

# L'héritage d'Alexandre Grothendieck

## **Immersion dans les archives d'un génie des mathématiques**

### Introduction

Que recèlent les archives d'Alexandre Grothendieck, admiré dans le monde entier et reconnu par ses pairs comme l'un des plus grands mathématiciens du XXe siècle ? Renferment-elles des secrets qui pourraient faire progresser la science actuelle ? La question ressurgit alors que l'Université de Montpellier, en mai dernier, a publié sur son site internet 18 000 pages remplies de formules qui retracent le cheminement mathématique de Grothendieck entre 1949 et 1991. Elles témoignent de l'effervescence d'une pensée qui, pendant cette période, a littéralement transcendé les mathématiques. Pourtant, encore aujourd'hui, cette révolution conceptuelle demeure largement ignorée du grand public – comme si le vœu de Grothendieck, qui souhaitait disparaître, avait été exaucé.

En effet, à partir de juillet 1990, Grothendieck s'apprête à s'éloigner définitivement de la civilisation qui n'a cessé de le décevoir. Or, au moment de tout quitter, il ressent le besoin de s'alléger. S'il brûle tout un pan de ses travaux, il décide néanmoins de confier des milliers de pages dédiées aux mathématiques à l'un de ses anciens élèves, Jean Malgoire. Tandis que ce dernier récupère les précieux documents, Grothendieck s'isole dans le village de Lasserre, quelque part dans l'Ariège, où il commence une vie d'ermite qui ne s'achèvera qu'avec sa mort, en 2014, à l'âge de 86 ans. Pendant ces 24 années d'ascèse, animé par un élan mystique, il écrira 65 000 pages contenant essentiellement des réflexions sur l'existence du Mal et peu de mathématiques en bonne et due forme. Ces pages demeurent inaccessibles, cachées quelque part dans Paris, car aucun consensus n'a encore été trouvé entre les héritiers et la BNF à propos de leur valeur, très difficile à estimer.

De son côté, Jean Malgoire a conservé pendant près de 20 ans les papiers que Grothendieck lui a donnés, sans que celui-ci les lui réclame... Finalement, dans la perspective de rendre ces archives publiques, Jean Malgoire décide en 2010 d'en faire don à l'Université de Montpellier, où Grothendieck a eu l'occasion d'étudier et d'enseigner. Mais cette même année (et ce n'est certainement pas un hasard), Grothendieck sort de son silence et envoie une lettre à son ancien élève et ami Luc Illusie, lui demandant de faire passer un message très clair : il s'oppose fermement à toute publication de son vivant de ses œuvres inédites. Tout change quand Grothendieck meurt en novembre 2014 : cet événement a

sans doute contribué à enclencher le processus de numérisation des archives sur internet. Quelles idées-phare de Grothendieck y trouve-t-on ? Immersion imminente dans les papiers d'un mathématicien autodidacte profondément hors du commun...

### **Traitement des archives**

Mais avant de partir pour un voyage au cœur des archives de Montpellier, il faut souligner que leur traitement ne fut pas une mince affaire. D'abord, avant même la numérisation, un énorme travail d'inventaire et de dépoussiérage (avec masque et balayette !) a dû être effectué. L'un des deux archivistes recrutés pour remettre le fonds Grothendieck en ordre, Frédéric Troilo, reconnaît qu'il s'agissait là d'un travail aussi complexe qu'inhabituel : « *C'est la première fois de ma vie que je traitais des archives dont je ne comprenais pas le contenu !* ». Et pour cause : les mathématiques qui figurent sur ces manuscrits apparaissent totalement sibyllines pour le profane. Certes, Grothendieck avait rangé ses papiers dans des chemises. Mais certaines ne comportaient pas de titre, et surtout, les pages ne se succédaient pas toujours correctement, et n'étaient la plupart du temps pas numérotées. Il a donc fallu déchiffrer l'écriture en pattes de mouche de Grothendieck pour tenter de deviner l'ordre des pages. L'écriture du mathématicien est frénétique, fulgurante, foisonnante : chez Grothendieck, écrire et penser ne sont qu'une seule et même activité. Afin de dater et de trier au mieux tous ces papiers suivant différents thèmes mathématiques, le donateur, Jean Malgoire, est venu épauler les archivistes en leur apportant son expertise. Frédéric Troilo explique que le travail de datation fut certainement le plus délicat : « *Nous avons donné des fourchettes de dates en fonction de différents indices : par exemple, Grothendieck écrivait parfois sur des versos de documents tapuscrits, comme des lettres, ce qui nous permettait d'estimer la date des manuscrits au recto* ». Et pour affiner la datation, le repérage des thèmes mathématiques abordés, ainsi que la taille et le type de papier utilisé (comme des listings des années 80) sont également entrés en ligne de compte. A l'arrivée, après six mois de travail intensif, les archives étaient enfin triées, paginées, datées et réparties dans des dossiers avec des titres précis.

