

UNE THÉORIE GÉNÉRALE DES ESPACES FIBRÉS
À STRUCTURE DE FAISCEAUX

ALEXANDER GROTHENDIECK

INTRODUCTION. Quand on essaie d'établir dans un formalisme algébrique général les différentes notions d'espace fibré : espace fibré général (sans structure de groupes, et qui ne soit peut-être même pas localement trivial) ; ou faisceau de fibres avec structure d'un groupe topologique G comme exposé dans le livre de Steenrod (La topologie des faisceaux de fibres, Princeton University Press) ; ou les variantes "différentiables" et "analytiques" (réelles ou complexes) de ces notions ; ou les notions d'espaces algébriques fibrés (sur un corps k), on est amené de façon naturelle à la notion d'espace fibré avec une structure de faisceau G . Ce point de vue est aussi suggéré a priori par la possibilité, maintenant classique, d'interpréter les classes (par exemple "topologiques") de faisceaux de fibres sur un espace X , avec structure de groupe commutatif G , comme les éléments du premier groupe de cohomologie de X à coefficients dans le faisceau G des germes des fonctions continues de X dans G ; le mot "continu" étant remplacé par "analytique" respectivement "régulier" si G est supposé être un groupe analytique respectivement algébrique (l'espace X étant bien sûr selon le cas une variété analytique ou algébrique). L'utilisation des méthodes cohomologiques dans cette relation s'est avérée assez utile, et il est devenu naturel, au moins en termes de notations, même quand G est non abélien, de noter $H^1(X, G)$ l'ensemble des classes d'espaces fibrés sur X à structure de faisceau G , G étant comme ci-dessus un faisceau de germes de fonctions (continues, ou différentiables, ou analytiques, ou algébriques suivant le cas) de X dans G . Ici, nous développons systématiquement la notion d'espace fibré à structure de faisceaux G , où G est n'importe quel faisceau de groupes (non nécessairement abéliens), et de premier ensemble de cohomologie $H^1(X, G)$ de X à coefficients dans G .

Les quatre premiers chapitres contiennent simplement les premières définitions concernant les espaces fibrés généraux, les faisceaux, les espaces fibrés avec loi de composition (incluant les faisceaux de groupes) et les espaces fibrés avec structure de faisceaux. Les aspects fonctoriels des notions traitées ont été soulignés partout, et comme il semblerait maintenant, auraient dû être soulignés davantage encore. Comme les preuves de la plupart des faits affirmés se réduisent bien sûr à des vérifications évidentes, elles sont seulement esquissées ou même omises, le point important étant simplement l'ordre cohérent de l'exposition des faits principaux. Dans le dernier chapitre, nous définissons l'ensemble de cohomologie $H^1(X, G)$ de X avec coefficients dans le faisceau des groupes G , de telle manière que le théorème de classification attendu pour les espaces fibrés à structure de faisceau G soit valide. Nous procédons alors à une étude minu-

Cours donné à l'Université du Kansas, à Lawrence, aux Etats-Unis (NSF-G 1126, Projet de recherche sur la géométrie des espaces de fonctions, Rapport n° 4, première édition août 1955, seconde édition Mai 1958).

tieuse de la séquence de cohomologie exacte associée à une séquence exacte de faisceaux $e \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow e$. Ceci est la partie principale, et en fait, l'origine de cet article. Ici G est n'importe quel faisceau de groupes, F un sous-faisceau de groupes, $H = G/F$, et selon plusieurs hypothèses supplémentaires sur F (telles que F normal, ou F normal abélien, ou F dans le centre), nous obtenons une séquence de cohomologie exacte allant de $H^0(X, F)$ (le groupe des sections de F) à $H^1(X, G)$ respectivement $H^1(X, H)$ respectivement $H^2(X, H)$, avec plus ou moins de structures additionnelles impliquées.

Le formalisme ainsi développé est assez suggestif, et comme il semble utile, en particulier pour traiter le problème de la classification des faisceaux de fibres à structure de groupe G dont nous considérons un sous-groupe F , ou le problème de comparer disons les classifications analytique et topologique pour un groupe de structure analytique donné G . Pourtant, pour qu'un tel exposé soit de taille raisonnable, on n'a pas donné d'exemples. Quelques faits complémentaires, exemples et applications, pour les notions développées seront donnés dans le futur. Ce rapport a été écrit principalement pour servir de future référence à l'auteur ; on espère qu'il servira ce même but, ou bien qu'il sera une introduction au sujet, pour les autres personnes.

Bien sûr, comme ce rapport est une adaptation heureusement évidente de notions bien connues, aucune difficulté réelle n'a à être surmontée et on ne revendique aucune originalité en quoi que ce soit. De plus, au moment de donner ce rapport pour reproduction, j'ai entendu que des résultats analogues à ceux du chapitre 5 étaient connus de M. Frenkel, qui ne les a pas publiés jusque-là. L'auteur espère seulement que ce rapport sera plus plaisant à lire qu'il n'a été à écrire, et est convaincu qu'une exposition de cette sorte avait à être écrite, quelle qu'elle soit.

Remarque (ajoutée pour la seconde édition). Il s'est avéré que le formalisme développé dans ce rapport, et spécifiquement les résultats du Chapitre V, sont valides (et utiles) également dans d'autres situations et non seulement pour les faisceaux sur un espace donné X . Une généralisation par exemple est obtenue en supposant qu'un groupe fixé Π est donné qui agit sur X comme un groupe d'homéomorphismes, et que nous pouvons restreindre notre attention à la catégorie d'espaces fibrés sur X (et spécialement sur les faisceaux) sur lesquels Π opère d'une manière compatible avec ses opérations sur la base X (voir par exemple A. Grothendieck, *Sur le mémoire de Weil ; Généralisation des fonctions abéliennes*, Séminaire Bourbaki, Décembre 1956). Quand X est réduit à un point, on obtient (plutôt que des faisceaux) des ensembles, des groupes, des espaces homogènes, etc., admettant un groupe fixé Π d'opérateurs, ce qui amène à la théorie de la cohomologie (commutative et non-commutative) du groupe Π . On peut aussi remplacer Π par un groupe de Lie fixé (opérant sur des variétés différentiables, sur des groupes de Lie, et sur des espaces de Lie homogènes). Ou bien X, Π sont remplacés par un corps de base fixé k , et on considère les espaces algébriques, les espaces homogènes définis sur k , ce qui amène à une sorte de théorie de la cohomologie de k . Tout cela suggère qu'il devrait exister une théorie complète de la cohomologie non-commutative dans les

catégories adéquates, une exposition de ceci manquant encore à ce jour (pour la théorie “commutative” de la cohomologie, voir A. Grothendieck, sur quelques points d’Algèbre Homologique, Tohoku Math. Journal, 1958).

1 Espaces fibrés généraux

A moins que cela ne soit explicitement spécifié, aucun des espaces que l’on rencontrera dans ce rapport ne doit être supposé séparé.

1.1 Notion d’espace fibré.

Définition 1.1.1. Un espace fibré sur un espace X est un triplet (X, E, p) de l’espace X , d’un espace E et d’une fonction continue p de E dans X .

Il n’est pas nécessaire que p soit surjective, encore moins qu’elle soit ouverte, et si p est surjective, il n’est pas nécessaire que la topologie de X soit la topologie quotient de E par la fonction p . Pour abréger, l’espace fibré (X, E, p) sera souvent noté seulement E , étant compris que E est doté de la structure complémentaire consistant en une fonction continue p de E dans l’espace X . X est appelé l’espace base de l’espace fibré, p la projection, et pour tout $x \in X$, le sous-espace $p^{-1}(x)$ de E (qui est fermé si $\{x\}$ est fermé) est la fibre de x (dans E).

