Sao Paulo le 28.6.1954

A. Grothendieck
1052 rua Oscar Freire
Sao Paulo (Brésil)

Cher Dixmier,

Connais-tu la réponse à la question suivante. Soit $\underline{A}$ un anneau d'opérateurs dans un Hilbert H, existe-t-il une projection u de norme l de $R(H)$ sur $\underline{A}$, compatible avec l'involution, et telle que $u(ATB) = Au(T)B$ pour $A, B \in \underline{A}$? C'est vrai si H est de dimension finie (et évidemment c'est bien facile dans ce cas), ou si $\underline{A} \supset \underline{A}'$, et de ce dernier cas on déduit facilement que c'est vrai si $\underline{A}$ est commutative (commencer à appliquer le résultat précédent à un anneau commutatif maximal $\underline{B}$ contenant $\underline{A}$, d'autre part on sait qu'il existe une projection de $\underline{B}$ sur $\underline{A}$ qui a les propriétés voulues). Bien entendu, même si $\underline{A}$ est commutatif maximal, il n'y a pas unicité de la projection u. Voici la démonstration du deuxième cas $\underline{A} \supset \underline{A}'$: Soit K le spectre de $\underline{A}'$, Ω l'ensemble des partitions finies de K en ensembles ouverts et fermés, muni de sa relation d'ordre naturelle; pour $\omega = (\omega_i) \in \Omega$ on pose $u_\omega(T) \sum_i T_{\omega_i} T T_{\omega_i}$, on considère un ultrafiltre sur Ω plus fin que le filtre des sections croissantes, et on pose $u(T) = lim u_\omega(T)$ (limite faible!) – Le problème m'intéresse pour pouvoir ramener les propriétés vectorielles-topologiques d'algèbres autoadjointes uniformément fermées quelconques d'opérateurs, aux propriétés de $R(H)$, d'où facilement aux propriétés de l'algèbre $R_0(H)$ des opérateurs compacts, ce qui ramènera souvent à des propriétés de nature métrique sur les $R(H)$ où H est de dimension finie. De même, les propriétés des espaces duals de C^*-algèbres (et aussi des espaces L^1 qui interviennent en intégration non commutative) se ramèneraient aux propriétés des espaces $H \widehat{\otimes} H$.

A propos, en vue de simplifier l'exposé de Godement sur la transformation de Fourier des groupes loc. comp. unimod., j'ai eu besoin du résultat suivant, qui se démontre assez facilement en se ramenant à $R(H)$: les formes linéaires positives sur une C^*-algèbre engendrent le dual. Cela est-il connu, ou te semble-t-il utile de publier une petite note là-dessus?

J'espère que cette lettre t'arrivera, et que tu pourras me donner une réponse positive. Bien à toi

A. Grothendieck