между *двумя* геометриями разной природы: одной дискретной, другой непрерывной. Скорее, сосуществовали две различные точки зрения на исследование *самих* геометрических фигур: одна делала упор на «дискретных» (в частности, численных и комбинаторных) свойствах, другая — на «непрерывных» (таких, как положение в окружающем пространстве, или «размер», измеренный в терминах расстояний между точками фигуры, и т.п.).

Разлад возник в конце прошлого столетия, с появлением и развитием того, что иногда называют «абстрактной (алгебраической) геометрией». В общих чертах она состояла в введении для каждого простого числа p геометрии (алгебраической) «в характеристике p», скопированной с непрерывной модели геометрии (алгебраической), унаследованной от предыдущих столетий, но все же в контексте, который выступал непримиримо «разрывным», «дискретным». Эти новые геометрические объекты приобрели все возрастающее значение в начале века, и особенно ввиду тесной их связи с арифметикой, наукой в полном смысле этого слова дискретной структуры. Похоже, одна из ведущих идей труда *Андрэ Вейля*[38], даже может быть, главная движущая сила (которая, как водится, осталась более или менее невысказанной в его записанных работах), состоит в том, что «собственно» геометрия (алгебраическая), и в особенности «дискретные» геометрии, соответствующие различным простым числам, предоставляют ключ к широчайшему обновлению арифметики. Именно этим духом пронизаны прогремевшие в 1949 году знаменитые *гипотезы Вейля.* Гипотезы совершенно потрясающие, по правде сказать, позволившие предвидеть для этих новых «многообразий» (или «пространств») дискретной природы возможность определенных типов конструкций и рассуждений[39], казавшихся до тех пор немыслимыми вне рамок тех «пространств», которые одни только почитались аналитиками

стояли лицом к лицу с дискретными структурами, самопроизвольно проникшими в геометрию, мне видится в том, что понятие группы (симметрий, в частности) не появлялось вплоть до конца прошлого века — и поначалу оно было введено (Эваристом Галуа) в контексте, который тогда не почитался частью геометрических владений. Правда, что и в наши дни есть немало алгебраистов, все еще не разобравших, что теория Галуа — *видение* по сути своей *геометрическое*, которому удалось обновить наше понимание явлений, именуемых «арифметическими»...

[38] Андрэ Вейль, французский математик, эмигрировавший в Соединенные Штаты, один из «членов-основателей» группы Бурбаки, о которой немало будет сказано в первой части «РС» (как, впрочем, и о самом Вейле).

[39] (Предназначается для читателя-математика.) Речь идет о «конструкциях и рассуждениях», связанных с когомологической теорией комплексных или гладких многообразий, в частности, включающих формулу неподвижных точек Лефшеца и теорию Ходжа.

достойными этого имени — именно, пространства, называемые «топологическими» (для которых применимо понятие непрерывного изменения).

Можно считать, что новая геометрия — это прежде всего прочего *синтез* двух миров, до ее появления смежных и тесно связанных друг с другом, но все же отдельных, различных: *мира «арифметического»*, в котором живут (самозванные) «пространства» без принципа непрерывности, и *мира непрерывных величин*, где обитают «пространства» в собственном смысле этого слова, достижимые средствами аналитика и (по этой самой причине) им же признанные достойными пристанища в городе математических объектов. *В новом видении эти два мира, некогда разделенные стеной, стали как один, сметя границы.*

Впервые это видение *арифметической геометрии* (как я предлагаю назвать новую геометрию) зародилось в форме гипотез Вейля. В процессе развития некоторых моих главных тем[40] гипотезы эти оставались основным источником вдохновения все время от 1958 до 1966 года. Еще до меня, впрочем, *Оскар Зарисский* с одной стороны, затем *Жан-Пьер Серр* с другой, для пространств-без-стыда-и-совести в «абстрактной» алгебраической геометрии развили определенные «топологические» методы, основанные на тех, что прежде были в ходу среди пространств-с-прочными-устоями во всем мире[41]. Их идеи, несомненно, сыграли важную роль в построении новой геометрии, начиная с первых моих шагов; правда, скорее в качестве отправных точек и *инструментов* (которые мне пришлось в той или иной степени переделать для нужд куда более

---

[40] Речь идет о четырех «средних» темах (5–8), то есть темах *топоса*, *мотивов*, *эталььных и l-адических когомологий* и (в меньшей степени) *кристаллов*. Я их извлек на свет одну за другой между 1958 и 1966 годами.

[41] (Предназначается для читателя-математика.) Основным вкладом Зарисского в этом направлении мне представляется введение «топологии Зарисского» (ставшей позднее важным инструментом для Серра в АКП), его «принцип связности» и то, что он назвал «теорией голоморфных функций» — сделавшейся в его руках теорией формальных схем; также «теоремы сравнения» между формальным и алгебраическим (наряду с основополагающей статьей ГАГА Серра, вторым источником вдохновения). Что же до вклада Серра, о котором я упомянул в тексте, он, безусловно, заключается прежде всего во введении в абстрактную алгебраическую геометрию точки зрения *пучков* (предложенной *Жаном Лерэ* десятью годами раньше в совершенно ином контексте), в другой его важнейшей работе АКП («Алгебраические когерентные пучки»), о которой здесь уже говорилось.

В свете этой «поименной переклички»: если бы мне предложили назвать ближайших «прародителей» нового геометрического видения, то имена *Оскара Зарисского*, *Андрэ Вейля*, *Жана Лерэ* и *Жан-Пьера Серра* я бы произнес, не задумываясь. Среди них Серру принадлежит особая роль, так как главным образом через его посредство я ознакомился не только с его собственными идеями, но также с идеями Зарисского, Вейля и Лерэ, немало значившими для зарождения и развития новой геометрии.

широкого контекста), чем источника вдохновения, который продолжал бы питать мои мечты и проекты в течение месяцев и лет. Во всяком случае, было вполне ясно сразу, что, даже преобразованные, инструменты эти были весьма далеки от того, что требовалось уже для первых шагов в направлении фантастических гипотез Вейля.

11.

Две идеи, *схемы* и *топоса*, оказались решающими для зарождения и развития новой геометрии. Возникнув почти одновременно и в тесном симбиозе друг с другом[42], они вместе стали, как *двигательный нерв* для небывалого роста новой геометрии, считая с самого года своего появления. Чтобы закончить обзор моего труда, нужно, по крайней мере, сказать несколько слов об этих двух идеях.

Понятие схемы приходит на ум как самое естественное, самое «очевидное», когда речь идет о том, чтобы собрать в одно бесконечный ряд понятий «многообразия» (алгебраического), с каким приходилось иметь дело раньше (*отдельное* такое понятие для каждого простого числа[43]...). И потом, та же самая схема (или «многообразие» нового вида) одна порождает, для *каждого* простого числа p, однозначно определенное «многообразие (алгебраическое) в характеристике p». Набор этих различных многообразий в различной характеристике можно тогда себе представить чем-то вроде «(бесконечного) веера многообразий» (свое для каждой характеристики). «Схема» *и есть* этот магический веер, соединяющий между собой, как различные «ветви», эти «аватары», или «воплощения», всевозможных характеристик. Она же тем самым обеспечивает эффективный «принцип перехода», чтобы устанавливать связь между «многообразиями»-выходцами из геометрий, ранее представлявшихся в той или иной мере изолированными, отрезанными друг от друга. Теперь они оказались объединенными в одну общую «геометрию» и внутри ее между собой связанными. Ее можно было бы назвать

---

[42] О бурном зарождении новой геометрии (1958 год) идет речь в сноске n° 31. Понятие ситуса, или «топологии Гротендика» (предварительная версия понятия топоса), появляется по горячим следам понятия схемы. Оно, в свою очередь, предоставляет в распоряжение математиков новый язык «локализации» или «спуска», который применяется на каждом шагу при развитии темы и инструмента теоретико-схемных. Понятие топоса, более глубокое и геометрическое, остается невыраженным в явном виде в течение нескольких последующих лет; оно выбирается на свет главным образом начиная с 1963 года с развитием этальных когомологий и понемногу заставляет признать себя первым из основополагающих.

[43] Удобно также включить в этот ряд и случай $p = \infty$, соответствующий алгебраическим многообразиям «в характеристике нуль».

теоретико-схемной геометрией, предварительным наброском «арифметической геометрии», ее бутоном, расцветшим в ходе последующих лет.

Идея схемы сама по себе — простоты младенческой; такая простенькая, такая скромная, что никому до меня и в голову не пришло за ней так низко нагнуться. И до того даже «дурашливая», признаться, что потом еще несколько лет, очевидности наперекор, для многих моих ученых коллег все это выглядело воистину «несерьезно»! У меня, впрочем, месяцы ожесточенного и уединенного труда ушли на то, чтобы убедиться в своем углу, что это действительно «работает» — что новый язык, этакий глуповатый, который я в своей неисправимой наивности упорно стремился испробовать, оказался и впрямь подходящим для того, чтобы уловить, в новом свете и с новой точностью, и в общих отныне рамках, некоторые из самых первородных геометрических предчувствий, связанных с уже существующими «геометриями в характеристике p». Это было своего рода упражнение, сочтенное поначалу дурацким и безнадежным всеми «достаточно компетентными» особами. Один я, без сомнения, мог когда-либо вбить себе в голову взяться работать над подобной нелепостью — и даже (тайным бесом ведомый) успешно завершить, всем чертям назло!

Вместо того чтобы дать сбить себя с толку окружавшим меня законодательным соглашениям о том, что серьезно и что нет, я просто *доверился*, как раньше, тихому голосу вещей, уже звучавшему во мне: ведь я умел прислушаться. Награда не заставила себя ждать, превзойдя всяческие ожидания. В течении этих нескольких месяцев, совсем даже не «нарочно», я нашел инструменты мощные и несомненные в своей эффективности. Они дали мне возможность не только вновь получить (играючи) старые результаты, знаменитые своей сложностью, в более резком свете и их превзойти, но также, приблизившись наконец вплотную, разрешить проблемы «геометрии в характеристике p», которые до тех пор казались вне пределов досягаемости любыми средствами, тогда известными[44].

В процессе нашего познания законов Вселенной (математических или каких еще) только *невинность*, и ничто другое, наделяет нас реформаторской властью. Та изначальная невинность, данная нам от рождения,

---

[44] Отчет об этом «бурном старте» теории схем был предметом моего доклада на Международном Конгрессе Математиков в Эдинбурге в 1958 г. Текст этого доклада мне представляется одним из лучших введений в теорию схем, способным (быть может) увлечь читателя-геометра идеей ознакомиться с внушительным трактатом (позднейшим) «Начала Алгебраической Геометрии», в котором тщательным образом (не опуская ни единой технической подробности) излагаются новые основы и новые методы алгебраической геометрии.

какая обитает в каждом из нас, будучи зачастую объектом нашего же презрения и тайного страха. Она одна объединяет смирение и смелость, благодаря которым мы оказываемся способны проникнуть в суть вещей и впустить вещи внутрь себя, проникшись ими.

Эта власть — отнюдь не особый «дар», как, скажем, исключительная способность рассудка усваивать и управляться легко и ловко с впечатляющей массой известных фактов, идей и технических приемов. Подобные дары без сомнения драгоценны и уж, конечно, достойны зависти тех, кто (как я) не был от рождения наделен ими так щедро — «сверх всякой меры».