Etant donnés deux espaces fibrés (X, E, p) et (X', E', p') , un homomorphisme du premier dans le second et deux fonctions continues $f : X \rightarrow X'$ et $g : E \rightarrow E'$, telles que $p'g = fp$, i.e, la commutativité du diagramme ci-dessous est vérifiée

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & E' \\ \downarrow p & & \downarrow p' \\ X & \xrightarrow{f} & X' \end{array}$$

Alors g envoie les fibres sur les fibres (mais n’est pas nécessairement surjective !) ; de plus, si p est surjective, alors f est uniquement déterminée par g . L’application continue f de X dans X' étant donnée, g sera aussi appelée un f -homomorphisme de E dans E' . Si, de plus, E'' est un espace fibré sur X'' , f' une application continue $X' \rightarrow X''$ et $g' : E' \rightarrow E''$ un f' -homomorphisme, alors $g'g$ est un $f'f$ -homomorphisme. Si f est l’application surjective identité de X dans X , nous disons alors aussi X -homomorphisme plutôt que f -homomorphisme. Quand nous parlerons d’homomorphismes d’espaces fibrés sur X , sans plus de commentaire, nous voudrions toujours dire X -homomorphismes.

La notion d’isomorphisme surjectif d’un espace fibré (X, E, p) dans un espace fibré (X', E', p') est claire : c’est un homomorphisme (f, g) du premier dans le second, tel que f et g sont des homéomorphismes surjectifs.

1.2 Image inverse d'un espace fibré, homomorphismes inverses.

Soit (X, E, p) un espace fibré sur l'espace X , et soit f une application continue de l'espace X' dans X . Alors l'image inverse de l'espace fibré E par f est un espace fibré E' sur X' . E' est défini comme le sous-espace de $X' \times E$ des points (x', y) tels que $fx' = py$, la projection p' de E' dans la base X' étant donnée par $p'(x', y) = x'$. La fonction $g(x', y) = y$ de E' dans E est alors un f -homomorphisme, induisant pour chaque $x' \in X'$ un homéomorphisme surjectif de la fibre de E' sur x' dans la fibre de E sur fx' .

Supposons maintenant, de plus, que soit donnée une fonction continue $f' : X'' \rightarrow X'$ d'un espace X'' dans X' . Alors il y a un isomorphisme canonique de l'espace fibré E'' sur X'' , image inverse de l'espace fibré E par ff' , et l'image inverse de l'espace fibré E' (considéré ci-dessus) par f' (transitivité des images inverses). Si $(x'', y) \in E''$ ($x'' \in X''$, $y \in E$, $ff'x'' = py$), il est envoyé par cet isomorphisme sur $(x', (f'x'', y))$.

Soit Y un sous-espace de la base X d'un espace fibré E ; considérons l'injection f de Y dans X ; l'image inverse E' de E par f est appelé espace-fibre induit par E sur Y , ou restriction de E vers Y , et est dénoté par $E|Y$. Il est canoniquement homéomorphe à un sous-espace de E , notamment l'ensemble des éléments envoyés par p dans Y ; la projection de $E|Y$ dans Y est induite par p . Par ce qui a été dit précédemment, si Z est un sous-espace de Y , la restriction de $E|Y$ à Z est la restriction $E|Z$ de E à Z .

A nouveau, soit (X, E, p) et (X', E', p') deux espaces fibrés, f une fonction continue $X \rightarrow X'$. Un homomorphisme associé à f est un X -homomorphisme g de l'espace fibré E_0 dans E , où E_0 dénote l'image inverse de l'espace fibré E' par f . Cela signifie que g est une application continue, du sous-espace E_0 de $X \times E'$ des couples (x, y') tels que $fx = p'y'$, dans E , envoyant pour chaque $x \in X$ la fibre de x dans E_0 (homéomorphe à la fibre de fx dans E' !) dans la fibre $p^{-1}(x)$ de x dans E . Par exemple, si E est lui-même l'image inverse de E' par f , alors il y a un homomorphisme canonique inverse de E' dans E associé à f : l'identité! (Bien que trivial en quelque sorte, c'est le cas le plus important d'homomorphismes inverses.).

1.3 Sous-espace, quotient, produit.

Soit (X, E, p) un espace fibré, E' un sous-espace quelconque de E , alors la restriction p' de p dans E' , définit E' comme un espace fibré avec la même base X , appelé un sous-espace fibré de E . Ainsi les sous-espaces fibrés de E sont en correspondance injective avec les sous-ensembles de E ; en particulier, pour eux, les notions d'union, intersection, etc. sont définies (bien sûr, dans la plupart des cas, nous ne nous intéressons qu'aux espaces fibrés dont la projection est surjective; cela impose alors une condition sur les sous-espaces de E considérés, qui peut être remplie par les deux sous-espaces mais pas par leur intersection).

Soit maintenant R une relation d'équivalence dans E compatible avec la fonction p , i.e. telle que deux éléments de E congruents mod R aient la même image selon p . Alors p

définit une fonction continue p' de l'espace quotient $E' = E/R$ dans X , qui transforme E' en un espace fibré de base X , appelé un espace fibré quotient de E . Alors ces derniers sont en correspondance injective avec les relations d'équivalence dans E compatible avec p . Un espace fibré quotient d'un espace fibré quotient de E est un espace fibré quotient.

Soient (X, E, p) et (X', E', p') deux espaces fibrés quotients, alors (p, p') définit une fonction continue de $E \times E'$ dans $X \times X'$, telle que $E \times E'$ apparaît comme un espace fibré quotient sur $X \times X'$, appelé le produit des espaces fibrés E, E' .

La fibre de (x, x') dans $E \times E'$ est le produit des fibres de x dans E , respectivement x' dans E' . Supposons maintenant $X = X'$, et considérons l'image inverse de $E \times E'$ selon la fonction diagonale $X \rightarrow X \times X$, nous obtenons un espace fibré sur X , appelé le produit fibré des espaces fibrés E, E' sur X , dénoté $E \times_{(X)} E'$. La fibre de x dans ce

produit fibré est le produit des fibres de x dans E respectivement E' . Bien sûr, le produit d'une famille arbitraire d'espaces fibrés peut être considéré, et il respecte les propriétés formelles habituelles.

1.4 Espaces fibrés triviaux et localement triviaux.

Soient X et F deux espaces, E l'espace produit, la projection du produit de X définit E comme un espace fibré sur X , appelé l'espace fibré trivial sur X de fibre F .

Toutes les fibres sont canoniquement homéomorphes à F . Déterminons les homomorphismes d'un espace fibré trivial $E = X \times F$ dans un autre $E' = X \times F'$. Plus généralement, nous supposons seulement que la projection surjective de $X \times F$ dans X est celle qui est naturelle et continue pour la topologie donnée (mais la topologie de $X \times F$ peut ne pas être la topologie produit, par exemple : X et F sont des variétés algébriques à topologie de Zariski); mettons la même hypothèse sur $X \times F'$. Alors un homomorphisme u de E dans E' , induisant pour tout $x \in X$ une fonction continue de la fibre de E sur x dans la fibre de E' sur x , définit une fonction $x \rightarrow f(x)$ de X dans l'ensemble de toutes les fonctions continues de F dans F' , et bien sûr, l'homomorphisme est bien déterminé par cette fonction par la formule

$$(1.4.1) \quad u(x, y) = (x, f(x).y) \quad (x \in X, y \in F).$$

Ainsi les homomorphismes de E dans E' peuvent être identifiés avec ces fonctions f de X dans l'ensemble des fonctions continues de F dans F' telles que (1.4.1) est continue. Si les topologies de E et E' sont les topologies produits, cela signifie que $(x, y) \rightarrow f(x).y$ est continue; comme cela est bien connu, si de plus F est localement compact et mesurable, cela signifie également que f est continue quand on prend sur l'ensemble de toutes les fonctions continues de F dans F' la topologie de convergence compacte. Si nous considérons un homomorphisme v de E' dans $E'' = X \times F''$ donné par une fonction g de X dans l'ensemble de toutes les fonctions continues de F' dans F'' , l'homomorphisme vu est donné par la fonction $x \rightarrow g(x)f(x)$. Pour que la fonction (1.4.1) soit injective

(respectivement surjective, bijective), il est nécessaire et suffisant que pour tout $x \in X$, $f(x)$ ait la même propriété. Dans le cas bijectif, la fonction inverse est alors définie par la fonction $x \rightarrow f(x)^{-1}$. Il s'ensuit que u est un isomorphisme surjectif si et seulement si pour tout $x \in X$, f est un homéomorphisme surjectif de F dans F' , et la fonction $(x, y') \rightarrow (x, f(x)^{-1}.y')$ est continue. Ainsi, nous obtenons en particulier (en revenant au cas des espaces fibrés triviaux) que :

Proposition 1.4.1. Soient $E = X \times F$ et $E' = X \times F'$ deux espaces fibrés triviaux sur X , alors les isomorphismes surjectifs de E dans E' peuvent être identifiés aux fonctions f de X dans l'ensemble des homéomorphismes surjectifs de F dans F' tels que $f(x).y$ et $f(x)^{-1}.y'$ sont des fonctions continues de $X \times F$ dans F' respectivement $X \times F'$ dans F . Si $E = E'$, cette identification est compatible avec les structures de groupe sur l'ensemble des automorphismes de E respectivement l'ensemble des fonctions de X dans le groupe des automorphismes de F .

