Alexander Grothendieck

Techniques de construction en géométrie analytique. VIII. Rapport sur les théorèmes de finitude de Grauert et Remmert

Séminaire Henri Cartan, tome 13, n° 2 (1960-1961), exp. n° 15, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1960-1961__13_2_A2_0>

TECHNIQUES DE CONSTRUCTION EN GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

par Alexander GROTHENDIECK

VIII. RAPPORT SUR LES THÉORÈMES DE FINITUDE DE GRAUERT ET REMMERT.

Dans le présent exposé, nous nous bornons à rappeler sans démonstration des résultats fondamentaux de GRAUERT et REMMERT [4] et [3], généralisant des résultats de H. CARTAN et de J.-P SERRE [1] et [6]. Leurs analogues en géométrie algébrique sont connus ([2], III) et nettement plus faciles à démontrer. On espère qu'une démonstration simplifiée de ces résultats pourra être donnée dans un séminaire ultérieur.

Dans cet exposé et les deux suivants, le corps de base est toujours le corps des nombres complexes.

1. Le théorème de finitude de Grauert.

THÉORÈME 1.1 (GRAUERT [3]). - Soient $f : X \to Y$ un morphisme propre d'espaces analytiques, $\mathfrak{F}$ un Module cohérent sur X, alors les Modules $R^p f_*(\mathfrak{F})$ sur Y sont cohérents.

Rappelons que $R^p f_*(\mathfrak{F})$ est le faisceau sur Y associé au préfaisceau

$$U \rightsquigarrow H^p(f^{-1}(U), \mathfrak{F}) \quad ,$$

où U parcourt les ouverts de Y.

REMARQUE 1.2. - Comme en géométrie algébrique ([2],III), le théorème de finitude a de nombreuses conséquences, dont certaines sont explicitées dans [3], tels que le théorème de semi-continuité", dont nous n'aurons pas à nous servir. Notons cependant que, comme nous l'avions déjà signalé dans l'introduction de [5],V, le théorème 1.1 devrait être généralisé au cas d'un espace analytique relatif X au-dessus d'un espace topologiquement annelé Y, sous une forme que nous ne détaillons pas ici, et qui serait applicable par exemple aux familles différentiables d'espaces analytiques.

Dans [3], on tire de 1.1 l'énoncé suivant :

THÉORÈME 1.3. - Soient $f : X \to Y$ et $\mathcal{F}$ comme dans 1.1, y un point de Y, soit $R^p f_*(\mathcal{F})^\wedge_y$ le complété du module de type fini $R^p f_*(\mathcal{F})_y$ sur $\mathcal{O}_{Y,y}$ pour la topologie m_y-adique ; alors l'homomorphisme canonique

$$R^p f_*(\mathcal{F})^\wedge_y \to \varprojlim_n H^p(X_y , \mathcal{F}/m_y^{n+1} \mathcal{F})$$

(déduit par passage à la limite projective des homomorphismes canoniques $R^p f_*(\mathcal{F})_y \to H^p(X_y , \mathcal{F}/m_y^{n+1} \mathcal{F})$, où X_y est la fibre de X en y) est un <u>isomorphisme</u>.

On se gardera de croire, bien entendu, que les homomorphismes canoniques

$$R^p f_*(\mathcal{F})_y \otimes_{\mathcal{O}_y} (\mathcal{O}_y/m_y^{n+1}) \to H^p(X_y , \mathcal{F}/m_y^{n+1} \mathcal{F})$$

soient des isomorphismes, même pour $n = 0$, en d'autres termes le foncteur $R^p f_*$ ne commute pas au "passage aux fibres", ni a fortiori au changement de base $Y' \to Y$ quelconque. De ce point de vue, 1.3 donne seulement un résultat asymptotique, qui cependant sous des hypothèses convenables implique des résultats plus précis du genre qu'on vient d'envisager. Ainsi

COROLLAIRE 1.4. - Supposons que $\mathcal{F}$ soit <u>plat</u> sur Y, et que l'on ait

$$H^p(X_y , \mathcal{F}/m_y \mathcal{F}) = 0$$

pour un entier donné p, et un point donné $y \in Y$. Alors

(i) $R^p f_*(\mathcal{F})$ est nul au voisinage de y.

