du fait qu'il ne fait intervenir aucune condition de dénombrabilité sur l'espace E lui-même:

THÉORÈME 4. *Soit E un espace compact, F un espace uniforme séparé, $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties de E recouvrant E, A une partie de $C_{\mathfrak{S}}(E,F)$ relativement semi-compacte. Supposons de plus que pour toute $f \in A$, le sous-espace $f(E)$ de F ait une topologie métrisable (il suffit donc que F ait une topologie métrisable). Alors A est strictement relativement semi-compacte.*

Soit (f_n) une suite extraite de A, tout revient à montrer qu'on peut en extraire une suite qui converge en chaque point. On est donc ramené au cas de la topologie $\mathfrak{T}_s$ de la convergence simple, et nous supposerons maintenant que F est un espace topologique séparé quelconque.—Soit B l'adhérence dans $C_s(E,F)$ de l'ensemble des f_n, considérons sur E la topologie $\mathfrak{T}'$ la moins fine rendant continues les applications éléments de B, manifestement la suite (f_n) est encore relativement semi-compacte dans l'espace $C_s(\tilde{E},F)$, où $\tilde{E}$ désigne E muni de $\mathfrak{T}'$. Pour qu'une suite extraite de (f_n) converge en chaque point, il suffit donc qu'elle converge en chaque point d'une partie dense de $\tilde{E}$, et l'application du procédé diagonal nous ramène à montrer qu'il existe dans $\tilde{E}$ une suite partout dense. Mais $\phi(x)=\{f(x)\}_{f\in B}$ étant l'application canonique de E dans le produit topologique $G = \prod_{f \varepsilon B} f(E)$, il revient manifestement au même de montrer que l'image $K = \phi(\bar{E})$ admet une suite partout dense. Mais K étant compact (comme image *continue* du *compact* E) sa topologie est aussi la moins fine de celles qui rendent continues les applications f_n (topologie qui est en effet moins fine, et d'autre part *séparée* comme on vérifie aussitôt). K s'identifie donc à un sous-espace du produit topologique $\prod_n f_n(E)$, qui est *métrisable*, par conséquent K est un compact métrisable, et à fortiori séparable.

Remarque 4. Le théorème 4 vaut encore si on suppose seulement que E est semi-compact. Tout revient en effet à montrer que K est compact, mais K est déjà semi-compact comme image continue de E, d'autre part la topologique de K est complèment régulière et plus fine que la topologie métrisable définie par les f_n; la compacité de K resulte alors du théorème 3.—On aurait aussi pu s'épargner ce raisonnement et abréger en même temps la démonstration précédente en faisant usage de la proposition 1, qui dit que la suite (f_n) est encore relativement semi-compacte dans l'espace $C(\tilde{E}, F)$, lorsque $\tilde{E}$ désigne E muni de la topologie la moins fine rendant continues les f_n; tout revient alors à trouver une suite dense dans $\tilde{E}$, ce qui est immédiat.

En conjuguant le théorème 4 et la proposition 5, on obtient des cas étendus où la semi-compacité relative entraine la semi-compacité relative stricte. Le théorème de Šmulian pour la topologie faible des espaces de Banach et plus généralement des espaces $(\mathfrak{F})$ (cf. [5]) en est un cas particulier, puisque un espace $(\mathfrak{F})$ s'identifie à l'espace des formes linéaires continues sur son dual faible E', et que E' est réunion d'une suite de parties faiblement compactes. On notera d'ailleurs la parenté entre la démonstration directe du théorème de Šmulian, et celle du théorème 4. Donnons pour être complet l'énoncé le plus général du théorème de Šmulian (énoncé qui peut d'ailleurs se démontrer directement comme dans le cas classique):

PROPOSITION 6. *Soit E un espace localement convexe, (x_n) une suite faiblement relativement semi-compacte dans E, K une partie faiblement compacte du dual E'. Alors on peut extraire de (x_n) une suite qui converge en chaque point de K (et par conséquent, en chaque point du sous-espace vectoriel faiblement fermé de E' engendré par K).—Si dans E il existe une suite de voisinages de l'origine dont l'intersection soit réduite à $\{0\}$, alors on peut extraire de (x_n) une suite faiblement convergente.*

(il suffit de noter que la dernière hypothèse assure l'existence dans E'

d'une suite de parties faiblement compactes dont la réunion soit partout dense).—Rappelons que déjà dans le dual faible d'un espace de Banach peut exister une suite relativement faiblement compacte (c'est à dire bornée), dont aucune suite extraite ne converge faiblment (cf. [5]), de sorte qu'une telle situation ne peut pas être considérée comme tératologique.