Deux espaces fibrés E, E' sur X sont dits localement isomorphes si chaque point x de X a un voisinage U (qui peut être supposé ouvert) tel que les restrictions de E et E' à U sont isomorphes. C'est clairement une relation d'équivalence. Un espace fibré E sur X est dit localement trivial de fibre F (F étant un espace donné) s'il est localement isomorphe à l'espace trivial $X \times F$.

1.5 Définition des espaces fibrés par transformations de coordonnées.

Soit X un espace, (U_i) un recouvrement de X , pour chaque indice i , appelons E_i l'espace fibré au-dessus de U_i , et pour tout couple d'indices i, j tel que $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset$, soit f_{ij} un U_{ij} -isomorphisme surjectif de $E_j|U_{ij}$ dans $E_i|U_{ij}$. Sur la somme topologique \mathcal{E} des espaces E_i , considérons la relation

$$(1.5.1.) \quad y_i \in E_i|U_{ij} \text{ et } y_j \in E_j|U_{ij} \text{ sont équivalents signifie } y_i = f_{ij}y_j.$$

C'est une relation d'équivalence, comme on le vérifie aisément, si et seulement si nous avons, pour chaque triplet (i, j, k) d'indices tel que $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$, la relation

$$(1.5.2.) \quad f_{ik} = f_{ij}f_{jk}$$

(où, dans le but d'abrégier les notations, nous avons simplement écrit f_{ik} plutôt que : l'isomorphisme surjectif de $E_k|U_{ijk}$ dans $E_i|U_{ijk}$ induit par f_{ik} et également pour f_{ij} et f_{jk}). En supposant que cette condition est satisfaite, soit E l'espace quotient de \mathcal{E} par la relation d'équivalence précédente. Les projections p_i de E_i dans U_i définissent une fonction continue de la somme topologique \mathcal{E} dans X , et cette fonction est compatible avec la relation d'équivalence dans \mathcal{E} , de telle façon qu'il y a une fonction continue p de E dans X (qui est surjective si les p_i sont toutes surjectives).

Définition 1.5.1. L'espace fibré sur X qu'on vient de construire est appelé l'espace fibré

défini par les “transformations de coordonnées” (f_{ij}) entre les espaces fibrés E_i .

La fonction identité de E_i dans \mathcal{E} définit une fonction \mathcal{S}_i , de E_i dans E , qui, en vertu de (1.5.1.) est un U_i -homomorphisme injectif (et a fortiori surjectif) de E_i dans $E|U_i$. La topologie de E (par une propriété de transitivité bien connue pour les topologies définies comme la meilleure qui...) est la meilleure topologie sur E pour laquelle les fonctions \mathcal{S}_i sont continues. De plus, il est facile de montrer que lorsque les intérieurs des U_i couvrent déjà X , les fonctions \mathcal{S}_i sont des homéomorphismes intérieurs. Désormais, pour des raisons de simplicité, nous ne travaillerons qu’avec des recouvrements ouverts de X , de telle manière que les propriétés précédentes soient automatiquement satisfaites. Alors \mathcal{S}_i peut être considéré comme un U_i -isomorphisme surjectif de E_i dans $E|U_i$. Clairement

$$(1.5.3.) \quad f_{ij} = \mathcal{S}_i^{-1}\mathcal{S}_j$$

(où, à nouveau, dans le but d’abrégé, nous avons écrit \mathcal{S}_i au lieu de la restriction de \mathcal{S}_i à $E_i|U_{ij}$, \mathcal{S}_j plutôt que la restriction de \mathcal{S}_j à $E_j|U_{ij}$). Inversement, soit E un espace fibré sur X , et supposons que pour chaque i , il existe un U_i -isomorphisme surjectif \mathcal{S}_i de E_i dans $E|U_i$, alors (1.5.3.) définit, pour chaque couple (i, j) tel que $U_i \cap U_j = U_{ij} \neq \emptyset$, un U_{ij} -isomorphisme surjectif de $E_j|U_{ij}$ dans $E_i|U_{ij}$, et le système (f_{ij}) satisfait trivialement (1.5.2.). Donc nous pouvons considérer l’espace fibré E' défini par les transformations de coordonnées f_{ij} . Alors il est évident que la fonction de \mathcal{E} dans E définie par les fonctions \mathcal{S}_i est compatible avec la relation d’équivalence dans \mathcal{E} , donc définit une fonction continue f de E' dans E qui est bien sûr un X -homomorphisme. Soit \mathcal{S}'_i l’isomorphisme surjectif naturel de E_i dans $E'|U_i$ défini ci-dessus ; on vérifie à la fois que la fonction de $E'|U_i$ dans $E|U_i$ induite par f est $\mathcal{S}_i\mathcal{S}'_i^{-1}$, et par conséquent un isomorphisme surjectif. Il s’ensuit que f elle-même est un isomorphisme surjectif de E' dans E , en vertu du lemme simple suivant (preuve laissée au lecteur) :

Lemme 1. Soient E, E' deux espaces fibrés sur X , et f un X -homomorphisme de E dans E' , tel que pour tout $x \in X$, il existe un voisinage U de x tel que f induit un isomorphisme surjectif (respectivement injectif) de $E|U$ dans $E'|U$. Alors f est un X -isomorphisme surjectif (respectivement injectif) de E dans E' .

Ce qui précède montre la vérité de la :

Proposition 1.5.1. Un recouvrement ouvert (U_i) et des espaces fibrés E_i sur U_i étant donnés, les espaces fibrés sur X qui peuvent être obtenus au moyen de transformations de coordonnées adéquates (f_{ij}) sont exactement ceux, à isomorphisme près, pour lesquels $E|U_i$ est isomorphe à E_i pour tout i .

Considérons maintenant deux systèmes de transformations de coordonnées $(f_{ij}), (f'_{ij})$ correspondant au même recouvrement (U_i) , et à deux systèmes $(E_i), (E'_i)$ d’espaces fibrés sur les U_i . Soit E l’espace fibré défini par (f_{ij}) et E' l’espace fibré défini par (f'_{ij}) ; nous allons déterminer tous les homomorphismes de E dans E' . Si f est un tel homo-

morphisme, alors pour tout i , $f_i = \mathcal{S}'_i{}^{-1} f \mathcal{S}_i$ (où f représente la restriction de f à $E|U_i$) est un homomorphisme de E_i dans E'_i , et le système (f_i) satisfait clairement, pour tout couple (i, j) tel que $U_{ij} \neq \emptyset$:

$$(1.5.4) \quad f_i f_{ij} = f'_{ij} f_j$$

(où nous écrivons simplement f_i plutôt que la restriction de f_i à $E_i|U_{ij}$, et également pour f_j). L'homomorphisme f est de plus complètement déterminé par le système (f_i) puisque f_i détermine la restriction de f à $E|U_i$; et de plus, le système (f_i) sujet à (1.5.4) peut être sinon choisi arbitrairement, car cette relation exprime exactement que la fonction de la somme topologique \mathcal{E}' des E'_i transforme des points équivalents en points équivalents, et donc définit un X -homomorphisme f de E dans E' ; et il est clair que le système (f_i) n'est rien d'autre que celui qui est défini comme ci-dessus en fonction de l'homomorphisme f . Bien sûr, en voyant le lemme 1, pour que f soit un isomorphisme surjectif (respectivement injectif), il est nécessaire que chaque f_i soit un isomorphisme surjectif (respectivement injectif) de E_i dans E'_i . Ainsi nous obtenons :