(ii) Pour tout Module cohérent $\mathcal{G}$ sur Y, l'homomorphisme canonique

$$R^{p-1} f_*(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{G} \to R^{p-1} f_*(\mathcal{F} \otimes f^*(\mathcal{G}))$$

est un isomorphisme au voisinage de y.

(iii) Pour tout changement de base $g : Y' \to Y$, et tout $y' \in Y'$ au-dessus de y, considérant le morphisme $f' : X' \times_Y Y' \to Y'$ déduit de f par changement de base et le Module cohérent $\mathcal{F}'$ sur X', image inverse de $\mathcal{F}$ sur X', le morphisme canonique

$$g^*(R^{p-1} f_*(\mathcal{F})) \to R^{p-1} f'_*(\mathcal{F}')$$

est un isomorphisme au voisinage de y'.

DÉMONSTRATION.

(i). - Il suffit de prouver $R^p f_*(\mathcal{F})_y = 0$, ce qui résultera de 1.3. et des relations $H^p(X_y, \mathcal{F}/\mathfrak{m}_y^{n+1}\mathcal{F}) = 0$. Cette dernière résulte de la suite exacte de cohomologie et des relations $H^p(X_y, \mathfrak{m}_y^k\mathcal{F}/\mathfrak{m}_y^{k+1}\mathcal{F}) = 0$. Pour démontrer enfin celle-ci, utilisant la platitude de $\mathcal{F}$ sur Y, on trouve

$$\mathfrak{m}_y^k\mathcal{F}/\mathfrak{m}_y^{k+1}\mathcal{F} \simeq (\mathcal{F}/\mathfrak{m}_y\mathcal{F}) \otimes_{\underset{\sim}{C}} (\mathfrak{m}_y^k/\mathfrak{m}_y^{k+1}) ,$$

d'où

$$H^p(X_y, \mathfrak{m}_y^k\mathcal{F}/\mathfrak{m}_y^{k+1}\mathcal{F}) \simeq H^p(X_y, \mathcal{F}/\mathfrak{m}_y\mathcal{F}) \otimes_{\underset{\sim}{C}} (\mathfrak{m}_y^k/\mathfrak{m}_y^{k+1}) = 0 .$$

C. Q. F. D.

(ii). - La même démonstration que ci-dessus prouve plus généralement que pour tout Module cohérent $\mathcal{H}$ sur Y, on a $R^p f_*(\mathcal{F} \otimes f_*(\mathcal{H})) = 0$ au voisinage de y. Utilisant ceci et la suite exacte de cohomologie, on voit que pour toute suite exacte

$$0 \to \mathcal{G}' \to \mathcal{G} \to \mathcal{G}'' \to 0$$

de Modules cohérents au voisinage de y, l'homomorphisme

$$R^{p-1} f_*(\mathcal{F} \otimes f^*(\mathcal{G})) \to R^{p-1} f_*(\mathcal{F} \otimes f^*(\mathcal{G}''))$$

est surjectif au voisinage de y, en d'autres termes le foncteur

$$\mathcal{G} \rightsquigarrow R^{p-1} f_*(\mathcal{F} \otimes f^*(\mathcal{G})) = T(\mathcal{G})$$

en le Module cohérent $\underset{\sim}{\mathcal{G}}$ au voisinage de y est <u>exact à droite</u> en $\mathcal{G}$. Utilisant une présentation finie de $\mathcal{G}$

$$\mathcal{O}_Y^m \to \mathcal{O}_Y^n \to \mathcal{G} \to 0$$

au voisinage de y , on voit par un argument connu que le morphisme canonique

$$T(\mathcal{O}_Y) \otimes \mathcal{G} \to T(\mathcal{G})$$

est un isomorphisme.

C. Q. F. D.

(iii). - Il suffit de prouver que l'homomorphisme pour les complétés des fibres des deux membres en y' est un isomorphisme. Utilisant 1.3 pour l'un et l'autre membre, on est ramené facilement au cas où Y et Y' sont réduits respectivement à y et y' , avec un anneau local artinien. Soit $\mathcal{G}$ le Module sur Y défini par l'anneau local $\mathcal{O}_{y'}$, considéré comme un module de type fini sur $\mathcal{O}_y$, et appliquons (ii) : la conclusion voulue apparaît.