S'ensuivit l'étape de numérisation, non moins fastidieuse, avec une nouvelle équipe : « *Ma collègue et moi avons passé environ quatre mois à tout numériser* » affirme Béatrice Py-Maulandi, qui a réalisé cette étape cruciale. Et il y avait urgence, car ce trésor que nous a légué Grothendieck était voué à disparaître. « *Grothendieck a écrit sur des papiers de mauvaise qualité, souvent*

*avec une encre bleue qui tend à s'effacer... donc heureusement qu'ils ont été numérisés !* » s'exclame Muriel Guedj, historienne des sciences à l'Université de Montpellier. L'heure est maintenant à l'étude de ces documents, une tâche herculéenne pour ceux qui oseront s'y atteler : « *Il faut largement plusieurs heures à un mathématicien confirmé pour comprendre une page de Grothendieck dans son intégralité !* » estime Alain Genestier, mathématicien à l'Université de Lorraine. A multiplier par 18 000 !

### **Immersion dans les archives**

Plongeons maintenant dans ces archives, comme si nous ouvrons une malle grinçante abandonnée au fond d'un vieux grenier... Au milieu de toutes ces feuilles, quelques objets surprenants attirent en premier lieu notre attention. Ici, un éventail. Là, un grand calendrier annoté. Mais surtout : la médaille Picard, un prix remis tous les six ans seulement par l'Académie des Sciences, que Grothendieck utilisait... pour ouvrir des noix. Bien qu'il ait reçu les plus belles récompenses en mathématiques, Grothendieck n'y a jamais été sensible. A tel point qu'en 1988, il refusa la médaille Crafoord dans une lettre adressée à l'Académie royale de Suède : « *En ce qui concerne la distinction accordée à mes travaux sur les fondements, je suis convaincu que le temps est la seule véritable épreuve que mes idées auront à surmonter. La fécondité se reconnaît à la progéniture, et non aux honneurs* ».

Il est certain que Grothendieck aimait plus les noix que les prix ! En effet, dans sa grande œuvre littéraire intitulée *Récoltes et Semailles* qui retrace son parcours intellectuel tout au long de sa vie, il prend l'exemple d'une noix pour qualifier sa démarche scientifique. Certains, pour ouvrir la noix (comme pour résoudre un problème mathématique) utilisent sans réfléchir une méthode brusque : celle du marteau. Lui préfère laisser la noix reposer dans l'eau : « *La coque s'assouplit au fil des semaines et des mois – quand le temps est mûr, une pression de la main suffit, la coque s'ouvre !* ». Cette métaphore est emblématique de l'état d'esprit de Grothendieck, qui voyait chaque problème comme un cas particulier d'un énoncé plus vaste : « *Cet énoncé plus général, précisément à cause de sa généralité, se prête à des réductions élémentaires qui conduisent, sans effort et comme par miracle, à la solution du problème initial* » complète Luc Illusie. Pour Grothendieck, il ne faut donc pas tant chercher à résoudre un problème qu'à le laisser mijoter dans son esprit pour s'ouvrir à un plus large domaine de

réflexion. Bref, Grothendieck était profondément épris de généralité. « *Il était incapable d'envisager un problème partiel ou un exemple, il voulait toujours trouver la structure qui explique tout, comme un détective qui cherche à donner un sens à toutes les pièces d'un dossier* » précise Leïla Schneps, mathématicienne membre du Grothendieck Circle, un site internet consacré à ses travaux. Si cette volonté d'universalité rend ses mathématiques très abstraites, c'est certainement aussi grâce à elle qu'il a inventé des concepts véritablement révolutionnaires, dont trois en particulier : les schémas, les topos, et les motifs.