Proposition 1.5.2. Etant donnés deux espaces fibrés sur X , E et E' , définis par les transformations de coordonnées (f_{ij}) respectivement (f'_{ij}) relatives au même recouvrement (U_i) , les X -homomorphismes f de E dans E' sont en correspondance injective avec les systèmes (f_i) d' U_i -homomorphismes $E_i \rightarrow E'_i$ satisfaisant (1.5.4.). f est un isomorphisme surjectif si et seulement si les f_i en sont, i.e. E' est isomorphe à E si et seulement si on peut trouver des isomorphismes surjectifs $f_i : E_i \rightarrow E'_i$ tels que, pour tout couple (i, j) d'indices satisfaisant $U_{ij} \neq \emptyset$, on a

$$(1.5.5.) \quad f'_{ij} = f_i f_{ij} f_j^{-1}$$

(où comme d'habitude f_i et f_j représentent des fonctions de restriction).

On compare les espaces fibrés E, E' définis par des transformations de coordonnées correspondant aux différents recouvrements, (U_i) et (U'_i) , en particulier à la détermination des homomorphismes de E dans E' et donc des X -isomorphismes de E et E' , et donc on détermine si E et E' sont isomorphes. Soit (V_j) un ouvert couvrant de X qui est une spécialisation des deux précédents recouvrements; nous allons montrer que E et E' sont isomorphes aux espaces fibrés définis par transformations de coordonnées par rapport à ce même recouvrement (V_j) , de telle manière que le problème se réduise à un problème déjà traité.

Ainsi, soient $(U_i)_{i \in I}$ et $(V_j)_{j \in J}$ deux recouvrements ouverts de X , le second plus petit que le premier, c'est-à-dire que tout V_j est contenu dans un U_i , i.e. il existe au moins une fonction $\tau : J \rightarrow I$ telle que $V_j \in U_{\tau(j)}$ pour tout $j \in J$. Pour chaque $i \in I$, soit E_i un espace fibré sur U_i , et soit $(f_{ii'})$ un système de transformations de coordonnées par rapport au système (E_i) . Pour tout $j \in J$, soit $F_j = E_{\tau(j)}|V_j$, et soit $g_{jj'}$ la restriction de $f_{\tau(j), \tau(j')}$ à $F_j|V_{jj'}$; alors $g_{jj'}$ est un isomorphisme surjectif de $F_j|V_{jj'}$ dans $F_{j'}|V_{jj'}$, et le

système $(g_{jj'})$ est un système de transformations de coordonnées, comme il suit d'abord de la définition et de (1.5.2.) appliqué au système $(f_{ii'})$. Soit F l'espace fibré défini par le système de transformations de coordonnées $(g_{jj'})$; nous définirons un X -isomorphisme surjectif canonique de F dans E . Pour $j \in J$, soit g_j la fonction injective de F_j dans $E_{\tau(j)}$; c'est donc une fonction de F_j dans la somme topologique \mathcal{E} des E_i ; le système (g_j) définit une fonction continue g' de la somme topologique \mathcal{F} des f_j dans \mathcal{E} , et comme on peut facilement le voir, g' envoie des points équivalents sur des points équivalents. Par conséquent, g' induit une fonction continue g de F dans E , qui est clairement un X -homomorphisme. De plus, pour tout j , g induit un isomorphisme surjectif de $F|V_j$ dans $E|V_j$, car si l'on compose l'isomorphisme surjectif naturel de $E|U_i$ dans E_i , on obtient la fonction injective de $E|V_j$ dans E_i (on pose $i = \tau(j)$). Maintenant en appliquant le lemme 1, nous voyons que g est un isomorphisme surjectif de F dans E .

1.6 Le cas des espaces fibrés triviaux.

La méthode de la section précédente pour construire des espaces fibrés sur X sera utilisée principalement dans le cas où un espace fibré T est donné sur X , et où, étant donné un recouvrement d'ouverts (U_i) de X , on considère les espaces fibrés $E_i = T|U_i$ sur U_i et les transformations de coordonnées (f_{ij}) par rapport à eux. Alors f_{ij} est un U_{ij} -automorphisme de $T|U_{ij}$. L'espace fibré défini par le système (f_{ij}) des transformations de coordonnées sera localement isomorphe (cf. 1.4.) à T , et en vertu de la proposition 1.5.1., nous obtenons de cette manière exactement (à isomorphisme près) tous les espaces fibrés sur X qui sont localement isomorphes à T (en prenant des ensembles ouverts U_i suffisamment petits, et ensuite un système adéquat (f_{ij})).

Dans le cas où T est un espace fibré trivial, $T = X \times F$, nous avons $E_i = U_i \times F$, et $E_i|U_{ij} = U_{ij} \times F$. Ainsi, f_{ij} est un automorphisme de l'espace fibré trivial $U_{ij} \times F$, et donc, en vue de la proposition 1.4.1. donnée par une fonction $x \rightarrow f_{ij}(x)$ de U_{ij} dans le groupe des homéomorphismes surjectifs de F dans lui-même. Les équations (1.5.2.) exprimant que (f_{ij}) est un système de transformations de coordonnées se traduisent en

$$(1.6.1.) \quad f_{ik}(x) = f_{ij}(x)f_{jk}(x) \quad \text{pour } x \in U_{ijk}$$

De plus, il ne faut pas oublier que $x \rightarrow f_{ij}(x)$ est soumise à la condition de continuité de la proposition 1.4.1. Un tel système définit alors de façon naturelle un espace fibré E sur X , et par ce qui a été dit, il découle que ce faisceau de fibres est localement isomorphe à $X \times F$, i.e. localement trivial de fibre F , et que (pour un choix adéquat du recouvrement et des transformations de coordonnées), nous obtenons ainsi, à isomorphisme près, tous les espaces fibrés localement triviaux sur X de fibre F .

Soit de la même façon $T' = X \times F'$, et considérons pour le même recouvrement (U_i) un système (f_{ij}) et un système (f'_{ij}) de transformations de coordonnées, le premier relatif à la fibre F et le second à la fibre F' . Soient E et E' les espaces fibrés correspondant sur X . Les homomorphismes de E dans E' , par la proposition 1.5.2., correspondent

aux homomorphismes f_i de $E_i = U_i \times F$ dans $E'_i = U_i \times F'$, satisfaisant les conditions (1.5.4). Maintenant, (proposition 1.4.1.), un tel homomorphisme f_i est déterminé par une fonction $x \rightarrow f_i(x)$ de U_i dans l'ensemble des fonctions continues de F dans F' par $f_i(x, y) = (x, f_i(x).y)$, soumis à la seule contrainte que $f_i(x).y$ est continue par rapport au couple $(x, y) \in U_i \times F$. Alors l'équation (1.5.4.) devient

$$(1.6.2.) \quad f_i(x)f_{ij}(x) = f'_{ij}(x)f_j(x) \quad (x \in U_{ij})$$

Ainsi les homomorphismes sont déterminés de E dans E' . En particulier, les isomorphismes surjectifs de E dans E' sont obtenus par les systèmes (f_i) tels que $f_i(x)$ est un homéomorphisme surjectif de F dans F' pour tout $x \in U_i$, et tels que $x \rightarrow f_i^{-1}(x)$ satisfait la même contrainte de continuité que $x \rightarrow f_i(x)$. La condition de compatibilité (1.6.2.) peut alors s'écrire

$$(1.6.3.) \quad f'_{ij}(x) = f_i(x)f_{ij}(x)f_j(x)^{-1} \quad (x \in U_{ij})$$

1.7 Sections d'espaces fibrés.

Définition 1.7.1. Soit (X, E, p) un espace fibré ; une section de cette espace fibré (ou, par un pléonasme, une section de E sur X) est une fonction x de X dans E telle que ps est la fonction identité de X . L'ensemble des fonctions continues de E est noté $H^0(X, E)$.

