A. Grothendieck
33 rue du Maréchal Girard
Nancy (M et M)

Nancy le 16.12.1950

Cher Monsieur Dixmier,

Merci pour votre lettre et votre tirage à part. – Malheureusement, la suggestion que vous me faites ne m'apporte rien de neuf, car les minimisations dont vous parlez sont à fortiori incluses dans le fait de prendre un flt compact convexe <u>minimal</u> (ce qui est possible grâce au théorème de Zorn).

Il est bien vrai que dans un espace complet quelconque, l'enveloppe convexe fermée d'une partie flt compacte est aussi flt compacte. Seulement vous ne donnez la démonstration dans le cas où l'espace est séparable; dans le cas général, on remarque que d'après le théorème d'Eberlein, il suffit de montrer que ~~des~~ toute <u>suite</u> contenue de l'enveloppe convexe admet un point faiblement adhérent, ce qui ramène immédiatement au cas séparable. – Notez qu'il existe un assez grand nombre de théorèmes dont l'énoncé ne fait intervenir aucune condition de dénombrabilité, et qui ne peuvent se démontrer sans l'aide du th. d'Eberlein (j'en connais cinq exemples au moins). Cela tient à ce que l'emploi des suites permet d'utiliser le théorème de Lebesgue sur l'intégrale d'une limite simple de fonctions bornées dans leur ensemble!

Vous me demandez avec raison comment, du théorème sur la moyenne des fonctions f.lt. p.p., on pourrait déduire que ~~tout~~ groupe borné d'opérateurs dans un Hilbert est semblable à un groupe d'opérateurs unitaires. Si on savait que les fonctions sur G de la forme $\varphi_{x,y}(s) = \langle T^s x, T^s y \rangle$ sont f.lt. p.p., on n'aurait qu'à considérer la forme bilinéaire sur $\mathcal{H}$: $B(x,y) = M_s(\langle T^s x, T^s y \rangle) = M(\varphi_{x,y})$, où M est la moyenne invariante sur l'espace des fonctions f.lt. p.p., et l'affirmation apparaîtrait aisément. J'avais cru voir que ces $\varphi_{x,y}$ sont en effet f.lt. p.p., mais n'en aperçois plus la raison maintenant que je vous écris, de sorte qu'il me semble bien possible que je me suis trompé – mais je n'en suis pas convaincu. Bien que ces semaines-ci je suis partiellement pris par des soucis matériels de recherche de logement et de déménagement, et d'autre part une autre recherche les cours, je ne peux pas avant quelques semaines examiner la question de près, aussi j'ai préféré vous répondre ~~tout~~ de suite. — Il est évident par la construction : droite de φ_{xy} est $\varphi_{T^\sigma_x, T^\sigma_y}$, or si σ parcourt C quelconque G, T^σ_x et T^σ_y parcourent des parties relt flt cptes de H. D'autre part $(a,b) \to \varphi_{ab}$ est application bilinéaire continue de $H \times H$ dans $C^\infty(G)$. Il n'en suit malheureusement pas pour autant que l'ensemble des $\varphi_{T^\sigma_x, T^\sigma_y}$ est une partie relt flt cpte de $C^\infty(G)$, car il est possible de trouver une application bilinéaire continue du produit de deux Hilbert dans un Banach, telle que l'image du produit des deux boules unités ne soit pas flt relt cpte. — Peut-être me trompé-je sur ce point ?

Je vous joins le tirage à part de ma dernière note.

Recevez mes cordiales salutations

A Grothendieck

P.S. Les autres résultats de ma précédente lettre, et de celle-ci, ont été repensés par moi avec assez de soin pour être ~~tout~~ à fait convaincus !

A. Grothendieck
3 chemin du Grand Moulin
Nancy

Nancy le 7.6.51

Cher Dixmier,

Pouvez-vous m'envoyer votre article sur la trace dans les anneaux de type fini, et votre papier aux Annals sur les "fonctionnelles linéaires sur l'ensemble des opérateurs...." ?

Je vous signale une réponse (quasi-triviale) à une question que vous posez dans ce dernier papier (vous en connaissez probablement la réponse aujourd'hui) : vous demandez si dans $\mathcal{T}'$, convergence faible (i.e. : pour $\sigma(\mathcal{T}', \mathcal{B})$) implique convergence forte, pour les suites. La réponse est non, car soit $a \in \mathcal{H}$, $a \neq 0$, l'application $x \to a \otimes x$ de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{T}'$ est évidemment un isomorphisme dans, mais si la propriété envisagée était vraie pour $\mathcal{G}'$, elle le serait pour les schémas en groupes, donc pour K, ce qui est faux.

Je vous envoie mes meilleures salutations

A Grothendieck

Nancy le 2.5.1952

Cher Dixmier,

je n'ai jamais prouvé ni prétendu avoir prouvé le théorème dont tu parles, et qui d'ailleurs est faux. Il est en effet immédiat qu'il équivaudrait à l'énoncé suivant: Si K est un espace compact muni d'une mesure μ, M ~~[illegible]~~ l'espace des fonctions sur K qui sont mesurables pour μ, muni de la topologie de la convergence <u>simple</u>, F un sous-espace de M contenant une suite partout dense, alors il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un compact $K_\varepsilon \subset K$ avec $|\mu|(K \cap \complement K_\varepsilon) < \varepsilon$, les $f \in F$ ayant toutes une restriction à K continue. Or, prends K=(0;1) avec la mesure de Lebesgue, il est (je pense) connu, et facile à démontrer (excellant exercice Bourbaki) qu'il existe une suite de fonctions mesurables sur K ~~continues~~ à laquelle toute fonction numérique définie sur K soit adhérente, ce qui prouve en particulier que M lui-même est déjà séparable, or M est loin d'avoir la propriété voulue !

Néanmoins, ton théorème sous sa forme initiale est vrai si F est métrisable, comme tu t'en es sans doute convaincu tout seul, car on se ramène alors au cas où la fonction faiblement mesurable donnée prend ses valeurs dans une partie <u>équicontinue</u> de F', cas où l'énoncé est trivial et figure déjà dans une rédaction antérieure. Comme le théorème est vrai encore lorsque F est le dual faible d'un espace métrisable séparable F (puisque alors $t \to \lambda_t$ est <u>fortement</u> mes.), ou le dual d'un espace de Banach F' (comme par exemple ℓ^∞) pour lequel la boule unité du dual faible F de F' ~~est~~ admet une suite partout dense (m. méthode que pour F du type $\mathcal{L}$), il reste que dans les cas usuels, le théorème envisagé est valable. On pourrait même remarquer (re-exercice ?) que la catégorie d'espaces localement convexes séparables F pour lesquels l'énoncé envisagé est vrai, est stable pour le produit topologique ou la somme directe d'un ensemble dénombrable d'espaces facteurs, et par l'opération de prendre un quotient ou une topologie moins fine - donc aussi pour les limites inductives dénombrables etc - en fait, on attrappe tous les espaces raisonnables de l'Analyse.

Bien à toi

A Grothendieck