COROLLAIRE 1.5. - Supposons, sous les conditions de 1.4, qu'on ait même

$$H^p(X_y , \mathcal{F}/m_y \mathcal{F}) = H^{p-2}(X_y , \mathcal{F}/m_y \mathcal{F}) = 0 \quad .$$

Alors $R^{p-1} f_*(\mathcal{F})$ est libre au voisinage de y , et l'homomorphisme canonique

$$R^{p-1} f_*(\mathcal{F})_y \otimes_{\mathcal{O}_y} k(y) \to H^{p-1}(X_y , \mathcal{F}/m_y \mathcal{F})$$

est un isomorphisme.

La dernière assertion est un cas particulier de (ii), en prenant pour $\mathcal{G}$ le Module de support $\{y\}$ défini par le $\mathcal{O}_y$-module $k(y) = \underset{\sim}{C}$. D'autre part, on voit comme plus haut à l'aide de la suite exacte de cohomologie que le foncteur $T(\mathcal{G}) = R^{p-1} f_*(\mathcal{F} \otimes f^*(\mathcal{G}))$ en le Module cohérent $\mathcal{G}$ au voisinage de y , est exact, et comme il est isomorphe à $T(\mathcal{O}_Y) \otimes \mathcal{G}$, cela montre que $T(\mathcal{O}_Y) = R^{p-1} f_*(\mathcal{F})$ est plat en y . Comme sa fibre en y est un module de type fini sur l'anneau local noethérien $\mathcal{O}_y$, elle est donc libre, ce qui achève de prouver 1.5.

REMARQUE 1.6. - Le théorème de semi-continuité de Grauert (donné dans [3] comme conséquence de **1.1**) affirme que si X est propre sur Y , $\mathcal{F}$ cohérent sur X et plat sur Y , alors la fonction $y \rightsquigarrow \dim H^p(X_y , \mathcal{F}/m_y \mathcal{F})$ sur Y est semi-continue supérieurement. Il s'ensuit que si cette dimension est nulle en y (comme dans 1.4), elle l'est dans tout un voisinage de y .

Enfin, nous utiliserons également la conséquence suivante, qui figure également dans [3], du théorème de finitude 1.1 :

THÉORÈME 1.7. - Soient $f : X \to Y$ un morphisme propre d'espaces analytiques, $\mathcal{F}$ un Module cohérent sur X, plat par rapport à Y , posons pour tout $y \in Y$:

$$\chi(y) = \sum_p (-1)^p \dim H^p(X_y , \mathcal{F}/m_y \mathcal{F}) \quad .$$

Alors la fonction $y \rightsquigarrow \chi(y)$ sur Y est localement constante.

2. Application aux faisceaux très amples.

Soient $f : X \to Y$ un morphisme propre d'espaces analytiques, $\mathcal{L}$ un Module inversible (= localement libre de rang 1) sur X , En vertu de **1.1** le Module

$$\mathcal{E} = f_*(\mathcal{L})$$

sur Y est cohérent. Considérons l'homomorphisme canonique

$$f^*(\mathcal{E}) \to \mathcal{L} \quad ,$$

et supposons qu'il soit surjectif, de sorte que $\mathcal{L}$ apparaît comme un Module quotient de $f^*(\mathcal{E})$. Par définition du fibré projectif sur Y défini par $\mathcal{E}$ ([5], V, 2.2.), il en résulte alors un Y-morphisme

$$i_{\mathcal{L}} : X \to \underset{\sim}{P}(\mathcal{E})$$

appelé comme de juste canonique. On dit que $\mathcal{L}$ est <u>très ample</u> pour f , ou encore très ample relativement à Y , si l'homomorphisme $f^*(\mathcal{E}) \to \mathcal{L}$ est surjectif et le Y-morphisme correspondant $i_{\mathcal{L}}$ une <u>immersion</u>, donc nécessairement une immersion fermée (puisque X est propre sur Y et $\underset{\sim}{P}(\mathcal{E})$ séparé sur Y). On dira que

$\mathcal{L}$ est <u>ample</u> pour f si, pour tout $y \in Y$, il existe un voisinage ouvert U de y et un entier $n > 0$ tels que $\mathcal{L}^{\otimes n}|f^{-1}(U)$ soit très ample relativement à U. Le morphisme $f : X \to Y$ est dit <u>projectif</u> s'il existe sur X un Module inversible ample pour f.