Cela revient au même de dire que s est une fonction dont la valeur en chaque $x \in X$ est une fibre de x dans E (qui dépend de x !). L'existence d'une section implique bien sûr que p est surjective, et inversement nous n'avons pas besoin de la continuité. Pourtant, nous nous intéressons principalement aux sections continues. Une section de E sur un sous-ensemble Y de X est par définition une section de $E|Y$. Si Y est un ouvert, nous écrivons $H^0(Y, E)$ pour l'ensemble $H^0(Y, E|Y)$ de toutes les sections continues de E sur Y .

$H^0(X, E)$ comme foncteur. Soit E, E' deux espaces fibrés sur X , f un X -homomorphisme de E dans E' . Pour chaque section s de E , la fonction composée fs est une section de E' , continue si s est continue. Nous obtenons ainsi une fonction, notée f , de $H^0(X, E)$ dans $H^0(X, E')$. Les propriétés usuelles des foncteurs sont satisfaites :

- a. Si deux espaces fibrés sont identiques et si f est l'identité alors il en est de même de f
- b. Si f est un X -homomorphisme de E dans E' et si f' est un X -homomorphisme de E' dans E'' (E, E', E'' des espaces fibrés sur X) alors $(f'f) = f'f$.

Soit (X, E, p) un espace fibré, f une fonction continue d'un espace X' dans X , et E' l'image inverse de E selon f . Soit s une section de E' , considérons la fonction s' de X' dans E' donnée par $s'x' = (x', sfx')$ (le second membre appartient à E' , puisque

$fx' = psfx'$ parce que $px = \text{identité}$), c'est une section de E' , continue si s est continue. Ainsi, nous obtenons une fonction canonique de $H^0(X, E)$ dans $H^0(X', E')$ (E' étant l'image inverse de E par f). Au cas où $X' \subset X$ et f est la fonction inclusion, alors $E' = E|X'$, et la fonction précédente n'est rien d'autre que la fonction de restriction (de $H^0(X, E)$ dans $H^0(X', E)$ si X' est un ouvert). Nous laissons au lecteur l'énoncé et la preuve d'une propriété évidente de transitivité des fonctions canoniques qui viennent d'être considérées.

Les deux sortes d'homomorphismes pour les ensembles de sections continues sont compatibles au sens suivant : soit \mathcal{S} une fonction continue fixée d'un espace X' dans X , alors à chaque espace fibré E sur X correspond son image inverse E' selon \mathcal{S} , qui est un espace fibré sur X' ; de plus, étant donné un X -homomorphisme $f : E \rightarrow F$, on définit de façon naturelle un X' -homomorphisme f' de E' dans F' . (Nous pourrions aller plus loin et exprimer que, pour \mathcal{S} fixé, E' est un "foncteur" de E du fait des définitions précédentes.)

Alors le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} H^0(X, E) & \xrightarrow{f_*} & H^0(X, F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0(X', E') & \xrightarrow{f'_*} & H^0(X', F') \end{array}$$

dans lequel les flèches verticales représentent les homomorphismes canoniques définis plus haut, est un diagramme commutatif. La vérification est bien sûr triviale. Cas particulier : en remplaçant X par un sous-ensemble ouvert U de X , et en prenant pour X' un sous-ensemble ouvert V de U et avec \mathcal{S} la fonction d'inclusion $V \rightarrow U$, nous obtenons que quels que soient E, F deux espaces fibrés sur X et f un X -homomorphisme avec $f : E \rightarrow F$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^0(U, E) & \longrightarrow & H^0(U, F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0(V, E) & \longrightarrow & H^0(V, F) \end{array}$$

où les flèches verticales sont les fonctions de restriction, et les flèches horizontales sont les fonctions définies par f (où pour parler plus strictement, par les restrictions de f à $E|U$ respectivement $E|V$). En d'autres termes : les "homomorphismes" entre espaces de sections sur les ensembles ouverts définis par des X -homomorphismes d'espaces fibrés commutent avec les opérateurs de restriction.

Détermination des sections. Revenons aux conditions de la définition 1.5.1. ; nous gardons les notations de cette section. Soit s une section de l'espace fibré E , et pour tout i , appelons $s_i = \mathcal{S}_i^{-1}s$; alors s_i est une section de E_i sur U_i , et de $s = \mathcal{S}_i s_i = \mathcal{S}_j s_j$ sur U_{ij} , nous obtenons $s_i = \mathcal{S}_i^{-1} \mathcal{S}_j s_j = f_{ij} s_j$:

$$(1.7.3.) \quad s_i = f_{ij}s_j$$

où à nouveau nous écrivons s_i, s_j plutôt que : restriction de s_i, s_j à U_{ij} .

Bien sûr, s est entièrement déterminé par le système (s_i) , car s est donné sur les U_i par $s = \mathcal{S}_i s_i$. D'un autre côté, sinon, le système (s_i) sujet à (1.7.3.) peut être arbitraire, car ces conditions expriment précisément que pour $x \in X$, l'élément $\mathcal{S}_i s_i(x)$ de E obtenu en prenant un U_i contenant x ne dépend pas de i , et peut parfois être noté $s(x)$: alors les antécédents $\mathcal{S}_i^{-1}s$ déterminés par la définition ci-dessus ne sont bien sûr rien d'autre que les s_i avec lesquels on a commencé. Notons également que pour que la section s soit continue, il est nécessaire et suffisant que chaque s_i soit continu. Nous obtenons ainsi la :

Proposition 1.7.1. Soit E l'espace fibré défini par les transformations de coordonnées (f_{ij}) relatives à un recouvrement ouvert (U_i) de X et les espaces fibrés E_i sur U_i . Alors il y a une injection canonique entre les sections de E et les systèmes (s_i) des sections de E_i sur les U_i , i satisfaisant les conditions (1.7.3.). Les sections continues correspondent aux systèmes des sections continues.

Etant donné, à nouveau, comme dans le paragraphe 1.5, deux systèmes (E_i) et (E'_i) d'espaces fibrés sur les U_i et les deux systèmes correspondant de transformations de coordonnées (f_{ij}) et (f'_{ij}) , appelons E et E' les espaces fibrés correspondant, et f un X -homomorphisme de E dans E' , défini en vertu de la proposition 1.5.2., par un système (f_i) de U_i -homomorphismes de E_i dans E'_i satisfaisant (1.5.4.). Soit s une section de E , donnée par le système (s_i) des sections de E_i sur U_i . Alors le système $(f_i s_i)$ des sections de E'_i sur U_i définit une section $f s$ (triviale).

Le lecteur peut vérifier, comme exercice, comment les fonctions canoniques des espaces de sections considérés ci-dessus dans cette section, peuvent être rendus explicites pour les espaces fibrés donnés au moyen de transformations de coordonnées

2 Faisceaux d'ensembles

Tout au long de l'exposé, le mot "section" signifiera "section continue".

2.1 Faisceaux d'ensembles.

Définition 2.1.1. Soit X un espace. Un faisceau d'ensembles sur X (ou simplement un faisceau) est un espace fibré (E, X, p) de base X , satisfaisant la condition : chaque point a de E a un voisinage ouvert U tel que p induit un homéomorphisme surjectif de U dans un sous-ensemble ouvert $p(U)$ de X .

Cela peut être exprimé en disant que p est une fonction intérieure et un homéomorphisme local. On devrait garder à l'esprit que, même si X est séparé, E n'est pas supposé séparé

(et dans les contextes les plus importants ne sera pas séparé).

Avec les notations de la définition 2.1.1, soit $x = p(a)$. Si f est une section de E telle que $fx = a$, alors $V = f^{-1}(U) \cap p(U)$ est un ensemble ouvert contenant x , et sur ce voisinage V de x , f doit coïncider avec l'inverse de l'homéomorphisme surjectif $p|_U$ de U sur $p(U)$. En particulier

Proposition 2.1.1. Deux sections d'un faisceau E défini dans un voisinage de x et prenant la même valeur en x coïncident dans un voisinage de X .