## **Les schémas**

Prenons d'abord ce gros dossier qui contient 425 pages de notes préparatoires et des compléments aux EGA, les *Eléments de Géométrie Algébrique*, en 7 volumes. C'est dans le premier d'entre eux que Grothendieck expose la notion fondamentale des *schémas*. Celle-ci traduit l'idée que les figures géométriques importent moins que les équations qui les définissent. En fait, à partir d'un même ensemble d'équations, on peut définir une multitude de figures géométriques, ce qui leur donne un caractère très général (voir encadré « Schémas »). Les figures géométriques s'effacent ainsi derrière leurs équations, et on peut même dire qu'avec Grothendieck, les équations deviennent elles-mêmes un objet géométrique par excellence. « *Les schémas sont notre langage quotidien, à la base de toute la géométrie actuelle. Aujourd'hui, ils sont absolument incontournables !* » assure le mathématicien Pierre Cartier, ancien collègue de Grothendieck. « *En fait, les schémas existaient déjà avant Grothendieck, mais lui a eu le culot de supprimer toutes les restrictions pour leur donner un très large champ d'applications, ce que personne n'avait osé faire* » ajoute-t-il. D'un seul coup, tout un ensemble de recherches purement algébriques ont acquis un contenu et une intuition géométrique. L'avènement des schémas constitue donc un premier saut vers l'universalité. Le suivant s'annonce encore plus radical...

## **Les topos**

Dans les archives se trouve également un dossier de 65 pages qui contient des notes sur les SGA, les Séminaires de Géométrie Algébrique, présentés ou animés par Grothendieck. Ceux-ci se tenaient tous les mardis en début d'après-midi à l'IHES (l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques), fondé en 1958 pour le développement de la nouvelle géométrie, donc en quelque sorte... pour

Grothendieck. Le mathématicien Michel Raynaud se souvient des séminaires dans le pavillon de l'Institut (à Bures-sur-Yvette), lorsqu'il était étudiant : « *Certes les exposés de Grothendieck déconcertaient par leur généralité et leur abstraction. Mais on se rendait compte ensuite qu'il avait développé les bonnes notions, dans leur cadre naturel* ». S'ensuivait toujours le traditionnel thé de quatre heures (rituel qui perdure encore aujourd'hui !), moment informel privilégié pour partager ses dernières réflexions mathématiques. C'est lors de ces Séminaires de Géométrie Algébrique, entre 1960 et 1969, que Grothendieck va progressivement développer une notion qu'il nommera par la suite : les *topos* (voir encadré « topos »). Grothendieck considère qu'il a forgé là l'idée la plus féconde de son œuvre mathématique, et n'en est pas peu fier : « *Je ne vois personne d'autre sur la scène mathématique, au cours des trois dernières décennies écoulées, qui aurait pu avoir cette naïveté [...] d'introduire l'idée si enfantine des topos* » écrit-il dans *Récoltes et Semailles*. Les topos sont très flexibles et très vastes, ce qui leur confère des vertus unificatrices : « *Le concept de topos est à la fois d'une généralité, d'une profondeur et d'une efficacité calculatoire impressionnantes : il permet de faire des ponts entre des domaines mathématiques a priori sans lien apparent* » souligne Olivia Caramello, spécialiste des topos à l'Université de l'Insubria à Côme. La puissance des topos a notamment permis à Grothendieck de s'attaquer dans les années 60 à une série d'importantes conjectures, dites conjectures de Weil. Celles-ci postulent l'existence d'un lien entre le nombre de solutions d'un certain type d'équations et les propriétés géométriques des variétés algébriques qui leur sont associées, établissant ainsi une passerelle entre algèbre et géométrie. Grothendieck parviendra à démontrer ces conjectures en partie, et son élève Pierre Deligne apportera la touche finale en 1974. Preuve que l'invention des topos était un saut conceptuel audacieux vers une certaine unité des mathématiques... mais Grothendieck n'en resta pas là.

### **Les motifs**

Fouillons encore plus avant dans les archives... Voilà un dossier de 1041 pages avec un titre pour le moins intrigant : « Théorie des motifs ». Nous touchons là à un sujet qui lui tenait particulièrement à cœur. Grothendieck n'a jamais rien publié à propos des motifs. Pourtant, ceux-ci représentent son ambition la plus élevée, son rêve demeuré inaccessible, l'ultime étape vers l'abstraction qu'il ne parviendra pas à franchir – une des raisons, peut-être, qui le conduisirent à quitter définitivement la scène mathématique, en 1990.