Все же не эти дары, и не честолюбие даже самое пылкое, поддержанное непреклонной волей к успеху, позволяют перешагнуть «круги невидимые, но властные», ограждающие Вселенную. Только невинность сумеет их преодолеть, сама того не заметив и не слишком о том заботясь, в минуты, когда мы, с жадностью вслушиваясь в голоса вещей, предаемся во власть этой младенческой игры целиком...

12.

Новаторская идея схемы, как мы уже знаем, дала возможность связать между собой различные «геометрии», соответствующие различным простым числам (или различным «характеристикам»). Каждая из этих геометрий оставалась все еще существенно «дискретной», или «разрывной» по контрасту с традиционной геометрией, доставшейся нам в наследство от прошедших веков (начиная с Евклида). Новые идеи, введенные Зарисским и Серром, вернули в какой-то степени этим геометриям «непрерывное измерение», сразу же перехваченное «теоретико-схемной геометрией», пришедшей с целью их объединить. Но если говорить о «невероятных гипотезах» (Вейля), то до их подтверждения было еще очень далеко. «Топологии Зарисского» были с этой точки зрения настолько грубы, что оставались почти что на уровне «дискретных скоплений». Недоставало, очевидно, какого-то нового принципа, который позволил бы связать эти геометрические объекты (или «многообразия», или «схемы») с привычными («благонадежными») топологическими «пространствами»; скажем, такими, в которых «точки» отчетливо изолированы друг от друга, в то время как в пространствах-без-стыда-и-совести, введенных Зарисским, точки имеют досадную склонность склеиваться между собой...

Решительно, только появление «нового принципа», никак не меньше, могло устроить, чтобы «брачный союз числа и величины (размера)», или «геометрии разрывного» с «геометрией непрерывного» совершился

— как то сулило некое предчувствие, впервые давшее о себе знать языком гипотез Вейля.

Понятие «пространства», без сомнения, одно из самых древних в математике. Оно является до такой степени основополагающим для нашего «геометрического» понимания мира, что принималось на веру, практически не требуя описаний, в течение более чем двух тысяч лет. И лишь в прошлом веке понятие это постепенно освободилось из-под тирании непосредственного восприятия (как единственно пространства, нас окружающего) и связанных с ним традиционных (евклидовых) теоретических разработок, чтобы обрести теперь уже свои собственные динамику и независимость. В наши дни оно входит в число понятий, наиболее часто и повсеместно используемых в математике, безусловно известных всем математикам без исключения. Понятие, впрочем, изменчивое, не поспоришь; у него сотни, тысячи обликов, в зависимости от того, какую структуру ему придать. Есть из них богатейшие (как почтенные «евклидовы» структуры, или «аффинные», или «проективные», или еще «алгебраические» структуры одноименных «многообразий»; эти обобщают все предыдущие, придавая им гибкость), есть аскетически строгие. Последние таковы, что всякий элемент информации «качественной» из них словно бы исчез безвозвратно, и присутствует лишь намек на количественную сущность понятия *близости*, или *предела*[45], и наличествует лишь вернее всего ускользающая от интуиции («топологическая») версия понятия *формы*. Наиболее безыскусное среди всех, *топологическое пространство* в течение истекшей половины столетия играло роль своего рода широкого лона общих концепций, охватывающих все прочие структуры. Изучением таких пространств занимается одна из самых увлекательных, самых животрепещущих ветвей геометрии: *топология*.

Как ни неуловима могла казаться сначала структура «чистого качества», воплощенная в «пространстве» (называемом «топологическим»), при отсутствии каких бы то ни было данных количественной природы (как расстояние между двумя точками, в частности), которые дали бы нам возможность уцепиться за сколько-нибудь привычное интуитивное представление о «величине», или «малости», — в течение минувшего века удалось наконец загнать эти пространства в плотные и гибкие ячейки языка, тщательно «скроенного из кусочков». Более того, изобрели и изготовили целиком эталоны «метра», или «сажени», именно затем, чтобы, всему наперекор, навязать что-то вроде «мер» (названных «топологическими инвариантами») этим пространствам-спрутам, которые, подоб-

---

[45] Говоря о понятии «предела», я подразумеваю здесь в первую очередь «предельный переход», скорее чем понятие «границы» (которое ближе нематематику).

но неуловимым призрачным городам, казалось, ускользали при всякой попытке нанести их на карту с масштабом. Правда, основная часть этих инвариантов, притом самых существенных, более тонкой природы, чем просто «число», или «величина». Скорее, они сами представляют собой более или менее прихотливые структуры, привязанные (посредством конструкций той или иной степени сложности) к пространству, о котором идет речь. Один из самых давних и важнейших таких инвариантов, введенный еще в предыдущем столетии (итальянским математиком *Бетти*), образован различными «группами» (или «линейными пространствами») — так называемыми «когомологиями», соответствующими данному пространству[46]. Это они подают голос (правда, в основном «между строк») в гипотезах Вейля, являясь для них глубоким «оправданием бытия» и придавая им (по крайней мере для меня, «впутанного в это дело» объяснениями Серра) полный их смысл. Но возможность связать

---

[46] По правде говоря, инварианты, введенные Бетти, были *гомологиями. Когомологии*, более или менее эквивалентные им, «дуальные» понятия, были введены гораздо позднее. Этот аспект обрел превосходство над начальным, «гомологическим», главным образом, бесспорно, вслед за введением Жаном Лерэ точки зрения, основанной на понятии пучка, о чем говорится ниже. В техническом отношении можно сказать, что огромная часть моего труда в области геометрии состояла в извлечении на свет и развитии в тех или иных пределах недостающих когомологических теорий для пространств и многообразий всех видов, прежде всего «алгебраических многообразий» и схем. Мне привелось, прокладывая дорогу, истолковать традиционные гомологические инварианты в терминах когомологических, и тем самым представить их в совершенно новом свете.

Есть много других «топологических инвариантов», введенных топологами, чтобы подступиться к того или иного рода свойствам топологических пространств. Если не говорить о «размерности» пространства и (ко)гомологических инвариантах, первые из числа прочих инвариантов — «гомотопические группы». Я ввел новый инвариант в 1957 году: группу $K(X)$ (так называемую «группу Гротендика»), которой сразу же посчастливилось получить признание и чья значимость (как для топологии, так и в арифметике) не устает подтверждаться снова и снова.

Множество новых инвариантов, по своей природе изощренней тех, что в наше время известны и используются, но по моему ощущению совершенно фундаментальных, намечено в моей программе по «ручной топологии» (ее краткий обзор включен в «Набросок Программы», который войдет в четвертый том «Раздумий»). Эта программа основывается на понятии «ручной теории», или «ручного пространства», которое представляет собой, в чем-то как и понятие топоса, (вторую) «метаморфозу понятия пространства». Оно намного прозрачнее (как мне кажется) и не такое глубокое, как это последнее. Я, однако, предвижу, что его воздействие на топологию «собственно говоря» определенно должно быть еще значительней, и что благодаря ему «ремесло» геометра-тополога изменится целиком, сверху донизу — путем глубокого преобразования концептуального контекста, в котором он работает. (Как это уже случилось с алгебраической геометрией после введения точки зрения теоретико-схемной.) Я послал свой «Набросок» нескольким старым друзьям и известным топологам, но непохоже, чтобы содержание их сколько-нибудь заинтересовало…

эти инварианты с «абстрактными» алгебраическими многообразиями, о которых шла речь в этих гипотезах, способом в точности отвечающим прозвучавшим там требованиям, оставалась не более чем надеждой. Сомневаюсь, что кто-либо помимо Серра и меня самого (даже — и в первую очередь — лично Андрэ Вейль!)[47] мог в нее верить…

Незадолго до этого наше представление об этих инвариантах оказалось значительно обогащенным и обновленным работами *Жана Лерэ* (написанными в плену в Германии, во время войны, в первой половине сороковых). Существенно новаторской была идея *пучка* (абелева) над пространством, с которым Лерэ связал соответствующие «группы когомологий» (так называемые «когомологии с коэффициентами в пучке»). Это было как если бы старый добрый, «когомологический», эталон метра, которым располагали до сих пор для «измерения» пространства, превратился вдруг в невообразимое множество новых «метров» всевозможной величины, формы и содержания, каждый внутренне приспособленый к рассматриваемому пространству, о котором поставляет нам сведения с безупречной точностью, причем такие, какие может дать только он один. Это была главная идея в глубоком преобразовании нашего подхода к пространствам всех видов и, безусловно, одна из важнейших идей, появившихся в течении этого столетия. Благодаря прежде всего последующим работам Жан-Пьера Серра, идеи Лерэ уже в первое десятилетие после своего появления на свет принесли такие плоды, как впечатляющий прорыв в развитии теории топологических пространств

---

[47] Парадоксально, у Вейля был прочный «барьер», очевидно, инстинктивный, против когомологического формализма — при том, что именно его прославленные гипотезы в значительной мере послужили основой для развития важнейших когомологических теорий в алгебраической геометрии, начиная с 1955 года (первоначальным толчок процессу был дан Серром, с его основополагающей статьей АКП, уже упоминавшейся в одной из предыдущих сносок).

Мне представляется, что этот «барьер» у Вейля был частью общей неприязни ко всякого рода «нагромождениям», ко всему, что приходилось сродни формализму (и не могло быть изложенным на нескольких страницах), или «конструкции», сколько-нибудь запутанной. В нем определенно не было ничего от «строителя», и очевидно, что именно против воли он был принужден в течение тридцатых-сороковых годов заниматься развитием первоначальных основ «абстрактной» алгебраической геометрии, которые (ввиду степени его расположенности к этому труду) явились воистину «Прокрустовым ложем» для потребителя.

Я не знаю, желал ли он, чтобы я пошел дальше и вложил свои силы в построение больших зданий, которые позволили бы мечтам Кронекера и его собственным воплотиться в языке и инструментах изощренных и эффективных. Он ни словом не откомментировал ни тот труд, в который видел меня погруженным, ни уже готовые части работы. Так же не получил я и отклика на «РС», экземпляр которых послал ему больше чем три месяца назад, с теплой дарственной надписью, сделанной от руки.

(и в частности их инвариантов, называемых «гомотопическими», тесно связанных с когомологиями), и другой, не менее важный, прорыв в так называемой «абстрактной» алгебраической геометрии (с основополагающей статьей «АКП» Серра, опубликованной в 1955 г.). Мои собственные работы по геометрии, начиная с 1955 года, шли в продолжение этих трудов Серра и, тем самым, новаторских идей Лерэ.

13.