Corollaire : Etant données deux sections de E dans un ensemble ouvert V , l'ensemble des points où elles sont égales est un ouvert. (Mais en général, il n'est pas fermé, comme ce serait le cas si E était séparé!).

2.2 $H^0(A, E)$ pour un $A \subset X$ arbitraire.

D'abord, soit E un espace fibré arbitraire sur X . Soit A un sous-ensemble arbitraire de X ; les voisinages ouverts de A , ordonnés par \supset , forment un ensemble ordonné filtrant. A chaque élément U de cet ensemble est associé un ensemble $H^0(U, E)$: l'ensemble des sections de E sur U , et si $U \supset V$ (U et V des voisinages ouverts de A), nous avons une fonction naturelle $\mathcal{S}_{VU} : H^0(U, E) \rightarrow H^0(V, E)$ (fonction de restriction), avec la propriété évidente de transitivité $\mathcal{S}_{WV}\mathcal{S}_{VU} = \mathcal{S}_{WU}$ quand $U \supset V \supset W$. Par conséquent, nous pouvons considérer la limite directe de la famille d'ensembles $H^0(U, E)$ pour les fonctions \mathcal{S}_{VU} .

Définition 2.2.1. Posons $H^0(A, E) = \varinjlim H^0(U, E)$, (U ayant comme domaine les voisinages ouverts comme expliqué précédemment). Si $A = \{x\}$ ($x \in X$), nous écrivons simplement $H^0(x, E)$. Les éléments de $H^0(A, E)$ sont appelés germes des sections de E dans le voisinage de A .

Si A est ouvert, nous ne trouvons bien sûr rien d'autre que l'ensemble des sections continues de E sur A , déjà dénoté $H^0(A, E)$. Si $A \supset B$, il y a une fonction naturelle, à nouveau notée \mathcal{S}_{BA} de $H^0(A, E)$ dans $H^0(B, E)$, (définition laissée au lecteur). Quand A et B sont tous deux ouverts, c'est la fonction de restriction habituelle (par conséquent, elle sera en général encore appelée fonction de restriction); quand A est un ouvert, alors c'est l'homomorphisme naturel de $H^0(A, E)$ dans la limite directe de tous les $H^0(A', E)$ correspondant aux voisinages ouverts A' de B . Bien sûr, $A \supset B \supset C$ implique $\mathcal{S}_{CB}\mathcal{S}_{BA} = \mathcal{S}_{CA}$.

Soit $\Gamma(A, E)$ l'ensemble des sections continues de E sur l'ensemble arbitraire $A \supset X$, alors les fonctions de restriction $H^0(U, E) = \Gamma(U, E) \rightarrow \Gamma(A, E)$ (U , voisinage ouvert de A) définissent une fonction naturelle de $\varinjlim H^0(U, E) = H^0(A, E)$ dans $\Gamma(A, E)$. En particulier, il y a une fonction naturelle $H^0(x, E) \rightarrow E_x$, où E_x est la fibre de x dans E (valeur en x du germe d'une section dans le voisinage de x). Celle-ci bien sûr, bien

que fréquemment surjective, sera rarement injective. Pourtant :

Proposition 2.2.1. Si E est un faisceau sur X , alors pour $x \in X$, la fonction canonique $\overline{H^0(x, E)} \rightarrow E_x$, est bijective (i.e, injective et surjective). Si A est un sous-ensemble quelconque de X , alors la fonction canonique $H^0(A, E) \rightarrow \Gamma(A, E)$ est injective ; elle est de plus surjective si A admet un système fondamental de voisinages paracompacts.

Les parties injectives sont contenues dans la Proposition 2.1.1 et son corollaire. Les premiers résultats concernant la surjection sont dans la définition 2.1.1. Maintenant soit f une section continue de E sur A ; pour tout $x \in A$, soit g_x une section continue de E sur un voisinage ouvert V_x de x dans X , tel que $g_x(x) = f(x)$ (ceux-ci existent par la première partie de la proposition 2.2.1.). De plus, par la première partie de la proposition 2.1.1. appliquée à $E|_A$, nous pouvons supposer V_x assez petit pour que sur $V_x \cap A$, g_x et f coïncident. Nous pouvons supposer que $U = \cup V_x$ est un voisinage paracompact de A . Soit $(V_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert localement fini de U plus fin que (V_x) , c'est-à-dire que chaque V_i est contenu dans un V_x . Alors pour chaque V_i , il existe $g_i \in H^0(V_i, E)$ tel que g_i et f coïncident sur $V_i \cap A$. U étant paracompact, nous pouvons trouver un recouvrement ouvert (V'_i) de U tel que la fermeture relative de V'_i dans U soit contenue dans V_i . Pour chaque $x \in A$, il existe un voisinage ouvert W_x de x dans U rencontrant seulement un nombre fini d'entre les V_i ; en prenant W_x suffisamment petit, nous pouvons supposer que $x \notin \overline{V'_i}$ implique $V'_i \cap W_x = \emptyset$, et $x \in \overline{V'_i}$ implique $W_x \subset V_i$. De plus, en vertu de la proposition 2.1.1., nous pouvons supposer que les g_i correspondant sont identiques sur W_x puisqu'ils prennent la même valeur $f(x)$ en x . Par conséquent, à chaque fois qu'un V'_i rencontre W_x , alors g_i est défini sur W_x et ne dépend pas du choix de i , de telle façon que nous pouvons le dénoter par h_x . Il s'ensuit de cela que dans $W_x \cap W_y$, h_x et h_y sont identiques, et donc, les h_x sont les restrictions d'une unique section h de E sur $W = \cup W_x$. C'est une section continue de E sur un voisinage ouvert de A , et nous voyons directement que sa restriction à A est f . Ceci termine la démonstration.

Remarque. La dernière partie de la proposition 2.2.1. devient fausse si nous négligeons la contrainte de paracompacité. Soit par exemple X un ensemble infini, avec la topologie dans laquelle les ensembles ouverts sont les complémentaires de tous les ensembles finis (de tels espaces peuvent avoir un sens en topologie algébrique, en considérant par exemple une courbe algébrique avec une topologie de Zariski). Soit F un espace discret ; considérons l'espace fibré trivial $X \times F$. C'est un faisceau ; ses sections sur un ensemble A sont les fonctions localement constantes de A dans F (cf. paragraphe 2.6. ci-dessous, exemple a). Soit A un sous-ensemble fini de X ; on voit directement que tout voisinage ouvert de A est homéomorphe à X et est donc connexe ; par conséquent, une section de E sur un tel voisinage est constante ; mais les sections sur A peuvent avoir un nombre arbitraire de valeurs différentes pour les points de A et de ce fait, elles ne seront en général pas des restrictions des sections définies dans un voisinage de A .

2.3 Définition d'un faisceau par des systèmes d'ensembles.

Comme nous l'avons remarqué à la section précédente, tout espace fibré E (et en particulier tout faisceau) détermine des ensembles $H^0(U, E)$ (par exemple, pour tout ouvert $U \subset X$) et des fonctions $H^0(U, E) \rightarrow H^0(V, E)$ pour $U \supset V$, satisfaisant une propriété évidente de transitivité. La proposition 2.2.1. suggère qu'inversement, un système pourrait définir un faisceau. En effet, soit \mathcal{V} un recouvrement ouvert de X , et supposons définie une fonction $U \rightarrow E_U$ sur l'ensemble des ensembles ouverts qui sont petits d'ordre \mathcal{V} (i. e. contenus dans un ensemble élément de \mathcal{V}), chaque E_U étant un ensemble. Supposons donnée de plus, si U et V sont \mathcal{V} -petits et $U \supset V$, une fonction $\mathcal{S}_{VU} : E_U \rightarrow E_V$, ces fonctions satisfaisant la condition de transitivité

$$(2.3.1.) \quad \mathcal{S}_{WV}\mathcal{S}_{VU} = \mathcal{S}_{WU} \quad (\text{si } U \supset V \supset W),$$

Pour tout $x \in X$, soit $E_x = \varinjlim E_U$, U parcourant l'ensemble ordonné filtrant des voisinages ouverts de x (ordonnés par \supset). Soit E l'union des E_x , et p la fonction de E dans X envoyant E_x dans x . Définissons dans E une topologie comme suit : pour tout $f \in E_U$ et $x \in U$, nous considérons l'image canonique $f_x \in E$ de f dans la limite directe E_x des ensembles E'_U correspondant à tous les voisinages ouverts U' de x . Soit $O(f)$ l'ensemble de tous les éléments $f_x \in E$ quand x parcourt U . Quand U et $f \in E_U$ varient, nous obtenons une famille de sous-ensembles $O(f)$ de E , qui génèrent une topologie sur E . Il est facile de vérifier que (E, X, p) forme un faisceau, c'est-à-dire que p est continu, intérieur et que c'est un homéomorphisme local.