Grothendieck attachait un soin particulier à nommer les concepts qu'il inventait, et le mot « motif » en est un bel exemple : le motif est à la fois ce qui motive, au sens d'un objectif à atteindre, mais c'est aussi un composé mathématique élémentaire. Prenons une variété algébrique (voir Jargon), qui correspond à une certaine forme géométrique. A cette variété algébrique, on peut associer différents paramètres, comme par exemple le nombre de trous qu'elle comporte. C'est très simple, remplacez les variétés algébriques par des pâtisseries : le muffin n'a pas de trou, le donut en a 1, le bretzel en a 3... On peut aussi s'intéresser aux « lacets » que l'on peut dessiner sur notre forme géométrique, qui partent d'un point et qui reviennent au même point en contournant les éventuels trous un certain nombre de fois. L'étude du nombre de trous, des lacets, et plus généralement de quantités invariantes, traduit de précieuses informations sur la nature de la variété algébrique, donc en particulier sur l'ensemble des équations qui la définit. Une théorie permettant de mesurer des quantités invariantes sur une variété algébrique s'appelle une cohomologie. Or, pour une même variété algébrique, on peut développer une multitude – en fait, une infinité – de théories cohomologiques différentes, comme (en vrac) : la cohomologie classique (avec les trous et les lacets), la cohomologie de De Rham, la cohomologie l-adique, la cohomologie p-adique... Toutes ces théories renferment chacune des informations spécifiques sur la variété algébrique. Or, Grothendieck remarque que, même différentes les unes des autres, elles présentent de fortes similitudes. Cela va le conduire à supposer l'existence d'une structure mathématique commune fondamentale, qui contient d'emblée *toutes* les informations sur la variété algébrique, et qu'il appelle : un motif. Grothendieck prend cette métaphore musicale dans *Récoltes et Semailles* : « *Ces différentes théories cohomologiques seraient comme autant de développements thématiques différents, chacun dans le "tempo", dans la "clef" et dans le "mode" ("majeur" ou "mineur") qui lui est propre, d'un même "motif de base" ».*

Pour exprimer ce qu'est un motif, on peut proposer une analogie avec la chimie : à partir de composants fondamentaux que sont les atomes, qui conservent en permanence leur identité et que l'on peut classifier, on peut reconstruire toute la panoplie des molécules. Les atomes sont les motifs élémentaires, dits « motifs purs », et les molécules sont des motifs plus gros, dits « motifs mixtes », qui sont associés à des variétés algébriques et renferment des informations sur elles. L'ambition revient alors à trouver des règles génératrices qui permettent, à partir de quelques motifs purs insécables, de reconstituer l'ensemble de tous les motifs possibles. Pour décrire un motif (une molécule), il suffit alors de connaître ses

éléments simples (les atomes) et la manière dont ils se recollent (les liaisons chimiques entre les atomes). Ainsi, comme en chimie ou dans un vaste jeu de LEGO, Grothendieck imagine qu'il est possible de casser des objets géométriques (les motifs mixtes) en morceaux (les motifs purs), qu'on peut ensuite réarranger pour former d'autres objets géométriques (d'autres motifs). « *Grothendieck voyait les motifs purs comme des âmes qui émigrent d'un corps vers un autre, et qui représentent une certaine permanence* » précise Pierre Cartier. Grothendieck était en particulier attiré – donc certainement influencé – par le bouddhisme. Il avoue d'ailleurs dans *Récoltes et Semailles* que ses trois grandes passions dans la vie furent les mathématiques, les femmes, et la méditation. Il a même hébergé chez lui un moine bouddhiste japonais dont le titre de séjour avait expiré, ce qui lui valut un procès (où il se lança seul dans un vibrant plaidoyer) et six mois de prison avec sursis !

Toujours est-il qu'aujourd'hui, même s'ils ont pu être définis dans des cas particuliers, les motifs demeurent à la fois très mystérieux et omniprésents. Ils apparaissent partout, dans tous les travaux actuels de géométrie algébrique et de théorie des nombres, avec de potentielles applications en physique théorique (voir encadré « Les motifs en physique »).