Точка зрения и язык пучков, введенные Лерэ, заставили нас рассмотреть «пространства» и «многообразия» всех родов в новом свете. Они не затрагивали, однако, самого понятия пространства, ограничиваясь тем, что предоставили нам возможность, вглядевшись новыми глазами, достичь более тонкого понимания устройства традиционных «пространств», уже всем знакомых. Однако это понятие пространства оказалось неадекватным для того, чтобы дать отчет о наиболее существенных «топологических инвариантах», выражающих «форму» абстрактных алгебраических многообразий (с которыми связаны гипотезы Вейля), даже «схем» вообще (обобщающих старинные многообразия). Для ожидаемого «союза» числа и величины (размера) это ложе было бы решительно тесновато: на нем сумел бы с грехом пополам устроиться разве что один из будущих супругов (именно, невеста), но никак не оба сразу! «Новый принцип», который еще оставалось найти, чтобы свадьба, обещанная добрыми феями, совершилась, был попросту иным, просторным *ложем*, которому недоставало лишь новобрачных — и никто его не замечал до некоторых пор…

Эта «двуместная кровать» возникла (как по мановению волшебной палочки) с появлением идеи *топоса*. Эта идея охватывает в общетопологической интуиции как традиционные топологические пространства, олицетворяющие мир непрерывной величины, вместе с (самозванными) «пространствами» (или «многообразиями») неприкаянных служителей абстрактной алгебраической геометрии, так и бесчисленное множество других типов структур, до тех пор казавшихся безнадежными пленниками «арифметического мира» систем «разрывных», или «дискретных».

Концепция пучков и была тем безмолвным вожатым, тем действенным ключом (отнюдь не тайным), приведшим меня, не петляя и без проволочек, к супружеской опочивальне с просторным брачным ложем. Места в самом деле довольно; это ведь как широкая тихая река, чьи воды до того глубоки, что

«Всем царским коням заодно
Допить до дна бы мудрено…»

— как поется в старинной песенке, которую ты наверное певал и сам, или по меньшей мере слышал. И тот, кто спел ее первым, верней ощутил бы скрытую красоту и спокойную силу топоса, чем любой из моих ученых коллег, прежних учеников и друзей…

Ключ был один и тот же — как при первоначальном, предварительном подходе (через посредство весьма удобного, но менее подлинного понятия «ситуса»), так и в случае топоса. Идею топоса я хотел бы сейчас попытаться описать.

Рассмотрим совокупность *всех* пучков над заданным (топологическим) пространством, или, если угодно, тот диковинный арсенал, образованный *всеми* эталонами метра, служащими для его измерения[48]. Мы рассмотрим эту «совокупность», или «арсенал», как снабженный наиболее очевидной структурой, которую ему можно приписать, так сказать, «на глазок» — именно, структурой, называемой «категорией». (Читателю, не знакомому с термином в техническом смысле, не о чем беспокоиться. Это совсем не понадобится в дальнейшем.) Это нечто вроде «сверхструктуры измерения» по имени «категория пучков» (над рассматриваемым пространством), которая впредь будет считаться как бы «воплощающей» то, что наиболее существенно для пространства. Это законно (с точки зрения «математического здравого смысла»), поскольку оказывается возможным «воссоздать» полностью исходное топологическое пространство[49] в терминах «категории пучков» (или арсенала измерительных приборов), ему соответствующей. (Проверить это — простое упражнение; конечно, когда вопрос уже поставлен…) Ничего больше не нужно для уверенности в том, что (если это почему-либо для нас заманчиво) мы отныне можем «забыть» об исходном пространстве, чтобы держать в уме и использовать только соответствующую «категорию» (или «арсенал»), которая будет рассматриваться как наиболее адекватное олицетворение топологической (или «пространственной») структуры, о выражении которой идет речь.

---

[48] (Предназначено для математика.) По правде говоря, здесь речь идет о пучках *множеств*, а не о *пучках абелевых групп*, введенных Лерэ как самые общие коэффициенты «теории когомологий». Думаю, что я первым начал систематически работать с пучками множеств (начиная с 1955 года, в моей статье «Общая теория расслоенных пространств со структурным пучком», изданной в Канзасском Университете).

[49] (Предназначено для математика.) Строго говоря, это справедливо лишь для пространств, называемых «трезвыми». Они, однако же, составляют почти все типы пространств, с какими обыкновенно сталкиваешься — в частности, таковы все «отделимые» пространства, излюбленные аналитиками.

Как это часто бывает в математике, нам удалось (благодаря решающему влиянию идеи о пучке, или «когомологическом метре») выразить некоторое понятие («пространства», в данном случае) в терминах другого («категории»). Всякий раз открытие такого *перевода* понятия (отражающего определенное положение вещей) на язык другого понятия (соответсвующего ситуациям иного типа) обогащает наше представление о каждом из них путем неожиданного слияния особенностей интуитивного восприятия, характерных для одного и другого. Так, ситуация по природе «топологическая» (воплощенная в данном пространстве) оказывается здесь представленной ситуацией по природе «алгебраической» (воплощенной в «категории»); или, если угодно, «непрерывное», воплощенное в образе пространства, предстает «переданным», или «выраженным» структурой категории, по природе «алгебраической» (воспринимавшейся до сих пор как существенно «разрывная», или «дискретная»).

Более того, первое из этих понятий — пространства — казалось нам в каком-то смысле понятием (по содержательности) «максимальным» — настолько уже обобщенным, что едва ли можно себе представить его расширение, которое оставалось бы в рамках «разумного». Напротив, другая сторона зеркала[50], эти «категории» (или «арсеналы»), с которыми сталкиваются, сойдя с крыльца топологических пространств, имеют весьма частную природу. Они располагают в действительности набором свойств в высшей степени типических[51], что делает их как бы «имитациями» самой простой из них, какую только можно вообразить — той, которую получают, исходя из пространства, сведенного к одной точке. То есть «пространство в новом стиле» (или *топос*), обобщающее традиционные топологические пространства, будет описываться попросту как «категория», которая, не вытекая с необходимостью из обыкновенного пространства, тем не менее обладает всеми хорошими свойствами (единожды четко для всех определенными, разумеется) этой «категории пучков».

* *

*

---

[50] «Зеркало», о котором речь, таково, что если поместить перед ним пространство, оно даст (как в «Алисе в стране чудес») в качестве «отражения» соответствующую категорию, рассматриваемую как что-то вроде «двойника» пространства, «другой стороны зеркала»...

[51] (Предназначено для математика.) Здесь речь идет прежде всего о свойствах, которые я ввел в теорию категорий под названием «свойства точности» (одновременно с современным категорным понятием общих индуктивных и проективных «пределов»). См. русский перевод «О некоторых вопросах гомологической алгебры», Библиотека сборника «Математика», Москва, 1961.

Вот это и есть новая идея. Ее возникновение можно рассматривать как результат наблюдения, сказать по правде, почти детской простоты, что то, что на самом деле важно в топологическом пространстве — это отнюдь не его «точки» и не его «подмножества»[52] с отношениями близости между ними, но *пучки* над этим пространством и *категория*, которую они образуют. В том, чего я добился, я лишь довел до логического конца исходную идею Лерэ — тем самым переступил нечто, *решившись сделать шаг.*

Как сама идея о пучках (принадлежащая Лерэ), или о схемах, как всякая «большая идея» (концепция), которая переворачивает вверх дном закоснелое, устоявшееся мировосприятие, идея топоса ошеломляет своей естественностью, «очевидностью», простотой (на грани, я бы сказал, наивности и простоты даже «глуповатой») — тем особенным свойством, которое так часто вынуждает нас восклицать: «О, это невозможно!» — полуразочарованно, полузавистливо, еще, пожалуй, с оттенком, который можно передать словами «сумасбродно», «несерьезно», припасенными у всех, кто в ужасе шарахается, неожиданно столкнувшись с чем-то простым до неприличия. С тем, что нам напоминает, быть может, дни нашего младенчества, спрятанные глубоко в памяти, ибо мы давно от них отреклись…

14.

Понятие схемы представляет собой значительное расширение понятия алгебраического многообразия, и за счет этого полностью обновляет алгебраическую геометрию, завещанную моими предшественниками. Понятие топоса — расширение или, лучше сказать, *метаморфоза понятия пространства.* Тем самым оно обещает произвести сходное обновление топологии и, за ее пределами, геометрии. Уже сейчас, впрочем, оно успело сыграть решающую роль для расцвета новой геометрии (главным образом через посредство вышедших из него тем l-адических и кристальных когомологий, позволивших доказать гипотезы Вейля). Идея топоса, как и ее старшая сестра (почти близнец), имеет две дополняющие друг друга черты, существенные для полного и плодотворного обновления; вот они.

Во-первых, новое понятие *не чересчур широко*, в том смысле, что на новые «пространства» (лучше называть их топосами, чтобы не задеть чуткого уха)[53] самые важные интуитивные представления и геометриче-

---

[52] Так, можно построить топос весьма «объемный», в котором будет только одна «точка» — или вовсе ни одной!

[53] Название «топос» было выбрано (в связи с понятием «топология» или «топологиче-

ские конструкции[54], знакомые по старым добрым пространствам прежних времен, переносятся более или менее очевидным образом. Иначе говоря, для новых объектов имеется в распоряжении вся богатая гамма мысленных образов и ассоциаций, понятий и определенных технических средств, какие прежде не выходили за границы области объектов старинного толка.

Во-вторых, новое понятие в то же время *достаточно широко*, чтобы охватить все множество ситуаций, в которых, как раньше считалось, не место интуитивным представлениям «тополого-геометрической» природы — именно, тем, какие тогда связывались только с обыкновенными топологическими пространствами (и не без основания…).

С позиции гипотез Вейля решающим здесь является то обстоятельство, что новое понятие в действительности достаточно широко для того, чтобы позволить нам связать с любой «схемой» такое «обобщенное пространство», или «топос» (называемое «этальным топосом» рассматриваемой схемы). С самого начала было похоже, что определенные «когомологические инварианты» этого топоса (все, что есть внутри у этой смешной игрушки!) имели неплохой шанс обеспечить все необходимое для раскрытия полного смысла этих гипотез, и (кто знает!) предоставить, быть может, средства для их доказательства.

Впервые в моей жизни как математика я пользуюсь досугом, чтобы вызвать в памяти и (хотя бы только для себя самого) перенести на эти страницы совокупность главных тем и больших идей, направлявших мой труд. Это помогает мне лучше оценить место и значение каждой из этих тем, и «точек зрения», ими олицетворяемых, в большом геометрическом видении, которое их объединяет и из которого они вытекают. Именно благодаря этой работе явились во всем блеске две новаторские идеи, два двигательных нерва первого и бурного расцвета новой геометрии: идея *схем* и *топосов*.

Глубочайшей из двух мне сейчас представляется идея топосов, то

ский»), чтобы наводить на мысль о том, что речь идет об объекте, в полном смысле слова относящемся к области топологической интуиции. По обилию мысленных образов, которые слово «топос» вызывает, его можно рассматривать как более или менее эквивалент термину «пространство» (топологическое), просто сильнее подчеркивая «топологическую» специфику понятия. (Так, есть «векторные пространства», но не «векторные топосы», вплоть до нового распоряжения!) Необходимо сохранить оба выражения, каждое со своей спецификой.

[54] Среди них есть, в частности, конструкции известных «топологических инвариантов», переведенные на новый язык инвариантами когомологическими. Для этих последних я сделал все, что требовалось, — в статье, уже упоминавшейся («О некоторых вопросах гомологической алгебры», 1961) — чтобы придать им смысл для любого топоса.