6. Critères de compacité faible dans les espaces $C^\infty(E)$. Si E est un espace topologique, nous désignons par $C(E)$ l'espace des fonctions complexes continues sur E, par $C^\infty(E)$ l'espace des fonctions complexes continues et bornées sur E, muni de la norme uniforme qui en fait un espace de Banach. Si E est compact ou semi-compact, les ensembles $C(E)$ et $C^\infty(E)$ coïncident, et nous désignerons l'espace de Banach $C^\infty(E)$ par $C(E)$ pour abréger.

Théorème 5. *Soit E un espace compact, pour qu'une partie A de $C(E)$ soit faiblement relativement compacte, il faut et il suffit qu'elle soit bornée, et relativement compacte dans $C(E)$ pour la topologie de la convergence simple.*

La nécessité de la condition est manifeste. Pour montrer qu'elle est suffisante, il suffit de montrer d'après le théorème d'Eberlein (cf. plus haut) que de toute suite (f_n) extraite de A on peut extraire une suite faiblement convergente. Mais comme une suite (g_n) extraite de (f_n) est uniformément bornée par hypothèse, et que par conséquent (les formes linéaires continues sur $C(E)$ n'étant autres que les mesures de Radon sur E) sa convergence faible équivaut à sa convergence en chaque point (théorème de Lebèsgue), il suffit donc d'extraire de la suite (f_n), relativement compacte pour la topologie de la convergence simple, une suite (g_n) qui converge en chaque point. Mais cela est possible en vertu du théorème 4.

Il faut bien noter que ce théorème n'est plus exact lorsqu'on substitue à la topologie de la convergence simple une topologie strictement moins fine, comme par exemple la topologie de la convergence en tout point sauf un seul x_0, comme on s'en convainc sans difficulté. Le théorème qui correspond au précédent et au suivant dans les espaces localement convexes généraux sera examiné en détail plus bas.

Le Théorème 5 permet l'application des critères de compacité établis au théorème 2, et notamment le critère d), qui ne fait intervenir que les valeurs des fonctions sur une partie dense de E. On a même le

Théorème 6. *Soit E un espace topologique quelconque. Pour qu'une partie A de $C^\infty(E)$ soit relativement faiblement compacte, il faut et il suffit qu'-*

elle soit bornée, et qu'il n'existe pas de suite (x_i) *extraite de* E *de suite* (f_j) *extraite de* A *telles que* $\lim_i . \lim_j . f_j(x_i)$ *et* $\lim_j . \lim_i . f_j(x_i)$ *existent et soient distincts. Ce critère subsiste si on assujettit la suite* (x_i) *à être extraite d'une partie dense* E_1 *de* E.

On sait que l'espace $C^\infty(E)$ s'identifie à l'espace des fonctions complexes continues sur la "compactification de Čech" $\hat{E}$ de E (qui s'identifie aussi à l'espace des "caractères" de l'algèbre normée complète $C^\infty(E)$—mais en fait la théorie est très élémentaire, cf. par exemple N. Bourbaki [2], page 14, exercices 6 et 7). Il existe une application canonique continue $x \to \tilde{x}$ de E sur une partie partout dense $\tilde{E}$ de $\hat{E}$ (application qui est biunivoque si et seulement si E est complètement régulier, mais peu importe), telle que l'on ait $f(x) = \tilde{f}(\tilde{x})$ quels que soient $x \varepsilon E$ et $f \varepsilon C^\infty(E)$ (où $\tilde{f}$ est la fonction sur $\hat{E}$ définie par f). D'ailleurs, l'image $\tilde{E}_1$ de E_1 dans $\hat{E}$ sera donc aussi dense. Il suffit alors d'appliquer le théorème 5 à l'espace $C(\hat{E})$, puis le corollaire 2 du théorème 2 à ce même espace et la partie dense $\tilde{E}_1$ de $\hat{E}$.— Notons que l'application de ce dernier théorème et du critère du corollaire 2 du théorème 2, montre aussitôt que le théorème 5 reste valable si E est seulement semi-compact.