### **Avis des mathématiciens sur les archives**

Les archives de Grothendieck renferment-elles des trésors inexploités ? Personne n'ose vraiment parier... mais soyons honnêtes : en majeure partie, les spécialistes de Grothendieck s'accordent à dire que, probablement, ni les archives de Montpellier ni celles de Lasserre ne contiennent des idées purement nouvelles susceptibles de bouleverser la recherche actuelle en mathématiques. Ainsi Pierre Deligne, l'ancien élève de Grothendieck ayant achevé la résolution des conjectures de Weil, ne se fait pas d'illusion : « *Il me semble que ces archives donnent lieu à un engouement qui risque d'être déçu* ». Pierre Cartier ne croit pas non plus au miracle : « *Ces archives ont un intérêt historique indéniable, mais d'un point de vue mathématique, l'essentiel a déjà été diffusé et exploité* ». Il faut dire qu'une grande partie des archives de Montpellier était déjà connue, et que ceux qui ont pu plonger dans celles de Lasserre ont affirmé qu'il n'y aurait pas grand chose à en retirer. Toutefois, d'autres mathématiciens gardent l'espoir d'y dénicher quelques pépites éparses : « *On ne trouvera probablement pas d'idée révolutionnaire dans ces archives, mais il est tout à fait possible qu'elles recèlent des résultats ou des compléments intéressants à des notions connues* » tempère Luc Illusie. Ce dernier a été en mesure, en mars dernier, de fournir à un mathématicien chinois une démonstration inédite d'un

problème, présente dans une note que Grothendieck lui avait confiée, et qui fait maintenant partie des archives de l'IHES. Comme quoi, les archives de Grothendieck peuvent encore réserver des surprises ! Bertrand Toen, chercheur à l'Institut de Mathématiques de Toulouse, ne dira pas le contraire : lui travaille sur le thème dit des « catégories supérieures », fondé sur une réflexion à propos de la notion d'égalité, qu'il faut repenser et élargir. « *Vers 2010, on a retrouvé des notes de Grothendieck contenant une construction précise des catégories supérieures... personne ne pouvait imaginer l'existence d'un tel passage* » s'étonne Bertrand Toen.

Anecdotes à part, il reste très difficile de s'avancer sur le contenu des archives et sur leur intérêt mathématique potentiel. Comme le dit Alain Genestier : « *Il faut laisser de l'incertitude. On n'a pas encore tout compris de ces archives, et il y a peut-être dedans des choses dont on comprendra l'importance plus tard* ». Quoiqu'il en soit, il est certain que les principales idées développées par Grothendieck dans ces documents ont bel et bien transformé le visage des mathématiques (du moins celui de la géométrie algébrique), et jouent toujours aujourd'hui un rôle essentiel. A l'image d'Olivia Caramello, elle aussi en quête d'universalité : « *Je cherche à développer le potentiel des topos comme "ponts" entre divers domaines mathématiques, en étudiant en particulier les relations entre différentes théories cohomologiques* ». Michel Raynaud se souvient avoir ramené Grothendieck en voiture à son domicile de Bures-sur-Yvette, dans les années 60, et que ce dernier lui a déclaré, avec sa voix saccadée teintée d'un léger accent allemand : « *Je réfléchis à des choses qui occuperont encore les mathématiciens dans 50 ans !* ». Il ne croyait pas si bien dire ! Car effectivement, 50 ans plus tard, les mathématiques de Grothendieck mûrissent, s'installent durablement, et inspirent bon nombre de mathématiciens tant par leur efficacité que par leur esthétique. A tel point qu'il n'est certainement pas exagéré de dire que Grothendieck a été aux mathématiques ce qu'Einstein a été à la physique. La comparaison n'est pas fortuite : si Einstein a profondément changé notre vision de l'espace en physique en l'associant irrémédiablement au temps, Grothendieck a torpillé la notion d'espace en mathématiques tout en refondant la géométrie sur des bases largement nouvelles. « *Avec en toile de fond l'idée que tout est relatif, au sens où tout est dans la relation : chez Grothendieck, les objets mathématiques importent moins que les liens qui peuvent exister entre eux* » fait remarquer Pierre Lochak, chercheur en mathématiques au CNRS. Un véritable changement de point de vue dans les mathématiques du XXe siècle, jusqu'alors essentiellement centrées sur les notions d'ensemble et d'objet (depuis l'avènement de la Théorie des Ensembles



du mathématicien allemand Georg Cantor, à la fin du XIXe siècle). Mais, à l'image de son isolement dans les 24 dernières années de sa vie, Grothendieck demeure injustement méconnu. La parution des archives de Montpellier sur Internet et le mystère qui émane des papiers écrits pendant sa retraite à Lasserre contribueront peut-être à rendre justice à son œuvre colossale. En tous cas, l'intérêt que suscitent ces notes fantasmagiques est la preuve que, telle la Statue du Commandeur, l'intimidante figure de Grothendieck, aussi géniale qu'écrasante, continue de planer sur les mathématiques...