есть вторая. Если бы случилось так, что в конце пятидесятых годов я бы *не* засучил рукава, чтобы затем упорно, день за днем, на протяжении двенадцати долгих лет развивать «теоретико-схемный инструмент», по изяществу и мощности совершенный — мне и тогда представляется почти немыслимым, чтобы за десять или двадцать последующих лет другие сумели бы удержаться и не взяться (хоть бы и против воли) за введение в окончательной форме понятия, которое очевидно напрашивалось, не соорудить как-нибудь пускай самых ветхих бараков из «сборных элементов», если не просторные и удобные жилища, как те, какие я собрал по камешкам и воздвиг своими руками. Но ни единого исполнителя не встретил я на математической сцене за три истекших десятилетия, который мог бы обладать такой наивностью, или невинностью, чтобы сделать (вместо меня) этот *иной* шаг, среди всех решающий, введя столь детски простую идею топосов (или хотя бы «ситусов»). И даже если предположить, что она со скрытым в ней робким обещанием уже кем-то любезно предоставлена — я не видел, будь то среди прежних моих друзей или учеников, никого, кто обладал бы достаточной смелостью, и прежде всего *верой*, чтобы довести до конца эту скромную идею[55] (до того с виду смехотворную, в то время как цель казалась удаленной бесконечно…): с первых ее неловких шагов до полной зрелости «искусства этальных когомологий», каковым она стала в моих руках, в течение последующих лет.

15.

Да, река глубока; широки и спокойны воды моего детства, в царстве, как я думал, давно мною покинутом. Все царские кони могли бы прийти к ней заодно, и пить вволю, досыта, допьяна, никогда ее не исчерпав! Воды ее текут из ледников, жгучие, как дальние снега, и есть в них сла-

---

[55] (Предназначается для читателя-математика.) Когда я говорю «довести до конца эту скромную идею», то имею в виду идею этальных когомологий, как подход к гипотезам Вейля. Именно под этим лозунгом произошло открытие мною понятия ситуса в 1958 году и дальнейшее развитие его (или очень близкого к нему понятия топоса) и формализма этальных когомологий под моим руководством (с помощью нескольких сотрудников, о которых я скажу в свое время) между 1962 и 1966 годами.

Говоря о «смелости» и «вере», я веду речь о качествах «нетехнической» природы, мне здесь представляющихся весьма существенными. Могу добавить к их перечню, из другой области, то, что я бы назвал «когомологическим чутьем», то есть интуицией особого рода, выработавшейся во мне при построении когомологических теорий. Я думал передать ее своим ученикам, занимающимся когомологиями. В перспективе шестнадцати лет, считая от моего ухода с математической сцены, констатирую, что ни в одном из них она не сохранилась.

дость глиняных равнин. Я только что говорил об одном из тех коней, которого ребенок привел напоить к реке, и тот пил в свое удовольствие, долго, не торопясь. Я видел там другого, пришедшего как-то по следам того же мальчишки напиться вдоволь, если повезет — но он едва успел хлебнуть из реки. Должно быть, кто-то спугнул его. И это все, много ли сказать. Издалека я смотрел, однако, как табуны лошадей, мучимых жаждой, числом несметные, блуждали по равнине. Но не далее как сегодня утром их ржание разбудило меня, сорвав с постели в неурочный час — меня, которому перевалило за шестьдесят, привыкшего к покою. Что же делать, я должен был встать. Горько было видеть их отощавшими клячами, в то время как ни в хорошей воде, ни в зеленых пастбищах не было недостатка. Но словно бы злые чары чьей-то враждебной тенью упали с небес, стремясь представить дело иначе — окутать надменным холодом все, что я знал теплым и гостеприимным, и закрыть подступы к щедрым водам. Или то проделки барышника, обман, подстроенный, чтобы сбить цену — кто знает? Или вдруг сталось так, что в царской земле нет больше детей, чтобы отвести коней к водопою? Ведь жаждущему коню нужен мальчишка, тот, кто отыщет дорогу к реке…

16.

Идея топоса произошла от идеи схем, и в самый год появления схем, но по значимости далеко превзошла родительницу. Именно тема топоса, и никакая другая, стала «брачным ложем» геометрии и алгебре, топологии и арифметике, математической логике и теории категорий, миру непрерывного и государству структур «разрывных», или «дискретных» (полноводная река — она же…). Если теория схем — *сердце* новой геометрии, тема топоса — ее телесная оболочка, или *жилище*. Это то, что я задумал как самое обширное, чтобы уловить с изысканной точностью и передать языком, богатым геометрическими созвучиями, общую «суть» самых несхожих друг с другом ситуаций, из тех, что то и дело складываются в различных областях просторной математической вселенной.

Тема топоса, однако, слишком далека от того, чтобы познать успех, выпавший на долю схем. Я несколько раз при случае поговорю об этом на страницах «РС»; здесь же не место задерживаться на нелепых превратностях судьбы, поразивших это понятие. Две главные темы новой геометрии вышли все же из темы топоса, две дополняющие друг друга «когомологические теории», задуманные с целью обеспечить подход к гипотезам Вейля: *тема этальная* (или *l-адическая*) и *тема кристаллов*. Первая из них оформилась в моих руках в l-адический когомологический инструмент; похоже, что сейчас это один из мощнейших математических инструментов столетия. Что же до темы кристаллов, чье существование свелось после моего ухода почти к оккультному, она под конец была эксгумирована под светом рампы и под видом заимствования, при обстоятельствах еще более странных, чем те, что сложились вокруг топоса.

l-адический когомологический инструмент стал, как я и предвидел, основным инструментом доказательства гипотез Вейля. Я сам доказал немалую их часть, и последний шаг был довершен мастерски, три года спустя после моего ухода, Пьером Делинем, самым блестящим из моих учеников-«когомологистов».

Я, впрочем, сформулировал к 1968 году более сильную и, главное, более геометрическую версию гипотез Вейля. Они оставались «подпорченными» (если можно так выразиться!) необоримым арифметическим привкусом, хотя, конечно, самый дух этих гипотез в том, чтобы выразить и уловить «арифметическое» (или «дискретное») через посредство «геометрического» (или «непрерывного»)[56]. В этом смысле вариант гипотез, предложенный мной, представляется мне более «верным» философии Вейля, чем его собственный вариант — философии, никогда не записанной на бумаге и редко проступавшей в речи, и ставшей, быть может, *главной* (невысказанной) мотивацией к необычайному расцвету новой геометрии в течение четырех истекших десятилетий[57]. Моя переформулировка состоит, по сути, в извлечении «квинтэссенции» того, что остается применимым в рамках алгебраических многообразий, называемых «абстрактными», классической теории Ходжа, имеющей дело с «обыкновенными» алгебраическими многообразиями[58]. Я назвал «стандартными гипотезами» (для алгебраических циклов) эту новую, совершенно геометрическую, версию знаменитых гипотез.

По моему ощущению, это был новый шаг, после развития когомоло-

---

[56] (Предназначено для математика.) Гипотезы Вейля находятся в зависимости от предположений арифметической природы: именно, рассматриваемые в них многообразия должны быть определены над *конечным* полем. С точки зрения когомологического формализма это приводит к тому, что особое место получает *эндоморфизм Фробениуса*, соответствующий данной ситуации. При моем подходе ключевые свойства (типа «обобщенной торемы об индексе») связаны с *произвольными* алгебраическими соответствиями и не требуют никаких ограничений арифметической природы над основным полем, предварительно заданным.

[57] При этом после моего ухода в 1970 году весьма четко наметилось движение реакции, которое вылилось в ситуацию относительного застоя, о которой я не раз упомяну при случае на страницах «РС».

[58] «Обыкновенные» значит здесь: «определенные над полем комплексных чисел». Теория Ходжа (называемая также гармоническими интегралами) была мощнейшей из известных когомологических теорий в контексте комплексных алгебраических многообразий.

гического l-адического инструмента, по направлению к этим гипотезам. Но в то же время и прежде всего, это был один из возможных принципов подхода к тому, что мне также представляется глубочайшей из тем, введенных мной в математику[59]: к теме *мотивов* (порожденной «когомологической l-адической темой»). Эта тема — как *сердце*, или душа, самая затаенная, лучше всего скрытая от взгляда часть теории схем, которая сама по себе — ядро нового видения. И сколько ни есть ключевых явлений в стандартных гипотезах[60], они могут рассматриваться как составляющие нечто вроде последней квинтэссенции темы мотивов, как *вдохновение*, жизненно важное для самой хрупкой и изощренной из всех тем, «ядра в ядре» новой геометрии.

Вот, в общих чертах, суть вопроса. Мы уже видели, как важно (в особенности с точки зрения гипотез Вейля) для простого числа p уметь построить «когомологические теории» для «многообразий (алгебраических) в характеристике p». Знаменитый «когомологический l-адический инструмент» предоставляет именно такую теорию, и даже *бесконечное множество различных когомологических теорий*, каждая из которых соответствует какому-нибудь простому числу l, отличному от характеристики p. Очевидно, здесь есть «недостающая теория», соответствующая случаю равенства между l и p. Чтобы с этим справиться, я нарочно выдумал другую когомологическую теорию (которая уже недавно упоминалась), называемую «теорией кристальных когомологий». Впрочем, для важного случая бесконечного p имеются в распоряжении еще три когомологические теории[61] — и никакой гарантии, что не придется рано или поздно ввести новые когомологические теории с совершенно аналогичными формальными свойствами. В противовес тому, что творится в обычной топологии, здесь мы поставлены перед фактом ошеломляющего изобилия различных когомологических теорий. Обрисовывается

---

[59] Эта тема — наиболее глубокая по крайней мере за весь «открытый» период моей математической деятельности, между 1950 и 1969 годами, то есть вплоть до того момента, как я оставил математическую сцену. Я считаю тему анабелевой алгебраической геометрии и теорию Галуа-Тейхмюллера, получившие развитие начиная с 1977 года, сравнимыми с ней по значению.

[60] (Предназначается для читателя, занимающегося алгебраической геометрией.) В свое время будет приведена формулировка этих гипотез. Для более подробных комментариев см. «Обзор построек» (PC IV, примечание $n°$ 178, стр. 1215–1216) и сноска на стр. 769 в разделе «Убеждение и знание» (PC III, примечание $n°$ 162).

[61] (Предназначается для читателя-математика.) Эти теории соответствуют, по порядку, *когомологиям Бетти* (определенным с трансцендентной точки зрения, с помощью вложения основного поля в поле комплексных чисел), *когомологиям Ходжа* (определенным Серром) и *когомологиям де Рама* (определенным мной); две последние относятся еще к пятидесятым годам (а теория Бетти — к предыдущему столетию).

вполне отчетливое ощущение (сначала оно было довольно туманным), что все теории стремятся «свестись к одной», что они «дают одни и те же результаты»[62]. Именно затем, чтобы выразить это интуитивное ощущение «родства» между различными когомологическими теориями, я вывел на свет понятие *мотива*, отвечающего алгебраическому многообразию. Этим термином я хотел навести на мысль, что речь идет об «общем мотиве» (или «общей причине»), скрытом в глубине огромного множества различных априори возможных когомологических инвариантов. Эти различные когомологические теории стали бы, как тематические разработки, каждая в «темпе», «ключе» и «ладу» («мажорном» или «минорном»), какие ей подобают — одного и того же «основного мотива» (называемого «*мотивной* когомологической теорией»), который в то же время является наиболее фундаментальным, или самым «утонченным» из всех этих различных «воплощений» темы (то есть из всех возможных когомологических теорий). Так, мотив, соответствующий алгебраическому многообразию, образовывал бы «окончательный», «в полном смысле этого слова», когомологический инвариант, из которого все прочие (соответствующие всевозможным когомологическим теориям) выводились бы, как «воплощения» музыкальной темы, ее различные «реализации». Все важнейшие свойства когомологий многообразия проявлялись бы (или «слышались бы») уже в соответствующем мотиве, как если бы знакомые свойства и структуры на отдельных когомологических инвариантах (l-адических или кристальных, например), стали бы попросту точными отражениями свойств и структур, *заключенных в мотиве*[63].