Définition 2.3.1. Le faisceau E ainsi défini est appelé le faisceau défini par le système d'ensembles E_U et de fonctions \mathcal{S}_{VU} .

Considérons maintenant un ensemble ouvert $U \subset X$, \mathcal{V} -petit ; pour tout $f \in E_U$, la fonction $x \rightarrow f_x$ est clairement une section du faisceau E , et de plus continue, que nous dénoterons \tilde{f} . Nous obtenons ainsi une fonction naturelle $f \rightarrow \tilde{f}$ de E_U dans $H^0(U, E)$.

Proposition 2.3.1. Pour que $f \rightarrow \tilde{f}$ soit injective, il est nécessaire et suffisant que pour tout recouvrement ouvert (U_i) de U , et deux éléments f, g de E_U , $\mathcal{S}_{U_i U} f = \mathcal{S}_{U_i U} g$ pour tout i implique que $f = g$. Pour que $f \rightarrow \tilde{f}$ soit surjective, il est nécessaire et suffisant que pour tout recouvrement ouvert (U_i) de U , et pour tout système $(f_i) \in \cap E_{U_i}$ satisfaisant

$$(2.3.2.) \quad \mathcal{S}_{U_i \cap U_j, U_i} f_i = \mathcal{S}_{U_i \cap U_j, U_j} f_j \quad \text{quand } U_i \cap U_j \neq \emptyset$$

il existe $af \in E_U$ telle que $f_i = \mathcal{S}_{U_i U} f$ pour tout i .

Corollaire. Pour que $f \rightarrow \tilde{f}$ soit bijective, il est nécessaire et suffisant que pour tout recouvrement ouvert (U_i) de U , la fonction naturelle $E_U \rightarrow \cap E_{U_i}$ (dont les compo-

santes sont les fonctions $\mathcal{S}_{U_i U}$ soit une fonction injective et surjective de E_U dans le sous-ensemble du produit de tous les (f_i) satisfaisant la condition (2.3.2.).

Preuve laissée au lecteur, ainsi que la preuve de la proposition suivante :

Proposition 2.3.2. Soit E un faisceau sur X , considérons le système d'ensembles $H^0(U, E)$ et les fonctions de restriction $\mathcal{S}_{VU} : H^0(U, E) \rightarrow H^0(V, E)$ pour $U \supset V$ (U, V des ensembles ouverts). Alors le faisceau E' défini par ces données (définition 2.3.1.) est canoniquement isomorphe à E , cet isomorphisme, transformant pour chaque $x \in X$, $E'_x = \varinjlim H^0(U, E) = H^0(x, E)$ en E_x , étant l'isomorphisme considéré dans la proposition 2.2.1.

Les deux propositions précédentes montrent combien est essentielle l'équivalence entre la notion de faisceau sur l'espace X , et la notion mettant en œuvre un système d'ensembles (E_U) (U un ouvert $\subset X$) et des fonctions \mathcal{S}_{VU} pour $U \supset V$, satisfaisant les conditions (2.3.1.) et la condition du corollaire de la proposition 2.3.1. Ces deux images ont leur importance, la seconde étant plus intuitive, mais la première étant souvent techniquement plus simple.

Exercice. Etant donné un système d'ensembles E_U (U un ouvert \mathcal{V} -petit) et des homomorphismes \mathcal{S}_{VU} ($U \supset V$) satisfaisant (2.3.1.), prouver que si nous nous restreignons aux U qui sont \mathcal{V}' -petits (où \mathcal{V}' est un recouvrement ouvert de X plus fin que \mathcal{V}), le faisceau défini par ce nouveau système est canoniquement isomorphe au faisceau défini par le premier système.

2.4 Propriétés de permanence.

Soit E un faisceau sur l'espace X , et soit f une fonction continue d'un espace X' dans X , alors l'image inverse de l'espace fibré E par f (cf. 1.2.) est encore un faisceau. En particulier, si $X' \subset X$, E induit un faisceau sur X' .

Si E est un faisceau sur X , F un faisceau sur Y , alors $E \times F$ est un faisceau sur $X \times Y$; par conséquent, si E et F sont deux faisceaux sur X , alors leur produit fibré $E \times_X F$ (cf. 1.3) est encore un faisceau; cela s'étend au produit d'un nombre fini de faisceaux.

Sous les conditions de 1.5. supposons que les espaces fibrés E_i sur les ensembles ouverts U_i soient des faisceaux, alors l'espace fibré E obtenu au moyen des transformations de coordonnées f_{ij} est encore un faisceau. Cela résulte directement de la remarque plus générale : si E est un espace fibré tel que chaque $x \in X$ a un voisinage U tel que $E|U$ est un faisceau, alors E est un faisceau (trivial).

2.5 Sous-faisceau, faisceau quotient. Homomorphismes de faisceaux.

Proposition 2.5.1. Soit E un faisceau sur l'espace X . Pour qu'un sous-ensemble F de E , considéré comme un espace fibré sur X , soit un faisceau, il est nécessaire et suffisant qu'il soit ouvert. Pour que le quotient de E par une relation d'équivalence R compatible avec la fibration, soit un faisceau, il est nécessaire et suffisant que l'ensemble des couples équivalents (z, z') soit un ouvert dans le produit fibré $E \times_X E$.

Ces conditions peuvent aussi s'établir de façon équivalente : si une section f de E dans un voisinage de $x \in X$ est telle que $fx \in F$, alors $fy \in F$ pour y dans un voisinage de x ; si deux sections f, g de E dans un voisinage de $x \in X$ sont telles que fx et gx sont équivalentes mod R , alors fy et gy sont équivalentes mod R pour y dans un voisinage de x .

Proposition 2.5.2. Soit E un faisceau sur X , E' un faisceau sur X' , f une fonction continue de X dans X' et g une fonction de E dans E' telle que $p'g = fp$ (p, p' étant les projections de E, E'). Pour que g soit un f -homomorphisme (i.e. soit continu), il est nécessaire et suffisant que pour toute section s de E sur un ensemble ouvert U , gs soit une section de E' sur $f(U)$.

Corollaire 1. Soit f un X -homomorphisme bijectif d'un faisceau E dans un faisceau F , alors f est un isomorphisme surjectif de E dans F .

Corollaire 2. Soient E, F deux faisceaux sur X , f un X -homomorphisme de E dans F . Alors f est une fonction intérieure, et $f(E)$ est un sous-faisceau de F . Le quotient de E par la relation d'équivalence définie par la fonction f est encore un faisceau, et f définit un isomorphisme surjectif de ce quotient dans le faisceau $f(E)$.

Considérons maintenant un système (E_U, \mathcal{S}_{VU}) comme dans le paragraphe 2.3., définissant un faisceau E . Supposons donné pour chaque U un sous-ensemble E'_U de E_U , tel que $U \supset V$ implique $\mathcal{S}_{VU}(E'_U) \subset E'_V$. Soit \mathcal{S}'_{VU} la fonction de E'_U dans E'_V définie par \mathcal{S}_{VU} , alors le système $(E'_U, \mathcal{S}'_{VU})$ définit un faisceau E' . Pour tout $x \in X$, les fibres de x dans E respectivement E' sont données par

$$E_x = \varinjlim E_U \quad E'_x = \varinjlim E'_U$$

la limite directe étant prise dans l'ensemble filtrant ordonné des voisinages ouverts de x . Par conséquent, nous avons une injection naturelle $E'_x \subset E_x$, et donc $E' \subset E$. Il est aisément vérifié que l'injection de E' dans E est un homomorphisme, (un cas particulier d'une caractérisation générale des homomorphismes sera donnée ultérieurement), de telle façon que par le corollaire 1 ci-dessus, E' est isomorphe à un sous-faisceau de E . Supposons que les conditions du corollaire de la proposition 2.3.1. soient satisfaites, qui assurent que $E_U = H^0(U, E)$. Alors clairement, les fonctions canoniques $E'_U \longrightarrow H^0(U, E') \subset H^0(U, E)$ sont injectives.