THÉORÈME 2.1. - Soient $f : X \to Y$ un morphisme propre et plat, $\mathcal{L}$ un Module inversible sur X, y un point de Y tel que $\mathcal{L}/\mathfrak{m}_y \mathcal{L}$ sur X_y soit un Module très ample, et que $H^1(X_y, \mathcal{L}_y) = 0$. Alors il existe un voisinage ouvert U de y tel que $\mathcal{L}|f^{-1}(U)$ soit très ample relativement à U. De plus, $f^*(\mathcal{L}) = \mathcal{E}$ est libre au voisinage de y.

La dernière assertion est un cas particulier de 1.5. D'autre part, en vertu de 1.5, on aura

$$\mathcal{E}_y/\mathfrak{m}_y \mathcal{E}_y = H^0(X_y, \mathcal{L}/\mathfrak{m}_y \mathcal{L})$$

et comme $\mathcal{E}/\mathfrak{m}_y \mathcal{L}$ est engendré par ses sections par hypothèse, on voit que $f^*(\mathcal{E}) \to \mathcal{L}$ est surjectif aux points de X_y, donc dans un voisinage de X_y, qu'on peut supposer de la forme $f^{-1}(U)$ puisque f est propre donc fermée. On peut donc supposer, à condition de restreindre Y, que $f^*(\mathcal{E}) \to \mathcal{L}$ est surjectif, donc définit un Y-morphisme

$$i : X \to \underset{\sim}{P}(\mathcal{E}) = P \quad .$$

Le morphisme induit sur les fibres de y n'est autre que le morphisme

$$X_y \to \underset{\sim}{P}(\mathcal{E}(y)) , \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}(y) = \mathcal{E}_y/\mathfrak{m}_y \mathcal{E}_y = H^0(X_y , \mathcal{L}/\mathfrak{m}_y \mathcal{L})$$

défini par le Module très ample $\mathcal{L}/\mathfrak{m}_y \mathcal{L}$ sur X_y, donc c'est une <u>immersion</u>.

Le théorème 2.1 résulte alors du lemme élémentaire suivant :

LEMME 2.2. - Soient X, P des espaces analytiques propres sur Y, $i : X \to P$ un Y-morphisme, $y \in Y$ un point de Y tel que le morphisme $i_y : X_y \to P_y$ induit sur les fibres soit une immersion fermée. Alors il existe un voisinage ouvert U de y tel que le morphisme $X|U \to P|U$ induit par i soit une immersion fermée.

Comme P est propre sur Y, il suffit de trouver un voisinage ouvert V de P_y dans P tel que le morphisme $i^{-1}(V) \to V$ induit par i soit une immersion fermée (car on pourra alors prendre V de la forme $P|U$). Pour ceci, il suffit de montrer que pour tout $z \in P_y$, il existe un voisinage ouvert V_z de z tel que $i^{-1}(V_z) \to V_z$ soit un immersion fermée, car on prendra alors pour V la réunion des V_z, $z \in P_y$. Or l'hypothèse implique que la fibre de i en z est réduite à un point dont l'anneau local est réduit au corps k. Comme i est propre, on est ramené à prouver l'énoncé suivant (qui est d'ailleurs un cas particulier de 2.1) :

COROLLAIRE 2.3. - Soient $i : X \to P$ un morphisme propre d'espaces analytiques, z un point de P tel que $i^{-1}(z)$ soit réduit à un point x, dont l'anneau local est réduit au corps k. Alors il existe un voisinage ouvert V de z tel que le morphisme induit $i^{-1}(V) \to V$ soit une immersion fermée.

Considérons le morphisme diagonal $X \to X \times_P X$, c'est une immersion ouverte au voisinage de x, car en vertu du critère ([5], VI, 1.9) i est une immersion locale en x. D'autre part la fibre $X_z \times X_z$ de $X \times_P X$ en z est également réduite à un point, soit x'. Il existe donc un voisinage ouvert U de x et un voisinage ouvert U' de x' tels que i induise un isomorphisme de U avec U'. Comme X et $X \times_P X$ sont propres sur P, il existe un voisinage ouvert V de z dans P tel que ses images inverses dans X, resp. $X \times_P X$, soient contenues dans U, resp. U'. Remplaçant P par V, on est ramené au cas où on sait déjà que $X \to X \times_P X$ est un isomorphisme. Mais cela implique que l'application i est injective, donc (puisqu'elle est propre) un homéomorphisme de X sur une partie fermée de P. Utilisant à nouveau [5], VI, 1.9, la conclusion de 2.3 apparaît. [N. B. - 2.2 et 2.3 restent valables sans supposer que le corps de base soit $\underline{C}$.]. Par suite 2.1 est démontré.