---

[62] (Предназначается для читателя-математика.) Например, если f — эндоморфизм алгебраического многообразия X, индуцирующий эндоморфизм пространства когомологий $H^i(X)$, «характеристический многочлен» последнего должен быть многочленом с *целыми* коэффициентами, не зависящими от выбора конкретной когомологической теории (например, l-адической для различных l). То же верно для общих алгебраических соответствий, если X собственное и гладкое. Печальная истина (дающая представление о плачевном состоянии заброшенности когомологической теории алгебраических многообразий в характеристике $p > 0$, считая с моего ухода) состоит в том, что это не доказано по сей день даже для частного случая, когда X есть гладкая проективная *поверхность* при $i = 2$. В действительности, насколько мне известно, никто после моего ухода не соизволил поинтересоваться этим важнейшим вопросом, типичным из тех, что вытекают из стандартных гипотез. Согласно велению моды, единственный эндоморфизм, достойный внимания — это эндоморфизм Фробениуса (с которым, отчасти, сумел разделаться Делинь, подручными средствами...).

[63] (Предназначается для читателя-математика.) Другой способ представить себе категорию мотивов над полем k — рассмотреть ее как что-то вроде «обертывающей абелевой категории» для категории отделимых схем конечного типа над k. Мотив, соответствующий такой схеме X (или «мотивные когомологии X», которые я обозначаю $H^*_{mot}(X)$) оказывается, таким образом, некоей абелианизированной «аватарой»

Вот, выраженная языком не математической техники, но музыкальной метафоры, квинтэссенция еще одной идеи младенческой простоты, тонкой и смелой одновременно. Я развивал эту идею в рамках основных задач, которые считал наиболее неотложными, под заголовком «теория мотивов», или «философия (йога) мотивов», во все время с 1963 по 1969 год. Эта теория, с ее завораживающим структурным богатством, во многом остается еще на стадии предположений[64].

Я несколько раз говорю на страницах «РС» о «йоге мотивов» — о том, что представляется мне особенно важным. Здесь излишне рассуждать о том, о чем уже сказано в другом месте. Достаточно указать, что сами «стандартные гипотезы» берут начало в мире йоги мотивов, вытекая из нее естественным образом. В то же время они предоставляют принцип

X. Самое важное здесь, что совершенно так же, как алгебраическое многообразие X поддается «непрерывной деформации» (его класс изоморфизма зависит от непрерывных «параметров», или «модулей»), мотив, соответствующий X, или, более общо, «переменный» мотив, также поддается непрерывной деформации. Этот аспект мотивных когомологий находится в разительном контрасте с тем, что происходит со всеми классическими когомологическими инвариантами, в том числе l-адическими, за единственным исключением когомологий Ходжа комплексных алгебраических многообразий.

Это дает представление о том, до какой степени «мотивные когомологии» суть более тонкий инвариант, окруженный «арифметической формой» (если возможно отважиться на такое выражение) многообразия X куда плотнее, чем традиционные инварианты, чисто топологические. В моем восприятии мотивов они представляются, как что-то вроде «пуповины», незаметной, скрытой от взгляда, который связывает алгебро-геометрические свойства алгебраического многообразия со свойствами «арифметической» природы, воплощенными в его мотиве. Последний может рассматриваться, как объект, по духу «геометрический», но в котором «арифметические» свойства, определяемые геометрией, оказываются, так сказать, «обнаженными» и выставленными напоказ.

Итак, мотив представляется как глубочайший «инвариант формы» из тех, что вплоть до настоящего момента удавалось связать с алгебраическим многообразием, помимо его «мотивной фундаментальной группы». И тот и другой инварианты предстают передо мной, как «тени», проявления «мотивного гомотопического типа», которые остается описать (и о которых я скажу несколько слов в примечании «Обзор построек, или инструменты и видение» (РС IV, $n°$ 178, см. постройка 5 (Мотивы), и в особенности стр. 1214)). Именно этот последний объект, мне кажется, должен стать наиболее совершенным воплощением ускользающего интуитивного представления об «арифметической (или мотивной) форме» произвольного алгебраического многообразия.

[64] Я излагал свою точку зрения на мотивы тем, кто желал выслушать, на протяжении всех этих лет, не взяв на себя труда что бы то ни было опубликовать на этот предмет (в других насущных вопросах не было недостатка). Позже это дало возможность кое-каким из моих учеников «заимствовать» с пущей непринужденностью, под трогательным присмотром всех разом моих старинных друзей, прекрасно знакомых с истинным положением дел. (См. последующую сноску.)

подхода к одной из возможных конструкций понятия мотива.

Эти гипотезы мне казались, кажутся и сейчас, одним из двух наиболее основополагающих вопросов алгебраической геометрии. Ни они, ни другая, также важнейшая, проблема (так называемая «проблема разрешения особенностей») не разрешены до сих пор. Но в то время как вторая из них высится, сегодня, как и сто лет назад, громадой великолепной и грозной, те, что я имел честь поставить, неоспоримым приговором моды отнесены (в годы, последовавшие за моим уходом с математической сцены, и в точности как собственно тема мотивов[65]) к разряду прелестной гротендической чепухи. Но я снова забегаю вперед...

17.

По правде сказать, я не так уж много и подробно раздумывал над гипотезами Вейля. Иная, широкая панорама уже начинала разворачиваться передо мной. Я старался уловить взглядом все, что мог, и изучить тщательно, ничего не упустив. То, что я видел перед собой, выходило далеко за пределы (предположительных) нужд доказательства, оставляя позади даже то многое, что можно было предвидеть, вооружившись оптикой этих гипотез. С появлением теорий схемы и топоса мне вдруг открылся новый, неожиданный мир. «Гипотезы», бесспорно, занимали в нем центральное положение: как столица обширной империи, где не счесть провинций. Но, как правило, между этим почтенным, великолепным городом и отдаленными областями огромной страны нет настоящей связи: дальние дороги, ненадежная почта... Прямо себе этого не говоря, я все же знал, что отныне служу великой задаче. Мне предстояло исследовать огромный, неведомый мир: изучить его географию, вплоть до самых удаленных границ, исходить все дороги; тщательно, одну за другой, описать ближайшие, наиболее доступные провинции. И все свои находки нанести на карту — как можно точнее и подробнее, до последней деревушки, до самой скромной хижины в ней.

На эту-то работу в основном и уходили мои душевные силы. То был терпеливый и долгий труд по закладке основ, который я один перед собой видел ясно, и, главное, «нутром чувствовал». Далеко опередив

---

[65] В действительности, эта тема была эксгумирована в 1982 году (годом позже, чем тема кристаллов) под тем же названием на этот раз (и в более узкой форме: дело ограничивалось случаем основного поля характеристики нуль), только имя задумавшего ее работника не произносилось. Это один пример из множества прочих, когда тема или понятие, похороненные тут же после моего ухода как безумные гротендические причуды, бывали извлечены из могил одна за другой некоторыми из моих учеников в ходе десяти-пятнадцати последующих лет со скромным достоинством и (нужно ли уточнять) без упоминания работника...

в этом отношении все остальные задачи, он забрал себе наиболее внушительную часть моего времени, между 1958 (когда, одна за другой, появились теории схем и топосов) и 1970 (годом моего ухода с математической сцены).

Впрочем, я нередко в нетерпении грыз удила, проклиная каждую задержку. Эти бесконечные задачи давили мне на плечи неотвязным, назойливым грузом. Ведь, как только по сути в них разберешься, новизна пропадает, а то, что остается на ее месте, льнет к рукам бытовой рутиной. И тогда — какой уж там бросок в неизвестное! Так, хлопоты по хозяйству... Вот и приходилось постоянно сдерживать в себе стремление пуститься вскачь — инстинкт первооткрывателя, отправляющегося на поиски никому не ведомых, безымянных миров (а они все звали и звали меня, заглядывали в глаза, просили назвать по имени...). Эта тяга, которой я мог давать волю не иначе, как изредка и почти украдкой, все эти годы получала лишь скудное удовлетворение.

И все же, по сути я знал, что передаваемая ей доля энергии — ворованная (иначе не скажешь) у моих «задач» интендантского толка — обретала по дороге иную, редкую, изысканную структуру. И не мудрено, ведь ее путь лежал через творчество. В чем его и искать, как не в напряженном внимании, с которым вслушиваешься в голоса вещей, стремясь различить зов того, что просит себе плоти, чтобы появиться и жить... В темноте, среди тайных, бесформенных, влажных складок питающего лона, возможен лишь неясный намек на очертания — и неуклонная, страстная воля родиться на свет. Говоря о труде открытия, как не признать, что в этом напряженном внимании, в этой жаркой заботе и есть его главная сила. Так, проникая под слой питательной почвы, солнечное тепло торопит семена. Навстречу его ласке из земли, как некое чудо, пробиваются едва заметные ростки; созревший бутон раскрывается и видит свет дня.

Оглядываясь на свой жизненный труд как математика, я угадываю в нем действие двух сил, или стремлений — различной природы, равно глубоких. Чтобы их обозначить, я выбрал, во-первых, образ *строителя*, во-вторых — *первопроходца*, или исследователя. Поставив их рядом, я вдруг поразился, до чего оба они «мужественны», «ян», даже «мачо»[66]! У этих слов гордое звучание мифа, в них слышится эхо «великих событий». Несомненно, эти образы были мне навеяны остатками моего прежнего, «героического» представления о творчестве; уж оно-то в свое время было «янь» с ног до головы и выше. В таком виде они создают сильно искаженное, чтобы не сказать застывшее по стойке смирно, впе-

---

[66] macho (исп.) — мужчина, мужской — *прим. перев.*

чатление о действительности, которая на деле гораздо проще, скромнее, подвижней, — она живая, попросту говоря.

В мужественном стремлении «строителя», которое, казалось бы, должно без устали толкать нас к новым постройкам, я различаю, однако же, страстишку домоседа, от души привязанного к какому-то *одному* дому. Прежде всего прочего, это *его* дом, то есть нечто *близкое*; это большое живое существо, частью которого он себя ощущает. И лишь во второй черед, по мере того как расширяется круг вещей, воспринимаемых, как близкие, здание оказывается «домом для всех». И в этом стремлении «строить дома», заняться зодчеством (как «занимаются» любовью...), есть еще, и прежде всего, нежность. Это желание *прикоснуться* к тем материалам, которые нужно обрабатывать один за другим — с любовной заботой, которая рождается именно от такого тесного контакта. А когда воздвигнуты стены, уложены балки и крыша на месте, приходит вкус к новой работе. Тогда, шаг за шагом обустраивая дом изнутри, чувствуешь глубокое удовлетворение, глядя, как среди спален, кладовых и гостиных устанавливается особый порядок, ровное согласие гостеприимного дома — красивого, удобного для жизни. Ведь он, *тот самый дом*, — тоже образ матери. Это то, что окружает и защищает нас, то, что нас укрывает от бед и ободряет. И быть может (где-то на более глубоком уровне; пускай мы в эту самую минуту строгаем балки, кладем кирпичи, чтобы на голом пустыре выросло строение), дом этот и есть то, откуда вышли мы сами, то, что в нашей незавершенности защищало и питало нас в те странные, незабываемые времена, до нашего рождения... Это тоже *Лоно*.