La proposition 2.3.1. a pour conséquence que pour que ce soient des injections, il est nécessaire et suffisant que chaque $f \in E_U$ tel que $x \in U$ a un voisinage ouvert V dans U tel que $\mathcal{S}_{VU}f \in E'_V$ soit contenu dans E'_U ; ou pour le dire plus rapidement a la propriété que, pour qu'un élément f d'un E_U appartienne au sous-ensemble E'_U , soit une propriété de caractère local. Si inversement, nous commençons avec un sous-faisceau arbitraire E' de E , et que nous dénotons par E'_U le sous-ensemble $H^0(U, E')$ de $E_U = H^0(U, E)$, alors ces E'_U satisfont clairement les conditions $\mathcal{S}_{VU}E'_U \subset E'_V$, et le sous-faisceau de E défini par eux n'est autre que E' .

Maintenant, soient E, F deux faisceaux sur X définis par les systèmes (E_U, \mathcal{S}_{VU}) et (F_U, Ψ_{VU}) . Supposons donnée pour tout U une fonction $f_U : E_U \rightarrow F_U$, telle que $U \supset V$ implique $\Psi_{VU}f_U = f_U\mathcal{S}_{VU}$. Alors ce système de fonctions définit, pour chaque $x \in X$, une fonction f_x de $E_x = \varinjlim E_U$ dans $F_x = \varinjlim F_U$, donc une fonction f de E dans F . On vérifie facilement (par exemple en utilisant la proposition 2.5.2.) que f est un homomorphisme de E dans F . De plus, $f(E)$ n'est rien d'autre que le sous-faisceau de F défini par les sous-ensembles $f_U(E_U)$ des F_U . Pour tout ouvert U , le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} E_U & \xrightarrow{f_U} & F_U \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0(U, E) & \xrightarrow{f_*} & H^0(U, F) \end{array}$$

En particulier, si les fonctions verticales sont bijectives, nous voyons que les fonctions f_U peuvent être identifiées avec les fonctions $f_* : H^0(X, E) \rightarrow H^0(X, F)$ définies par l'homomorphisme f . Inversement, si nous commençons avec un homomorphisme arbitraire f de E dans F , alors l'homomorphisme défini par le système de fonctions f_U de $E_U = H^0(U, E)$ dans $F_U = H^0(U, F)$ est précisément f .

2.6 Quelques exemples.

a. Faisceaux constants et localement constants.

Soit F un espace discret, alors l'espace fibré trivial $X \times F$ est clairement un faisceau sur X ; un faisceau isomorphe à un tel faisceau est appelé constant. Les sections de ce faisceau sur un ensemble $A \subset X$ sont les fonctions continues de A dans l'ensemble discret F , i.e. les fonctions de A dans F qui sont constantes localement. Si par exemple A est connexe, elles se réduisent aux fonctions constantes de A dans F . Les images inverses et les produits des faisceaux simples sont simples.

Un faisceau E sur X est appelé localement simple, si chaque $x \in X$ a un voisinage U tel que $E|U$ est simple. Ainsi un faisceau localement simple sur X n'est rien d'autre qu'un espace couvrant de X au sens classique (mais non contraint bien sûr à être connexe). Les images inverses et les produits de faisceaux localement simples en nombre fini sont

localement simples.

b. Faisceau de germes de fonctions.

Soit X un espace, E un ensemble. Considérons pour tout ouvert $U \subset X$ l'ensemble $\mathcal{F}(U, E)$ de toutes les fonctions de U dans E ; si $U \supset V$, nous avons une fonction naturelle de $\mathcal{F}(U, E)$ dans $\mathcal{F}(V, E)$, la fonction de restriction. La condition de transitivité du paragraphe 2.3 est clairement satisfaite, ainsi que la condition du corollaire de la proposition 2.3.1. Par conséquent, les ensembles $\mathcal{F}(U, E)$ peuvent être identifiés aux ensembles des sections $H^0(U, \mathcal{F})$ d'un faisceau bien déterminé \mathcal{F} , dont les éléments sont appelés les germes des fonctions de X dans E .

Si $A \subset X$, alors les éléments de $H^0(A, \mathcal{F})$ sont appelés les germes des fonctions d'un voisinage de A dans E . Si maintenant E est un espace topologique, nous pouvons considérer pour tout U le sous-ensemble $C(U, E)$ de $\mathcal{F}(U, E)$ des fonctions continues de U dans E . Comme la continuité est une condition de caractère local, il s'ensuit du paragraphe 2.5 que les ensembles $C(U, E)$ sont les ensembles des sections d'un sous-faisceau bien déterminé de \mathcal{F} , qui est appelé le faisceau des germes des fonctions continues de X dans E . (Si nous prenons sur E la topologie la plus grossière, nous trouvons à nouveau le premier faisceau.).

Supposons maintenant qu' E est un espace fibré sur X , alors considérons pour tout U le sous-ensemble $H^0(U, E)$ de $C(U, E)$ des sections continues de E . La propriété d'être une section est à nouveau de caractère local, et donc nous voyons que les ensembles $H^0(U, E)$ sont les ensembles de sections d'un sous-faisceau bien déterminé du faisceau des germes des fonctions continues de X dans E : le faisceau des germes des sections de l'espace fibré E . Si ce faisceau est dénoté par \tilde{E} , alors $H^0(A, \tilde{E})$ n'est autre que l'ensemble des germes des sections de E dans le voisinage de A , comme exprimé dans la définition 2.2.1.

Bien sûr, en spécialisant les espaces X et E , nous pouvons définir un grand nombre d'autres sous-faisceaux du faisceau des germes des fonctions de X dans E (les germes des fonctions différentiables, les germes des fonctions analytiques, les germes des fonctions qui sont L^p , etc.).

c. Faisceau de germes d'homomorphismes d'un espace fibré dans un autre.

Soient E et F deux espaces fibrés sur X , et pour tout ouvert $U \subset X$, soit H_U l'ensemble des homomorphismes de $E|_U$ dans $F|_U$. Si V est un ensemble ouvert contenu dans U , il y a une fonction naturelle évidente de la restriction $H_U \rightarrow H_V$. La condition de transitivité aussi bien que la condition du corollaire de la proposition 2.3.1., sont satisfaites, de telle manière que les ensembles H_U apparaissent comme étant les ensembles $H^0(U, H)$ des sections d'un faisceau bien déterminé sur X , dont les éléments sont appelés les germes des homomorphismes de E dans F . Une section de ce faisceau sur X est un homomorphisme de E dans F .

d. Faisceau de germes de sous-ensembles.

Soit X un espace, pour tout ensemble ouvert $U \subset X$, appelons $P(U)$ l'ensemble des sous-ensembles de U . Si $U \supset V$, considérons la fonction $A \rightarrow A \cap V$ de $P(U)$ dans $P(V)$. Les conditions de transitivité sont clairement vérifiées, et les conditions du corollaire de la proposition 2.3.1. sont satisfaites, de telle façon que les ensembles $P(U)$ apparaissent comme étant les ensembles $H^0(U, P(X))$ des sections d'un faisceau bien déterminé sur X , dont les éléments sont appelés les germes des ensembles dans X . Toute condition de caractère local sur les sous-ensembles de X définit un sous-faisceau de $P(X)$, par exemple le faisceau des germes des ensembles fermés (correspondant aux ensembles relativement fermés dans U), ou si X est une variété analytique, le faisceau des germes des ensembles analytiques, etc.

D'autres exemples importants de faisceaux seront considérés au chapitre suivant.