**Jargon : variété algébrique**

C'est un ensemble d'équations qui définissent une forme géométrique. Le meilleur synonyme est le mot « espace », même s'il est très générique.

## **Biographie**

1928

Naissance à Berlin.

1934

Abandonné par sa mère, Grothendieck est placé en famille d'accueil.

1940

Retrouve sa mère dans le camp de Rieucros, en France, où ils sont tous deux internés. Il peut néanmoins aller au collège, et découvre les mathématiques.

1942

Le père de Grothendieck, anarchiste juif d'origine ukrainienne, est déporté à Auschwitz.

1945

Part étudier à Montpellier. Fasciné par les notions d'espace et de volume, il retrouve à lui tout seul la théorie de la mesure élaborée par Lebesgue au début du XXe siècle.

1948

Monte à Paris et retrouve d'éminents mathématiciens comme Henri Cartan, Jean Dieudonné et Laurent Schwartz. En moins d'un an, il résout l'équivalent de 14 sujets de thèse.

1958 – 1970

Révolutionne la géométrie algébrique à l'IHES, l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques, et fait preuve d'une puissance de travail phénoménale.

1966

Décroche la médaille Fields, mais bien qu'il accepte cette haute distinction internationale, il ne va pas à Moscou pour la recevoir.

1967

Se rend à Hanoï en pleine guerre du Vietnam pour donner des cours de géométrie algébrique, à côté des bombes.

1968

Deviens écologiste radical et antimilitariste ; il délaisse progressivement les mathématiques.

1973 – 1988

Reviens à Montpellier pour y enseigner à l'Université.

1985

Écrit *Récoltes et Semailles*, un texte de près de 1000 pages qui retrace sa vie intellectuelle.

1988

Obtient le prestigieux prix Crafoord, mais il le refuse.

1991 – 2014

Se retire dans le village de Lasserre, dans l'Ariège, où il vit en ermite pendant 23 ans.

2014

Grothendieck meurt à l'hôpital de Saint-Girons, laissant derrière lui des dizaines de milliers de pages d'archives encore à déchiffrer.

## SCHEMAS

Commençons par distinguer deux types de géométrie : la géométrie algébrique, et la géométrie arithmétique. La géométrie algébrique consiste, depuis Descartes, à étudier les configurations géométriques qu'on peut décrire par l'algèbre, c'est-à-dire par des équations. Par exemple,  $x^2 + y^2 = 25$  est une équation qui représente un cercle de rayon 5, centré sur l'origine du repère dans lequel on se place. Parallèlement, la géométrie arithmétique a vocation à résoudre des problèmes... d'arithmétique, c'est-à-dire des problèmes qui ont trait aux nombres entiers. Dans cette perspective, on peut chercher à résoudre l'équation  $x^2 + y^2 = 25$  pour  $x$  et  $y$  entiers, ce qui donne par exemple  $x = 3$  et  $y = 4$ . A priori, tracer le cercle défini par l'équation  $x^2 + y^2 = 25$ , et résoudre cette même équation avec des nombres entiers, sont deux choses différentes. Le génie de Grothendieck est d'avoir réussi la fusion de la géométrie algébrique et de la géométrie arithmétique, avec en toile de fond l'idée qu'on peut résoudre des problèmes d'arithmétique par des méthodes algébriques : il réconcilie ainsi le discontinu (en fait, le « discret ») qui caractérise les nombres entiers, et le continu, à l'image du cercle. Et cette fusion se matérialise dans cet objet mathématique qu'est le schéma.

Pour mieux comprendre de quoi il s'agit, reprenons le cercle de rayon 5 centré sur l'origine du repère considéré. L'équation qui le définit est  $x^2 + y^2 = 25$ . Les solutions de cette équation sont tous les couples  $(x,y)$  de nombres réels qui, précisément, correspondent aux points du cercle. On pourrait donc dire qu'il y a d'un côté l'équation  $x^2 + y^2 = 25$ , et de l'autre ses solutions, à savoir les points du cercle, qui est l'objet géométrique.