И вот образ, только что явившийся сам собою, чтобы, опрокинув тесные рамки громкого символа «первооткрыватель», передать как будто глубоко запрятанную, но обретенную вновь реальность вещей, на глазах теряет всякую «героическую» окраску. И в памяти снова всплывает все тот же архетипический образ материнства — питательной «матки», с ее тайными, неясными трудами живорождения...

Итак, я думал, будто природа этих двух стремлений совершенно различна, а они, глядишь, оказались до того похожи между собой, что я не устаю изумляться. И то и другое по сути — *желание обрести контакт*, и каждое из них влечет нас не далее, чем к новой встрече с *Матерью*. Ведь Она воплощает для нас обе стороны окружающего нас мира: как то, что нам близко, знакомо в нем, так и то, что неизвестно. Отдаться на волю любого из этих стремлений — значит *вернуться к Матери*. То есть заново соприкоснуться с тем, что нам так *близко*, знакомо как будто бы — и в то же время где-то совсем далеко, как темная звезда над горизонтом. Но, неведомое нам, оно все же бывает предпослано странным чувством; переживая его, мы узнаем.

Разница здесь в окраске, в том, как смешаны ингредиенты — совсем не в природе. Когда я «строю дома», преобладает знакомое, когда «исследую» — неизвестное. Эти два «способа» открытия, или, лучше сказать, две стороны одного и того же процесса, нельзя отделить друг от друга. Оба существенны; в работе они друг друга дополняют. Оглядываясь на свой математический труд, я вижу, что равновесие сил в нем подчинялось закону маятника. Первый из двух аспектов, начиная преобладать, словно уже готовился дать место второму[67]. Но при этом совершенно ясно, что во всякую минуту присутствуют оба импульса. Когда я возвожу дома, их обустраиваю, или убираю строительный мусор, тогда я нахожусь на склоне «ян», так что «мужественная» сторона творчества задает тон. Когда же я, пробираясь вперед наощупь, исследую бесформенное, неуловимое, еще безымянное, тогда я на «инь», женском, склоне моего бытия.

Я совсем не намерен преуменьшать здесь значение того или иного аспекта своей природы, и уж тем более отрицать его. Зачем, ведь каждый из них по-своему важен: «мужской», который строит и порождает, и «женский», который, зачиная, хранит в себе медленное, скрытое от глаз вынашивание плода. Я «есмь» и то, и другое — «ян» и «инь», мужчина и женщина. Но я знаю и то, что самая тонкая, самая изысканная сущность творчества обретается все же на склоне «инь», женском — пускай он скромен, небросок и зачастую непригляден на вид.

Думаю, что как раз на этот склон меня всегда и тянуло в работе, притом с особенной силой. Действующие правила, однако, призывали меня вкладывать львиную долю своей энергии в труд с преобладанием другого аспекта — в тот, что воплощается в осязаемых «продуктах» (хочется сказать, законченных и готовых на продажу). И в этих-то продуктах, чьи контуры прочерчены как нельзя более отчетливо; как обтесанный камень, весомых и непреложных в своей реальности, подобный труд, конечно, находит неоспоримое подтверждение...

Сейчас, в перспективе, я ясно вижу, как это всеобщее соглашение да-

---

[67] То, что я говорю здесь о математической работе, столь же справедливо для труда «медитации» (о котором в том или иной мере говорится на всем протяжении «РС»). Я уверен и в том, что нечто подобное возникает на пути всякого труда открытия, включая работу художника (скажем, поэта или писателя). Два «склона», которые я пытаюсь здесь описать, можно рассматривать и по-другому: первый связан с *выражением* готовых идей и возникающими при этом потребностями технического толка; на второй же переходишь, чтобы *принимать сигнал* (то есть ощущения, впечатления всякого рода). Напряженное внимание, преобразуя такой сигнал, делает его источником *вдохновения*. Оба аспекта присутствуют в каждый момент работы; преобладает, по очереди, то один, то другой.

вило на меня — и как я был собственной податливостью обречен нести этот груз. Доля «зачатия», или «исследования», в моей работе оставалась более чем скудной вплоть до того, как я ушел со сцены — пусть так. И все же, в эту минуту оглядываясь назад, на то, что все это время представляла собой моя работа как математика, я понимаю ясно, как никогда, что основным ее содержанием и главной силой она обязана именно тому аспекту труда, каким в наши дни принято пренебрегать. А если его замечают, то говорят о нем высокомерно, с насмешкой. Это тот склон, где обретаются *идеи*, даже *грезы* — никак не «результаты». На этих страницах я попытался уяснить себе, что же особенно существенного я сделал в современной мне математике. Мне хотелось охватить взглядом лес, не задерживаясь на отдельных деревьях. Так вот, я увидел не список «великих теорем», а живой веер плодотворных идей[68], которые, сложившись вместе, предстали моему взгляду единым, широким видением.

18.

Когда это «предисловие» стало превращаться в «прогулку» вдоль моего труда как математика, с небольшой речью о «наследниках» (прочно вжившихся в роль) и «строителях» (неисправимых), начало вырисовываться также недостающее *название* этому предисловию, и звучало оно как «Ребенок и строитель». С течением дней делалось все яснее, что «ребенок» и «строитель» — один и тот же персонаж. И тогда название стало проще: «Строитель-дитя». Имя, право, не хуже, чем у других, да и я был им доволен!

Но вот, поразмыслив, мы пришли к тому, что этот гордый «строитель», или (скромнее) ребенок-который-играет-в-постройку-домов, — лишь одно из лиц знакомого всем играющего-ребенка, у которого их *два*. Есть еще ребенок-который-любит-изучать-предметы, всюду совать нос, прятаться в песке или в грязной тине, или в прочих безымянных, нele-

---

[68] Это не значит, что в моей работе не хватает так называемых «великих теорем». Их довольно, включая те, которые впервые разрешали давно висевшие в воздухе (не мной поставленные) вопросы. (Я сделал обзор некоторых из них в сноске на стр. 554 — в примечании «Море, которое вздымается...» (РС III, n° 122).) Но, как я подчеркнул в начале этой «прогулки» (на этапе «Точки зрения и видение, §6), эти теоремы обретают для меня свой полный смысл лишь в щедром на толкования контексте единой темы, порожденной одной из таких «плодотворных идей». Тогда уже их доказательство легко вытекает из самой природы, из «глубины» несущей их темы. Так волны в реке свободно рождаются от самой водяной глуби и несутся вперед плавно, без усилий. Я говорю о том же самом, используя иные образы, в примечании «Море, которое вздымается...» (см. выше).

пейших, невозможнейших местах. Без сомнения, желая обмануть (себя, а то кого же), я принялся давать ему новые клички — сверкающее имя «пионера» и, вслед за ним, более приземленное, но еще ярче окруженное ореолом, — «исследователя». Спрашивается, из пары «строитель» и «пионер-исследователь», который мужественней, кто привлекательней? Орел или решка?

И затем, присмотримся немного ближе: вот он, наш отважный «пионер», в конце концов явившийся *девочкой* (а мне-то нравилось наряжать ее мальчишкой) — сестрой темных запруд, грозовых туч, туманных завес ночи, молчаливой и почти невидимой из-за своей привычки держаться в тени; той, о ком от века никто и не вспомнит (разве только затем, чтобы, ломаясь, посмеяться над ней...). Я и сам отлично сумел найти средство день за днем не вспоминать о ней, забыть дважды, позволю себе сказать: я сначала желал видеть только одного мальчика (того, кто играет в постройку домов) — и даже когда просто нельзя было не заметить присутствия *другого*, я опять увидел мальчишку, в ней тоже...

Что касается красивого названия для моей «прогулки», критики оно не выдерживает. Это имя уж очень «ян», с ног до головы «мачо»; выбор хромает. Чтобы ему снова не пойти вкривь, нужно взять под руку *другого* — другую, ведь она тоже здесь. Но вот что странно: эта «другая» *воистину не имеет имени*. Единственное, которое как-то с ней вяжется — «исследователь», но это снова имя для мальчика, ничего не попишешь. Тут сам язык подлец; мы ловимся к нему на крючок, даже не замечая того, а ведь он явно в сговоре со старинными предрассудками.

Можно было бы, наверное, выкрутиться с «ребенком-который-строит» и «ребенком-который-исследует». Бросивши недосказанным то, что один — «мальчик», а другой — «девочка», и то, что это один и тот же ребенок, мальчик-девочка, который, строя, исследует и, исследуя, строит... Но давеча, вдобавок к двойному склону инь-ян того, что созерцает и исследует, и того, что называет и строит, открылась еще одна сторона сути вещей.

Вселенная, Мир, даже Космос — вещи по существу странные и от нас чрезвычайно далекие. На самом деле они нас не затрагивают. Самые глубинные наши мотивы, ответственные за тягу к познанию, не к *ним* влекут нас. Нас манит их *Идея во плоти*, непосредственная и осязаемая, самая близкая, самая «чувственная», богатая ассоциациями, красками и отзвуками, полная тайны — Та, что сливается с истоками нашего плотского бытия, как родная по крови, и Та, что во все времена внимает нам, готовая нас принять «на другом конце пути». И это к *Ней*, к Матери, родившей нас, как она родила Мир, пробивается родник души, импульс, влекущий нас за собой, к Ней стремятся пути желания, ведя нас обрести Ее вновь, вперед и по кругу неустанно, чтобы, погрузившись, вернуться к Ней...

Итак, непредвиденный поворот дороги во время «прогулки» дал мне возможность вдруг воскресить в памяти как будто знакомую, но слегка позабытую притчу о «*Матери и ребенке*». Можно назвать ее иначе, «*Жизнь, как путешествие к ее сути*». Или, на более скромном уровне правды одного человека, это притча «*Бытие, или поиск*».

Это притча, и это выражение опыта предков, чьи корни в душе крепки — мощнейшего среди первородных символов, питающих глубокие творческие пласты. Я думаю, что узнал в ней, пересказанной древним языком архетипов, само дыхание творческой силы в человеке, живительное для его плоти и духа, слышное в его проявлениях самых мимолетных и незаметных, различимое в самых ярких и долговечных.

Это дыхание, как и родственный ему образ во плоти, родом из самого скромного мира. Но кто заметит его — а если это вдруг случится, кто тогда не пожмет плечами, в спешке отводя глаза от какой-то беззащитной, немыслимо хрупкой его оболочки... И пока ты живешь, история превратностей, выпавших на долю этого дыхания-вдохновения — это *твое* приключение, «приключение познания». Притча о ребенке и матери вечно без слов о нем говорит.

Ты сам ребенок, происшедший от Матери, защищенный Ею, вскормленный ее могуществом. И ребенок тянется к Матери, Совсем-родной, Близко-знакомой — к встрече с Ней, не знающей предела, всегда неизвестной и полной тайны...