Nous utiliserons 2.1 dans le cas particulier suivant :

COROLLAIRE 2.2. - Soit X une "courbe de genre g" au-dessus de Y (au sens de l'exposé [5], I, 1), et soit $\underline{\Omega} = \underline{\Omega}^1_{X/Y}$ le faisceau de ses 1-différentielles relatives qui est un Module inversible ([5], VII, 2.9). Alors :

a. Si $g = 0$, $\underline{\Omega}^{\otimes -n}$ est très ample relativement à Y pour tout $n \geq 1$.

b. Si $g = 1$, et si s est la section marquée de X sur Y , correspondant donc à un Idéal inversible $\mathcal{J}$ sur X , alors $\mathcal{J}^{\otimes -n}$ est très ample relativement à Y pour $n \geqslant 3$.

c. Si $g = 2$, alors $\underset{\sim}{\Omega}^{\otimes n}$ est très ample relativement à Y pour $n \geqslant 3$.

d. Si $g \geqslant 3$, alors $\underset{\sim}{\Omega}^{\otimes n}$ est très ample relativement à Y pour $n \geqslant 2$.

Utilisant le théorème de Riemann-Roch pour les courbes de genre g ordinaires, on voit en effet que dans chacun des cas envisagés, les deux conditions de 2.1 sont vérifiées.

REMARQUES 2.3. - On montre facilement que les résultats indiqués sont "les meilleurs possibles" qui soient valables sans autre restriction sur la courbe X sur Y que la donnée du genre. On notera que ces résultats impliquent que <u>si</u> $g = 1$, <u>alors</u> X <u>est nécessairement projectif sur</u> Y . C'est sous cette forme essentiellement que nous utiliserons les résultats délicats rappelés au n° 1, dans la construction des espaces de modules promise dans [5], I ; elle nous permet d'appliquer les techniques projectives, c'est-à-dire la théorie des schémas, grâce au dictionnaire algébrique-analytique fourni par le théorème de Grauert-Remmert rappelé au numéro suivant (et qui est beaucoup moins délicat à établir). Le lecteur qui répugnerait à utiliser le théorème de finitude de Grauert, pour la théorie des espaces de modules, notera que les résultats annoncés dans [5], II, peuvent se déduire indépendamment de ce théorème, à condition de se borner a priori aux courbes X de genre g au-dessus d'espaces analytiques Y , telles que X soit projective sur Y .

2.4. - On construit facilement des courbes de genre 1 sans section marquée au-dessus d'espaces analytiques compacts (par exemple sur une courbe rationnelle), qui ne soient pas projectives sur Y . Soit en effet G une courbe elliptique ordinaire à point marqué, considérée comme un groupe analytique, et considérons les fibrés principaux homogènes analytiques sur Y , de groupe G . Si V est l'espace tangent à G à l'origine et π le groupe fondamental de G , plongé dans V de la façon habituelle, on a une suite exacte canonique

$$0 \to \pi \to V \to G \to 0 \quad ,$$

d'où une suite exacte de faisceaux abéliens sur Y :

$$0 \to \mathcal{O}_Y(\pi) \to \mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_Y(G) \to 0 \qquad ,$$

d'où une suite exacte de cohomologie, qui s'écrit

$$\cdots \to H^1(Y\ ,\ \underset{\sim}{Z}) \otimes_{\underset{\sim}{Z}} \pi \to H^1(Y\ ,\ \mathcal{O}_Y) \otimes_{\underset{\sim}{C}} V \to H^1(Y\ ,\ \mathcal{O}_Y(G)) \to H^2(Y\ ,\ \underset{\sim}{Z}) \otimes_{\underset{\sim}{Z}} \pi$$
$$\to H^2(Y\ ,\ \mathcal{O}_Y) \otimes_{\underset{\sim}{C}} V$$

qui précise l'ensemble $H^1(Y\ ,\ \mathcal{O}_Y(G))$ des classes de fibrés principaux homogènes analytiques sur Y de groupe G. Si par exemple $H^1(Y\ ,\ \mathcal{O}_Y) = H^2(Y\ ,\ \mathcal{O}_Y) = 0$, (ce qui est le cas si Y est une courbe rationnelle) on trouve

$$H^1(V\ ,\ \mathcal{O}_Y(G)) \simeq H^2(Y\ ,\ \underset{\sim}{Z}) \otimes_{\underset{\sim}{Z}} \pi \qquad .$$