Grothendieck renverse tout et déclare que l'objet géométrique n'est pas le cercle, donc les solutions de l'équation, mais l'équation elle-même, avec toutes les transformations qu'on peut faire dessus ! C'est comme si on s'intéressait moins à un monument qu'au dessin d'architecte qui a permis de le construire. Le système d'équations *devient* l'objet géométrique. Pourquoi ? Parce qu'une seule équation est en fait beaucoup plus générale que le cercle, et permet de définir une multitude d'objets géométriques, en jouant à la fois sur ses transformations et sur l'ensemble dans lequel on cherche ses solutions (les entiers naturels, les nombres réels, les nombres complexes...) (**voir dessins ?**). C'est cette idée que cristallise la notion de schéma, qui apparaît comme une généralisation de celle, fondamentale, de variété algébrique (voir sans sourciller l'encadré Jargon). Grothendieck en donne cette image dans *Récoltes et Semailles* : « Le "schéma" est cet éventail magique qui [...] fournit un efficace "principe de passage" pour

*relier entre elles des “variétés” ressortissant de géométries qui jusque là étaient apparues comme plus ou moins isolées ».* Le schéma apparaît donc comme un générateur de variétés algébriques, avec la possibilité de les déformer.

## TOPOS

### 1) Notion de site

Imaginez que nous nous trouvions à bord de la Station Spatiale Internationale et que nous prenions la Terre en photo, sous différents angles, de telle sorte qu'aucune portion de la surface terrestre ne nous ait échappée. On peut alors coller les photos les unes aux autres (certaines pouvant se chevaucher) afin de reconstituer la Terre. Cette idée de recollement de photos – en maths, on parlerait de cartes – pour se localiser sur un espace (en l'occurrence sur Terre) n'est pas nouvelle, mais elle est assez restrictive. Grothendieck va considérablement élargir la notion de localisation en comprenant qu'on peut aussi se localiser sur un espace à partir d'un autre espace à *une transformation près*.

En voici un exemple. Quand vous jouez à Pac Man, vous avez l'impression que votre petit Pac Man jaune se déplace dans le plan de votre écran... alors qu'en fait, il se déplace sur un donut ! Et oui : lorsque Pac Man arrive à l'extrémité gauche de votre écran, il revient par l'extrémité droite ; et quand il sort par le haut de l'écran, il revient par le bas. Donc, pour reconstituer l'espace dans lequel évolue Pac Man, il faudrait pouvoir coller le côté gauche de l'écran avec le côté droit, puis le côté haut avec le côté bas, ce qui donne... un tore (un donut). Cette transformation du plan constitue une manière de se localiser sur le tore. En effet, si vous dites : Pac Man se trouve à tel endroit de mon écran, cela revient à localiser Pac Man sur le tore, moyennant la *transformation* de l'écran en tore.

Grothendieck, étant donné un espace de base (ici, le tore), considère alors toutes les façons de se localiser sur cet espace. Dans l'exemple précédent, cela correspondrait à tous les espaces (comme un écran plat) à partir desquels on peut reconstruire le tore après des transformations. L'ensemble contenant tous ces espaces ainsi que le tore lui-même est ce que Grothendieck appelle un *site*. Mais il n'était pas pleinement satisfait de cette notion, selon lui pas assez souple. Il est donc allé plus loin dans l'abstraction...

### Notion de faisceau (due à Leray, 1945)

Un faisceau est, en quelque sorte, une fonction qui relie des morceaux d'un espace aux éléments d'un ensemble quelconque. Aurélien Sagnier, chercheur en mathématique à l'Université Paris Diderot, se représente les faisceaux avec l'allégorie de la caverne de Platon. Dans cette allégorie ancestrale, les hommes

sont enfermés dans une caverne, et ne peuvent observer que leurs propres ombres et celles d'autres objets sur les parois. Par analogie, on peut associer la caverne à un ensemble quelconque, et les objets dans la caverne aux espaces qui nous intéressent (en l'occurrence ceux du site, précédemment défini). Alors, de même que les rayons du soleil permettent de regarder l'image (l'ombre) des objets sur la caverne, les faisceaux mettent en relation des morceaux du site – donc un bout du tore, ou un bout de l'écran – avec les objets de l'ensemble quelconque choisi.