Donnons une application immédiate du théorème 6. Si G est un semi-groupe, muni éventuellement d'une topologie qui rende continues ses translations à gauche et à droite, nous dirons avec F. Eberlein ([6]) qu'une fonction complexe bornée et continue sur G est faiblement presque-périodique à gauche (resp. à droite), si l'ensemble de ses translatées gauches (respectivement droites) est une partie relativement faiblement compacte de l'espace de Banach $C^\infty(G)$. On a alors immédiatement la

PROPOSITION 7. *Pour qu'une* $f \varepsilon C^\infty(G)$ *soit faiblement presque-périodique à gauche (ou à droite) il faut et il suffit qu'il n'existe pas de suites* (x_i) *et* (y_j) *extraites de* G, *telles que* $\lim_i . \lim_j . f(x_i y_j)$ *et* $\lim_j . \lim_i . f(x_i y_j)$ *existent et soient distincts. En particulier, les fonctions faiblement presque périodiques à gauche et à droite sont les mêmes.* Il sera donc à propos de les appeller fonctions faiblement presque-périodiques tout court).

7. Renforcement des critères de faible compacité relative dans les espaces vectoriels localement convexes.

THÉORÈME 7. *Soit* E *un espace vectoriel localement convexe séparé,* (K_α) *une famille de parties du dual* E' *de* E, *à enveloppes convexes cerclées* *relativement faiblement compactes, et telles que la famille des enveloppes convexes cerclées fermées* $\widetilde{K}_\alpha$ *des* K_α *engendre algébriquement tout* E'. *Soit* A *une partie bornée de* E, *et supposons* E *complet et pour la topologie* $\mathfrak{T}$ *de la convergence uniforme sur les* K_α, *ou du moins l'enveloppe convexe fermée de* A *complète pour cette topologie.*

a) *Si les* K_α *sont faiblement fermés (c'est à dire faiblement compacts) alors pour que* A *soit faiblement relativement compact dans* E, *il faut et il suffit que pour tout* α, *l'ensemble des fonctions continues sur* K_α *définies par les éléments de* A *soit relativement compact dans* $C(K_\alpha)$ *pour la topologie de la convergence simple.*

b) *Si on ne suppose plus forcément les* K_α *fermés, une condition nécessaire et suffisante pour que* A *soit relativement faiblement compact, est qu'il n'existe pas de suite* (x_i) *extraite de* A *et de suite* (x'_j) *extraite de quelque* K_α, *telles que* $\lim_i \lim_j \langle x_i, x'_j \rangle$ *et* $\lim_j \lim_i \langle x_i, x'_j \rangle$ *existent et soient distincts.*

En vertu du théorème 2 corollaire 2 (qui s'applique ici puisque A est borné), la condition énoncée dans b) équivaut à la condition énoncée dans a), appliquée aux adhérences faibles des K_α, de sorte qu'on peut se borner à démontrer a). Nous identifions comme d'habitude E à l'espaces des formes linéaires continues sur son dual faible, et notons comme dans 4. que tout revient à montrer que pour toute forme linéaire X sur E' qui est faiblement adhérente à A, les restrictions aux $\widetilde{K}_\alpha$ sont faiblement continues. (Dans la suite, il est inutile de conserver l'indice α). D'après le théorème de Mackey ([9]), le dual de E muni de $\mathfrak{T}$ est encore E'. Il existe d'autre part une application linéaire canonique $x \to u(x)$ de E dans l'espace de Banach $C(K)$ des fonction complexes continues sur K, application qui est continue par la définition même de $\mathfrak{T}$, et dont la transposée u' est donc une application faiblement continue du dual C' de $C = C(K)$ dans E'. L'image de la boule unité B de C' par u' est donc une partie convexe cerclée faiblement compacte de E' (puisque B est faiblement compacte), contenant évidemment K, donc aussi $\widetilde{K}$. En fait, il nous sera commode de savoir qu'elle est même identique à $\widetilde{K}$, cela resulte immédiatement du fait connu que B est l'enveloppe convexe cerclée faiblement fermée dans C' de l'ensemble des " masses $+ 1$ " placées aux divers points de K (comme il resulte aussitôt de l'emploi des ensembles polaires, cf. [5]). Nous allons montrer que la restriction de X à $\widetilde{K}$ est de la forme $\langle X, u'.\mu \rangle = \langle f, \mu \rangle$, μ désignant l'élément générique de B, et où f est un élément convenable de l'espace $C = C(K)$ (c'est en fait la fonction sur $K: f(x') = \langle X, x' \rangle$), il s'ensuivra aussitôt que la restriction de X à $\widetilde{K}$ est continue, puisqu'en la composant avec l'application continue u' du compact B *sur* $\tilde{K}$, on obtient une application continue (cf. [1] page 53, th. 1, et page 62 th. 1, cor. 2). Soit donc ϕ la trace sur A du filtre des voinages faibles de X, on a pour tout $x' = u'.\mu(\mu \varepsilon B)$:

$$\langle X, u'.\mu\rangle = \lim_{\phi}.\langle x, u'.\mu\rangle = \lim_{\phi}.\langle u.x, \mu\rangle$$

or l'image de ϕ par u est un filtre de Cauchy pour la convergence simple, et $u(A)$ est *faiblement* relativement compact dans $C(K)$, comme il resulte de l'hypothèse et au théorème 5; il suit que $u.x$ tend *faiblement* suivant ϕ vers une limite $f \varepsilon C(K)$, d'où suit bien $\langle X, u'.\mu\rangle = \langle f, \mu\rangle$.