Конец «Прогулки по творческому пути».

Эпилог: *Невидимые Круги.*

19.

До появления точки зрения топосов, к концу пятидесятых годов, эволюция понятия пространства мне представляется по существу *непрерывной*. Она проистекала как бы гладко, без скачков и резких поворотов, начиная с евклидовых теоретических разработок на предмет окружающего нас пространства и с геометрии, что досталась от греков, увлекавшихся изучением некоторых «фигур» (прямых, плоскостей, кругов, треугольников и пр.), обитающих в этом пространстве. Конечно, способ восприятия «пространства» математиками (или «естественными философами») претерпевал глубокие изменения[69]. Но и эти изменения, на мой взгляд, умещались целиком в природе самой «непрерывности» — никогда они не ставили математика, связанного (в точности, как любой из нас) системой привычных мысленных образов, перед чем-либо чужеродным, неуютным, приводящим во внезапное *замешательство*. Так меняется для нас, значительно, но постепенно, некто, кого мы знали еще ребенком, и чья эволюция с годами происходила на наших глазах, с первых его шагов до отрочества и полной зрелости. Меняется неуловимо в какие-то, иногда долгие, периоды затишья — и, бывает, бурно, явственно, в короткий срок. Но даже в периоды роста или самого напряженного взросления, пускай мы потеряли его из виду на месяцы, а то и на годы, мы ни на секунду не поколеблемся, не усомнимся: это все он же, он самый, существо прекрасно знакомое и привычное, и уж его-то мы узнаем, как время ни шути.

Полагаю, можно сказать, впрочем, что к середине нашего столетия это привычное создание уже изрядно состарилось — эдакий человече, который вконец износился, истощив былые силы, так что наплыв новых задач, к каким он совершенно не был подготовлен, оказался ему не по силам. Да он мог уже преспокойно отдать богу душу; никто не позаботился бы обратить на это внимание или, скажем, составить бумагу. «Все на свете» усердно старались бы представить дело так, будто он еще жив, по-прежнему хлопоча вовсю в его доме; глядишь, тут и вышло бы, что покойник словно и впрямь почти не мертвец.

Вообразите же себе, однако, досаду завсегдатаев этого дома, когда на месте почтенного старца, прямого, как палка, застывшего в своем кресле, они, приходя, застают резвящимся здоровехонького мальчишку, от горшка два вершка. А он им мимоходом, совершенно серьезно и как будто это само собой разумеется, заявляет, что «Его милость Пространство» (и можете впредь обходиться без «Вашей милости», к чему церемонии) — это он и есть! И пускай был бы хоть намек на фамильное сходство — побочный сынок, там уж кто знает... так ведь нет! Как будто ничего, отдаленно напоминающего старого Папашу Пространство, так хорошо им знакомого (или это им так казалось...), и на чей счет уж во всяком случае (и помыслить-то невозможно, чтоб вышло иначе)

---

[69] Сначала, приступая к Эпилогу, я собирался включить в него сжатый обзор некоторых из этих «глубоких изменений» и вкратце осветить эту «непрерывность по существу», как она мне виделась. Все же я передумал, дабы «Прогулка» не затянулась чрезмерно — и так уж она куда длиннее, чем я ожидал. Предполагаю вернуться к этому вопросу в Исторических Комментариях, намеченных для четвертого тома «РС», обращаясь на этот раз к читателю-математику (что должно полностью изменить задачи изложения).

была уверенность, что он будет всегда.

Вот *оно*, пресловутое «перерождение понятия пространства». Это *его* я «видел», как нечто несомненное, ни разу не попытавшись описать для себя картину словами — вплоть до самой минуты, когда пишутся эти строки. И я вдруг осознал с новой ясностью (сработала последняя метафора и тут же навеянная ею целая туча ассоциаций): традиционное понятие «пространства», и родственное ему понятие «многообразия» (любого, и в особенности «алгебраического»), к тому моменту, когда я зашел в их края, стали совсем дряхлыми и немощными — все равно, как если бы они и впрямь уже отдали Богу душу[70]. И можно сказать, что когда появились одна за другой точка зрения *схем* (и ее потомство[71], и в довершение ко всему десять тысяч страниц оснований), а затем точка зрения *топосов*, кризис-скрывавший-свое-имя оказался наконец разрешенным.

Что касается нашей недавней аллегории с мальчишкой на месте Папаши-Пространства, здесь нужно говорить не об одном дитяти, возникшем в результате внезапной мутации, но о *двоих*. Двое ребятишек, имеющих между собой несомненное «фамильное сходство», даже если в них нет ничего общего с усопшим старцем. И еще можно сказать, присмотревшись, что крошка Схема — как бы «переходное звено» родственной цепочки, связывающей покойного Батюшку Пространство (он же Многообразие, любого вида) с малышкой Топосом[72].

---

[70] Это утверждение (некоторым оно представляется чересчур категоричным) вполне выверено здравым смыслом. Оно ни более, ни менее соответствует действительности, чем утверждение (к нему я еще вернусь ниже) о том, что «ньютоновская модель» механики (земной или небесной) была «при смерти» в начале этого века, когда Эйнштейн явился ей на выручку. Несомненно, что еще и теперь для большей части «повседневных» ситуаций в физике модель Ньютона совершенно адекватна, и было бы нелепо (ввиду допустимой степени точности измерений) отправляться на поиски релятивистской модели. Точно так же, во многих ситуациях в математике привычные старинные понятия «пространства» и «многообразия» остаются абсолютно адекватными, так что нет нужды в погоне за нильпотентными элементами, топосами или «ручными структурами». Но и в том и в другом случае для растущего числа контекстов, участвующих в современных исследованиях, самые «обычные» ситуации не умещаются в рамках старинного восприятия.

[71] (Предназначено для математика.) К этому «потомству» я отношу, в частности, формальные схемы, стэки (орбиобразия, «пространства» модулей — устоявшегося русского термина нет — *прим. перев.*) всех видов (особенно схемные, или формальные), наконец, так называемые «жесткие аналитические» пространства (их ввел Тэйт, следуя плану работ, который я составил, основываясь на новом понятии топоса, и в то же время на понятии формальной схемы). Это, впрочем, далеко не полный список…

[72] Случилось так, впрочем, что к этим двоим младенцам прибавился третий, еще младше, который появился на свет в менее мягкие времена — малютка *ручное Про-*

20.

Ситуация представляется мне весьма сходной с той, что сложилась в начале нашего века, с появлением теории относительности Эйнштейна. То был концептуальный тупик, еще более явный, воплотившийся в неожиданном *противоречии*, которое казалось неразрешимым. Как ей и положено, новая идея, которая восстановила порядок в наступившем было хаосе, оказалась простой по-младенчески. Примечательно, что (точь-в-точь по сценарию, который разыгрывается вновь и вновь...) среди всех этих блестящих, выдающихся, авторитетных ученых, которые разом бросились вдруг «спасать все, что еще не поздно», ни один не додумался до этой идеи. Должно было случиться, чтобы безвестный молодой человек, едва закончивший (если довелось) учиться в университете, явился (слегка смущенный, быть может, собственной дерзостью...) и объяснил прославленным старейшинам от науки, что нужно сделать, чтобы «спасти положение»: это перестать разделять пространство и время[73]! Технически, все тогда сложилось удачно для того, чтобы эта идея появилась и была воспринята. И, к чести старших коллег Эйнштейна, они в самом деле сумели воспринять новую идею, не слишком ворча и досадуя. Вот знак, что то была все же великая эпоха...

С математической точки зрения новая идея Эйнштейна была банальна. Для нашего восприятия *физического пространства*, напротив, это была глубокая перемена, внезапно смешавшая карты. Первая мутация своего рода, считая от математической модели физического пространства, предложенной Евклидом 2400 лет назад, которую все физики и астрономы (включая Ньютона) подправляли время от времени для нужд механики, как земной, так и небесной.

Исходная идея Эйнштейна впоследствии сделалась глубже, получив воплощение в более тонкой, богатой и гибкой математической модели, при поддержке богатейшего арсенала уже существующих математических понятий[74]. С появлением «общей теории относительности» эта

странство. Как я уже отмечал выше, у него нет свидетельства о рождении, и я совершенно незаконно включил его, несмотря на это, в число двенадцати «главных тем», которые я имел честь привнести в математику.

[73] Это, конечно, не слишком подробное описание идеи Эйнштейна. В техническом отношении, следует указать, какой структурой снабжено новое пространство-время (она, впрочем, уже «носилась в воздухе» после теории Максвелла и идей Лоренца). Существенный шаг вперед был не технической природы, но *философской*: принять в расчет, что понятие одновременности для событий, отдаленных в пространстве, не имеет никакой экспериментальной основы. Это заявление «устами младенца», это возглас: «А король-то голый!» — тот, с каким преодолевают известные нам «круги невидимые, но властные, которые ограничивают Вселенную»...

[74] Речь идет прежде всего о понятии «риманова многообразия» и тензорного исчи-

идея превратилась в широкое *видение* физического мира, охватившее одним взглядом субатомный мир бесконечно малого, Солнечную систему, Млечный Путь и удаленные галактики, и распространение электромагнитных волн в пространстве-времени, искривленном в каждой точке материей, там расположенной[75]. Тогда, во второй и последний раз в истории космологии и физики (вслед за первым великим синтезом, проведенным Ньютоном три века тому) появилось широкое объединяющее видение совокупности физических явлений во Вселенной, изложенное языком математической модели.

Впрочем, это эйнштейновское видение физической Вселенной, в свою очередь, пошатнулось под наплывом событий. «У совокупности физических явлений», которые нужно было принять в расчет, было довольно времени с начала этого столетия, чтобы расширить свой список! Появилось множество физических теорий, каждая из которых более или менее успешно объясняла ограниченный набор фактов из невероятного нагромождения «наблюдаемых явлений». И все ждали дерзкого мальчишку, который нашел бы, играя, новый ключ (если он один...), горячо предвкушаемую модель, которая «сработала» бы и объяснила бы все разом[76]...

сления над этим многообразием.

[75] Одна из самых поразительных черт, отличающих эту модель от евклидовой (или ньютоновской), а также от первой модели Эйнштейна (из «специальной теории относительности») состоит в том, что *глобальная топологическая форма* пространства-времени остается неопределенной, вместо того чтобы быть предписанной автоматически самой природой модели. Вопрос определения этой глобальной формы кажется мне (как математику) одним из самых увлекательных в космологии.

[76] Гипотетическую теорию, которая объединила и согласовала бы между собой все частичные теории, о которых идет речь, назвали «теорией великого объединения». У меня есть ощущение, что то, над чем здесь стоит основательно поразмыслить, распадается на нижеследующие два раздела.