### **3) Notion de topos**

Etant donné des objets dans la caverne (le site) et les rayons du soleil (les faisceaux), à quoi s'intéresse Grothendieck ? « *Il s'intéresse à toutes les ombres possibles des objets dans toutes les cavernes possibles ! Et le topos, c'est l'ensemble de tous les rayons lumineux qui éclairent les objets dans toutes les différentes cavernes, donc... c'est le Soleil !* » imagine Aurélien Sagnier. Autrement dit, un topos est un ensemble qui regroupe toutes les façons d'associer des morceaux du site (c'est-à-dire, des bouts du tore, ou des bouts de l'écran) avec des ensembles quelconques. Le topos ainsi constitué est plus abstrait que le site, mais beaucoup plus flexible, et joue ainsi le rôle d'interface entre des domaines très différents des mathématiques tels que : les géométries algébrique et arithmétique, la théorie des groupes, la logique... Ce que Grothendieck exprime lui-même dans Récoltes et Semailles : « *Cette idée englobe [...] aussi bien les traditionnels espaces incarnant le monde de la grandeur continue [...] que d'innombrables autres types de structures, qui jusque là avaient semblé rivées irrémédiablement au "monde arithmétique" des agrégats "discontinus" ou "discrets"* ». Comparer un topos au Soleil de l'allégorie des cavernes n'aurait certainement pas déplu à Grothendieck, qui était éminemment platonicien : pour lui, la réalité mathématique existe indépendamment de nous. « *La structure d'une chose n'est nullement une chose que nous puissions "inventer". Nous pouvons seulement la mettre à jour patiemment, humblement en faire connaissance, la "découvrir"* » écrit-il encore dans Récoltes et Semailles. Chez Platon, si un homme parvient à s'échapper et à se tourner vers l'entrée de la caverne, il sera d'abord ébloui par la lumière du jour, mais à force de s'y accoutumer, il pourra voir le monde tel qu'il est réellement. Alors, cet homme dans la caverne qui se défait de ses chaînes après moult efforts et va observer le Soleil directement, n'est-ce pas Grothendieck lui-même ?





## LES MOTIFS EN PHYSIQUE

Le langage des motifs n'est pas limité aux mathématiques. « *On est en train de s'apercevoir que les motifs peuvent servir en physique... c'est une idée qui a émergé lors de discussions entre physiciens et mathématiciens à l'IHES, au moment du thé* » se rappelle Francis Brown, professeur à l'Université d'Oxford qui a directement participé à cette recherche. Les désintégrations de particules, qui ont lieu par exemple dans le grand collisionneur du CERN, sont étudiées par les physiciens théoriciens à l'aide de diagrammes (dits de Feynman), qui permettent d'explicitier visuellement toutes les désintégrations possibles d'une particule donnée. Par exemple le boson de Higgs, qui a une durée de vie très courte, peut se désintégrer de différentes façons : en deux photons, en deux quarks b, en deux particules taus, etc. Etant donné une désintégration du boson de Higgs, chacun de ces canaux de désintégration a une certaine probabilité d'advenir, que l'on calcule grâce à des intégrales (dites de Feynman), souvent d'une grande complexité. De sorte que les physiciens sont à la recherche de nouvelles méthodes pour les calculer... « *Et c'est là que le miracle intervient : nous pensons que derrière ces intégrales se cachent des motifs, qui permettraient de les calculer de façon beaucoup plus efficace, donc beaucoup plus rapide !* » s'enthousiasme Francis Brown. Avec la théorie des motifs en toile de fond, les probabilités de chaque désintégration de particule n'apparaissent plus comme de simples nombres, mais comme partie intégrante d'une structure qui les relie entre elles. « *Ces probabilités se parlent de façon très subtile, et aucun physicien n'aurait pu s'en apercevoir. Il a fallu que Grothendieck passe par là !* » poursuit le chercheur. Mais de quelle structure parle-t-on ? Il s'agit en fait de ce que Pierre Cartier a nommé le « groupe de Galois cosmique ». En physique, les groupes sont un outil extrêmement puissant notamment utilisés pour décrire l'interaction forte, l'interaction faible, et l'interaction électromagnétique. Le groupe de Galois cosmique, lui, agirait sur les supposés motifs associés aux intégrales de Feynman, et ferait ainsi apparaître un nouveau type de symétrie entre les probabilités de différentes désintégrations de particules, parfois a priori sans lien les unes avec les autres. Le sens physique de cette symétrie n'est pas élucidé, et définir les motifs en physique demeure délicat. En tous cas Grothendieck, qui n'appréciait guère la physique et toutes ses applications militaires (dont bien sûr la bombe atomique), n'aurait certainement pas aimé voir ses motifs s'insinuer en physique ! Pourtant – ironie du sort – il est bien possible que les recherches autour des motifs mettent à terme en lumière de nouvelles structures en physique avec une redoutable

efficacité. Suggérant une fois de plus que les mathématiques, même les plus abstraites, sont inexorablement liées au réel...