D'après un résultat de SERRE [7], un fibré principal homogène analytique de groupe G sur une variété projective non singulière Y ne peut être projective sur Y, donc algébrique, que si sa classe est d'ordre fini (et réciproquement d'ailleurs), ce qui permet donc de construire de tels fibrés sur la droite rationnelle y, qui ne soient pas projectifs sur Y.

3. Le théorème de comparaison de Grauert-Remmert.

THÉORÈME 3.1. - Soient Y un espace analytique, $X = \underset{\sim}{P}^r_{\underset{\sim}{Y}} = \underset{\sim}{P}(\mathcal{O}_Y^{r+1}) = \underset{\sim}{P}^r \times Y$ l'espace projectif-type de dimension relative r sur Y, $f : X \to Y$ le morphisme structural, K un compact de Y, $\mathcal{O}_Y(1)$ le Module inversible canonique sur X, $\underline{\mathcal{F}}$ un Module cohérent sur X. Pour tout entier n, soit $\mathcal{F}(n) = \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_Y(1)^{\otimes n}$. Sous ces conditions :

a. Les Modules $R^q f_*(\mathcal{F})$ sont cohérents.

b. Il existe un entier n_o tel que $n \geq n_o$ implique que l'homomorphisme canonique $f^*(f_*(\mathcal{F}(n)) \to \mathcal{F}(n)$ est surjectif aux points de $f^{-1}(K)$.

c. Il existe un entier n_c tel que $n \geq n_c$ implique $R^p f_*(\mathcal{F}(n)) = 0$ sur K pour $p > 0$.

Ce théorème, lorsque Y est l'espace analytique final, réduit à un point, est substantiellement équivalent aux théorèmes de GAGA [6], Comme dans [6], il y aurait lieu d'interpréter, ou mieux d'énoncer, le théorème 3.1 comme exprimant l'équivalence entre la "géométrie algébrique des schémas relatifs projectifs sur Y ", et la théorie des "espaces analytiques projectifs sur Y ", au sens du n° 2 ; comparer l'Introduction à l'exposé [5], V. La véritable signification de 3.1 ne peut donc apparaître qu'une fois développé le langage des schémas sur des espaces annelés quelconques, ce que nous n'avons pu faire dans le présent séminaire, faute de temps. Néanmoins, nous serons obligés pratiquement d'admettre dès les deux exposés suivants, notamment pour le théorème d'existence des espaces modulaires de Hilbert, que les théorèmes concernant les schémas projectifs sur d'autres peuvent s'appliquer aux morphismes projectifs de la géométrie analytique, sous peine de recopier laborieusement, dans le contexte de la géométrie analytique, de nombreux développements qui ne sont écrits que dans le cadre des schémas.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN (H.) et SERRE (J.-P.). - Un théorème de finitude concernant les variétés analytiques compactes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 237, 1953, p. 128-130.

[2] DIEUDONNÉ (J.) et GROTHENDIECK (A.). - Eléments de géométrie algébrique, III. - Paris, Presses universitaires de France (Institut des hautes Études scientifiques, Publications mathématiques) (à paraître).

[3] GRAUERT (Hans). - Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen. - Paris, Presses universitaires de France, 1960 (Institut des hautes Etudes scientifiques, Publications mathématiques, 5).

[4] GRAUERT (H.) et REMMERT (R.). - Faisceaux analytiques cohérents sur le produit d'un espace analytique et d'un espace projectif, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 245, 1957, p. 819-822.

[5] GROTHENDIECK (Alexander). - Techniques de construction en géométrie analytique, I-VII., Séminaire Cartan, t. 13, 1960/61, n° 7-14.

[6] SERRE (Jean-Pierre). - Géométrie algébrique et géométrie analytique, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 6, 1955-1956, p. 1-42.

[7] SERRE (Jean-Pierre). - Espaces fibrés algébriques, Séminaire Chevalley, t. 2, 1958, n° 1, 37 p.