COROLLAIRE 1. *Soit E un espace de Banach, K l'ensemble des points extrémaux de la boule unité de son dual. Pour que $A \subset E$ soit faiblement relativement compact, il faut et il suffit qu'il n'existe pas de suite (x_i) extraite de A et de suite (x'_j) extraite de K, telle que* $\lim_{i}.\lim_{j}.\langle x_i, x'_j\rangle$ *et* $\lim_{j}\lim_{i}.\langle x_i, x'_j\rangle$ *existent et soient distincts.*

COROLLAIRE 2. *Soit E un espace localement convexe, (B_α) une famille de parties bornées de E telle que toute partie bornée de E soit contenue dans l'enveloppe convexe cerclée fermée de quelque B_α. Supposons le dual fort* (cf. [5]) *E' de E complet, ou du moins ses parties bornées et fermées complètes. Pour que $A \subset E'$ soit relativement compact pour la topologie $\sigma(E', E'')$ (E'' désignant le dual de E' fort) il faut et il suffit qu'elle soit fortement bornée, et qu'il n'existe pas de suite (x_i) extraite de quelques B_α et de suite (x'_j) extraite de A, telles que* $\lim_{i}.\lim_{j}.\langle x_i, x'_j\rangle$ *et* $\lim_{j}.\lim_{i}.\langle x_i, x'_j\rangle$ *existent et soient distincts.*

Remarque 5. En fait, sous les conditions du théorème 7, on peut même affirmer que l'enveloppe convexe fermée de A est faiblement compacte. En effet, la démonstration d'un théorème connu de Krein pour les espaces de Banach se transpose aux espace vectoriels localement convexes pour donner l'énoncé suivant: Soit E un espace localement convexe séparé, A une partie faiblement relativement compacte; pour que son enveloppe convexe fermée soit faiblement compacte, il faut et il suffit qu'elle soit complète (ne fût-ce d'ailleurs que pour la topologie $\tau(E, E')$ associée).—Nous ne donnerons pas la démonstration de cette proposition, qui s'appuie essentiellement sur le théorème d'Eberlein généralisé (proposition 2) et le resultat de [7] rappelé plus haut qui nous a déjà servi pour la proposition 2 et le théorème 7.

Notons encore que le théorème 6 donne comme corollaire immédiat un critère de convergence faible d'une suite dans un espace $C^\infty(E)$, et le théorème 7 un critère de convergence faible d'un suite dans un espace de Banach quelconque. Ces critères, pour le cas particulier de suites tendant faiblement vers 0, se trouvent déjà dans Banach ([4], page 222). Il ne semble pas possible d'ailleurs d'en déduire les théorèmes 6 et 7.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES, NANCY (M. ET M.), FRANCE.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] N. Bourbaki, Topologie Générale, Chap. 1 et 2, *Actualités Scient. et Ind.*, No. 858 (1940).

[2] ———, Topologie Générale, Chap. 9, *ibid.*, No. 1045.

[3] ———, Topologie Générale, Chap. 10, *ibid.*, No. 1084.

[4] S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Varsovie, 1932.

[5] J. Dieudonné et L. Schwartz, "La dualité dans les espaces $(\mathfrak{F})$ et $(\mathfrak{LF})$," *Annales de l'Institut Fourier* (Grenoble), vol. 1 (1950), pp. 61-101.

[6] F. Eberlein, "Abstract ergodic theorems and weak almost periodic functions," *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 67 (1949), pp. 217-240.

[7] A. Grothendieck, "Sur la complétion du dual d'un espace localement convexe," *Comptes Rendus*, vol. 230, pp. 605-606.

[8] G. Köthe, "Erweiterung von Linearfunktionen in linearen Räumen," *Mathematische Annalen*, vol. 116 (1939), pp. 719-732.

[9] G. W. Mackey, "On convex topological linear spaces," *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 60 (1946), pp. 520-537.

[10] A. Weil, "Sur les espaces à structure uniforme et la Topologie Générale," *Actualités Scient. et Ind.*, No. 551 (1937).