Sao Paulo le 18.7.1954

Cher Dixmier,

Bien merci pour la copie de ton bouquin, que je n'ai reçu qu'il y a quelques jours, et dont j'ai commencé la lecture avec grand intérêt. Je ne suis pas sur de pouvoir faire des remarques très utiles pour la rédaction, mais bien entendu je lis le crayon à la main, et te communiquerai mes observations à l'occasion. Pour l'instant, je m'aperçois que systématiquement tu n'énonces que pour les seules algèbres de von Neumann des définitions et propositions valables souvent pour des C^*-algèbres arbitraires, c'est parfois dommage. Pour l'instant, je te signale des erreurs (?) de détail. Page 7, il me semble que la caractérisation de T dans le lemme 2, 2^o, n'est pas correcte. Page 12, fin du No 2 à la ligne 5 de la fin, je pense que "et un seul" est faux, déjà si $A_i = B_i = \underline{C}$ (mais n'ai pas cherché le contre-exemple). Page 22 lignes 9-10 "il suffit" est manifestement faux, tu penses sans doute au cas $B = 0$. D'autres remarques plus tard. Quelques questions: une sous-algèbre autoadjointe uniformément fermée de $L(H)$, stable pour le sup des familles filtrantes croissantes majorées, est-elle faiblement fermée? Une C^*-algèbre pour laquelle le sup d'une famille filtrante croissante majorée existe toujours, est-elle isomorphe à une algèbre de von Neumann? Je ne le sais pas même dans le cas commutatif, ce qui prouve que je ferai bien de lire ton article dans "Summa Brasiliensis", as-tu encore des tirages à part? Je suis aussi bien curieux de la suite du bouquin, et te suis reconnaissant pour tout papier que tu peux me passer là dessus. Feras-tu un Plancherel abstrait pour les C^*-algèbres, qui inclurait la théorie des caractères de Godement?

La lecture du début de ton bouquin m'a permis aussi de répondre par l'affirmative à la question de ma lettre précédente (je viens de trouver la démonstration aujourd'hui, et ne l'ai pas encore mise par écrit canoniquement, mais je pense qu'il n'y a pas d'erreur). Soit M une sous-algèbre autoadjointe abélienne maximale dans le commutant de A' de l'algèbre de von Neumann A, on sait qu'il existe une projection de $L(H)$ sur M' ayant les propriétés voulues, il suffit donc de trouver une projection analogue de M' sur A. J'arrive à la prouver par un raisonnement direct (grâce au fait que M' est engendré au sens de v.N. par A et la sous-algèbre abélienne M du commutant de A), tout à fait différent du raisonnement du premier cas, calqué plutôt sur la preuve du théorème analogue, bien connu, pour une algèbre Stonienne plongée dans un $C(K)$. Le raisonnement prouve presque qu'il existe même une projection de M' sur A qui est un homomorphisme, et je pense que ça doit en effet pouvoir se prouver (c'est en tous cas vrai dans le cas de la dimension finie, donc il y a de l'espoir!). – En zornifiant sur l'ensemble des sous-C^*-algèbres B de M' contenant A, pour lesquelles une projection $B \to A$ du type voulu existe, il faut pouvoir passer de B à son adhérence faible (ce qui est un des deux pas essentiels du raisonnement, inutile dans le cas commutatif rappelé plus haut). Pour ça, on doit introduire le bidual B'' de B, le munir canoniquement d'une structure d'algèbre de von Neumann telle que l'application naturelle $B'' \to \overline{B}$ soit un homomorphisme *normal* de B'' sur $\overline{B}$ (*donc se relève*, d'où facilement une application cherchée $\overline{B} \to A$ en composant $\overline{B} \to B'' \to A$). Pour ces histoires de bidual de C^*-algèbre, il faut seulement utiliser le résultat sur le dual que je t'avais signalé dans ma lettre précédante, et qui est presque trivial: *Soit A une C^*-algèbre,*

u une forme linéaire hermitienne continue sur A, alors on a $u = v - w$, où v et w sont positives, et $||v|| + ||w|| = ||u||$. Démonstration: Soit K la partie de A' formée des formes positives de norme ≤ 1, c'est une partie convexe faiblement compacte contenant 0, et il est trivial que pour $x \in A$, x hermitien, on a $||x|| = \mathrm{Sup}|\langle x, x' \rangle|, x' \in K$. Se bornant aux sous-espaces hermitiens de A et A', le théorème des bipolaires montre que la boule unité de A'_h est l'enveloppe convexe symétrique faiblement fermée de K, i.e. l'ensemble des x (??) $\lambda u - \mu w$, où $\lambda, \mu \geq 0$, $\lambda + \mu = 1$, $v, w \in K$ (cet ensemble est déjà faiblement compact, car K l'est), ce qui prouve le théorème. Si on ne suppose plus u hermitienne, on aura $u = v + iw$ avec v, w hermitiennes et $||v||$, $||w|| \leq ||u||$, et on peut appliquer à v et w le résultat précédent. – De plus, le raisonnement prouve que réciproquement, si A est une algèbre normée complète qui satisfait au théorème précédent (mais où on suppose v et w "bornées" – ce qui est automatiquement vrai si A a une unité), alors (du moins sur sa partie hermitienne) sa norme est la norme polaire de K donc une norme satisfaisant aux identités algébriques qui caractérisent les C^*-algèbres. Si on suppose seulement que les formes positives engendrent algébriquement le dual de A, on peut encore dire (en utilisant Baire) que la norme de A est *équivalente* à la C^*-norme polaire de K, donc que par un changement de norme A devient une C^*-algèbre. – Enfin, il est probable que dans l'énoncé du théorème plus haut, v et w soient uniques (peut-être en leur imposant d'autres conditions); il en résulterait que si u est centrale, v et w le sont etc. Mais je ne me suis pas amusé à regarder ça de près.

Merci aussi pour ta lettre où tu réponds à mes questions. Je te salue amicalement

A. Grothendieck