1). Требуется размышление «философской» природы над самим понятием «математической модели» и тем, как оно соотносится с действительностью. Начиная с успеха ньютоновской теории, среди физиков стало аксиомой по умолчанию, что *существует* математическая модель (даже *единственно правильная* модель) для абсолютно адекватного, без сучка и задоринки, выражения физической реальности. Это соглашение, более двух столетий задававшее у нас тон, представляет собою нечто вроде окаменелых останков некогда живого видения Пифагора: «Все есть число». Может статься, это новый «невидимый круг», пришедший на смену древним метафизическим кругам, чтобы ограничить Вселенную физика (в то время как раса «естественных философов» определенно представляется вымершей: их с легкостью вытеснили компьютеры...). Стоит лишь мгновение над этим поразмыслить, как становится ясно, что законность этого соглашения далеко не бесспорна. Есть даже весьма серьезные философские причины тому, чтобы априори ставить ее под сомнение, или, по крайней мере, предусматривать строжайшие границы применимости соглашения. Поняв это, остается — теперь, или никогда — подвергнуть эту аксиому тщательной критике, даже может быть, «доказать», вне всякого сомнения, что она *не* имеет под

Сравнение между моим вкладом в современную мне математику и вкладом Эйнштейна в физику мне приходит на ум по двум причинам:

собой основания: что *не* существует неопровержимой математической модели, которая объясняла бы совокупность так называемых физических явлений, составляющих сегодняшний список.

Если определить удовлетворительным образом само понятие «математической модели» и «законности» ее (в пределах ошибки, допустимых для данных измерений), вопрос «теории великого объединения», или по крайней мере «оптимальной модели» (в смысле, подлежащем уточнению) окажется, наконец, ясно поставленным. В то же время мы, бесспорно, получим более точное представление о степени произвола, сопровождающего (с необходимостью, быть может) выбор таковой модели.

2). Лишь *после* такого размышления, мне кажется, «техническая» проблема отыскать точную модель, более удовлетворительную, чем те, что ей предшествовали, приобретает свой полный смысл. И одновременно, быть может, наступает пора извлечь на свет вторую аксиому, по умолчанию принятую среди физиков со времен античности, глубоко укоренившуюся в самом способе нашего восприятия пространства: аксиому, утверждающую *непрерывность* природы пространства и времени (или пространства-времени), «места», где происходят события, которые изучает физика.

Тому должно быть уже лет пятнадцать-двадцать, как, листая скромный томик, заключающий в себе полное собрание трудов Римана, я был поражен замечанием, брошенным им мимоходом. Согласно ему вполне могло бы случиться, что структура пространства в конце концов дискретна, и что «непрерывные» ее модели, нами изготовляемые, представляют собой упрощение (возможно, чрезмерное...) более сложной действительности. Для человеческого разума «непрерывное» уловить легче, чем «разрывное», так что первое служит нам приближением, помогающим понять второе. Это замечание, устами математика, необычайно и неожиданно по своей проницательности, ведь на тот момент евклидова модель физического пространства ни разу еще не ставилась под сомнение. В строго логическом смысле, это скорее разрывное традиционно служило техническим приемом подхода к непрерывному.

Достижения математики последних десятилетий, впрочем, привели к возникновению куда более близкого симбиоза между непрерывными и разрывными структурами, чем это можно было себе вообразить еще в первой половине нашего века. Всегда выходило так, что при поисках «удовлетворительной» модели (или, в случае необходимости, совокупности таких моделей, «подходящих» друг к другу в такой степени, в какой только возможно...), будь она «непрерывной», «дискретной» или «смешанной» природы, неизменно вступало в игру богатое концептуальное воображение и настоящее чутье, чтобы изучить и вывести на свет математические структуры нового типа. Воображение или «чутье» такого рода, мне кажется, редкая штука, не только среди физиков (Эйнштейн и Шредингер были, по-видимому, в числе немногих исключений), но даже среди математиков (тут уже я говорю с полным знанием дела).

Резюмируя, я предвижу, что ожидаемое обновление (если оно состоится...) будет проведено скорее математиком по духу, хорошо осведомленным в области серьезных физических проблем, нежели физиком. Но в первую очередь это должен быть человек с «широким философским кругозором», чтобы уловить суть проблемы. Она ведь отнюдь не имеет технической природы, но относится к основополагающим вопросам «естественной философии».

во-первых, и тот и другой труд состоялся за счет *перерождения нашего представления о пространстве* (в одном случае — в математическом смысле, и в физическом — во втором); во-вторых, оба они приняли форму *объединяющего видения*, охватившего обширное множество явлений и ситуаций, которые раньше воспринимались совершенно отдельно друг от друга. Мне видится явственно *родство по духу* между его трудом[77] и моим.

Это родство, на мой взгляд, ничуть не противоречит очевидному различию *в существе* задач той или иной работы. Как мы уже недавно увидели, перемены, введенные Эйнштейном, касаются понятия физического пространства, так что он черпал из арсенала уже известных математических понятий, ни разу не испытав нужды в том, чтобы его расширить или хотя бы переворошить в поисках чего-либо особенно глубоко запрятанного. Его вклад заключался в том, что он нашел среди математических структур, известных к тому времени, те, что были наиболее приспособлены служить как «модели» для мира физических явлений. Его модель пришла на смену предыдущей, бывшей уже при смерти[78], когда-то завещанной его предшественниками. В этом смысле его труд был вот именно трудом *физика* и, сверх того, трудом *естественного философа*, как понимали задачи последнего Ньютон и его современники. Это «философское» измерение отсутствует в моем математическом труде. Мне никогда не приходило в голову задаться вопросом о возможных связях между воображаемыми, «идеальными» концептуальными конструкциями, осуществимыми во Вселенной математических объектов, и явлениями физического мира (и даже событиями из мира духовного). Мой труд был трудом *математика*, намеренно обходящего стороной вопрос «приложений» (в других науках) или «мотивации» и внутренних, душевных корней того, что побуждало меня к работе. Математика, к тому же, влекомого духом, прежде всего прочего, к неустанному расширению арсенала основных для своего искусства понятий. Так-то мне и привелось, совершенно не осознавая того и как бы играючи, поставить с ног на голову самое что ни на есть основополагающее понятие геометрии: понятие *пространства* (и «многообразия»), то есть наше представление о самом *месте*, где живут геометрические существа. Новое понятие «пространства» (что-то вроде «обобщенного пространства», но только точки,

---

[77] Я нимало не претендую на близкое знакомство с трудом Эйнштейна. На деле я не прочел ни одной из его работ и не узнал ни одной из его идей иначе, как со слуха, притом весьма приблизительно. Мне, однако, кажется, что я вижу лес за этими незнакомыми мне деревьями…

[78] Для пояснения, что значит «при смерти» в применении к математической модели, см. сноску *n*° 70.

которые должны как будто бы его образовывать, более или менее из него исчезли), ничем не напоминает, по сути, понятие, которое Эйнштейн внес в физику (отнюдь не обескураживающее для математика). Здесь, напротив, напрашивается сравнение с *квантовой механикой*, открытой Шредингером[79]. В этой новой механике традиционная «материальная точка» исчезает, уступив место чему-то вроде «вероятностного облака», более или менее плотного в той или иной области пространства, в зависимости от «вероятности», с которой точка находится в этой области. В этом новом подходе явственно ощущается «мутация» нашего способа восприятия явлений в механике, еще более глубокая, чем та, что приведена в действие моделью Эйнштейна — мутация, которая не ограничивается простой заменой математической модели, немного узкой в плечах, другой похожей, но большего размера или лучше скроенной. На этот раз новая модель так мало напоминает старые добрые традиционные модели, что даже математик, будь он при этом большим специалистом в области механики, перед ней вдруг чувствует себя в недоумении, даже в растерянности (или в бешенстве...). Переход от механики Ньютона к эйнштейновской должен ощущаться математиком примерно так же, как переход от давнего, трогательного провинциального диалекта к парижскому жаргону последней моды. Напротив, перейти к квантовой механике — все равно что заменить французский китайским.

И эти «вероятностные облака», пришедшие на смену таким надежным материальным частицам прежнего, странным образом напоминают мне ускользающие «открытые окрестности», которые населяют топосы, эдакие неуловимые призраки, окружающие несуществующие «точки», за которые, всему уже наперекор, продолжает цепляться непослушное воображение...

21.

Этот короткий визит к «соседям напротив», физикам, мог бы помочь сориентироваться читателю, который (как большинство людей) совсем не знает, что делается в мире математиков, но заведомо наслышан об Эйнштейне с его прославленным «четвертым измерением» и даже о квантовой механике. В конечном счете, даже если изобретатели не могли предвидеть, что их открытия приведут к Хиросиме, и позже к безумному наращиванию атомной техники, военной и (так называемой)

---

[79] Как я это себе представляю (на основе отзвуков, долетавших до меня с разных сторон), в общем принято насчитывать в этом столетии три «революции», или великих переворота, в физике: теория Эйнштейна, открытие радиоактивности супругами Кюри, и введение квантовой механики Шредингером.

«мирной», несомненно, что открытия в физике оказывают ощутимое и почти немедленное воздействие на человеческое общество в целом. Воздействие же математического открытия, и прежде всего в математике, которую называют «чистой» (то есть, не имеющей в виду конкретного «приложения»), менее непосредственное, и, конечно, его труднее выявить. Например, я не имею представления о том, могли ли мои результаты в математике «послужить» чему бы то ни было, скажем, созданию малейшего устройства или механизма. В этом, разумеется, нет особой заслуги, но все же мне так спокойнее. Как только появляются приложения, можно не сомневаться, что военные (и, по их следам, полиция) будут первыми, кто приберет их к рукам; что бы это ни дало промышленности (даже той, которую называют «мирной»), это далеко не всегда к лучшему...

Конечно, для моей же собственной пользы и для удобства читателя-математика было бы разумней соотнести мой труд с маяками в истории самой математики, чем отправляться искать аналогий на стороне. Я обдумал это в последние несколько дней, в рамках моего довольно туманного представления об истории науки[80]. Во время «Прогулки» мне уже как-то случилось вызвать в памяти «линию» математиков, сходных по роду темперамента, к какому и я себя отношу. Вот она: Галуа, Риман, Гильберт. Будь я более осведомлен в истории моего искусства, я бы, возможно, сумел продолжить эту линию глубже в прошлое, или, скажем, включить в нее еще несколько имен, теперь мне известных лишь понаслышке. Поразительно то, что я не могу припомнить ни из каких источников, даже из разговоров друзей или коллег, лучше меня разбиравшихся в истории, сведений о каком-нибудь математике, кроме меня, который привнес бы в науку множество новых идей, не разрозненных, но собравшихся в единое видение (как это вышло с Ньютоном и Эйнштейном в физике и космологии, а в биологии — с Пастером и Дарвином). Я могу указать лишь два «момента» в истории математики, связанные с появлением нового видения широкого размаха. Один из них — само рождение математики, как науки в сегодняшнем понимании этого слова: 2500 лет назад, в Древней Греции. Другой — возникновение анализа бесконечно малых и интегрирования, в семнадцатом столетии; эпоха,

---

[80] Еще в детстве, история (да и география, впрочем) меня никогда особенно не увлекала. (В пятой части «РС» (незавершенной) мне выдался случай «мимоходом» обнаружить то, что мне кажется глубокой причиной наличия у меня этого частичного «барьера» по отношению к истории — барьера, который начал, по моему, рассасываться в последние годы.) К тому же, математическое образование, полученное от старших, в «бурбакистском кругу», не навело в моей голове порядка: случайные ссылки на историю были в нем более чем редки.

отмеченная именами Ньютона, Лейбница, Декарта и других. Насколько мне известно, в обоих случаях новое видение явилось продуктом не индивидуального, но коллективного труда математиков, составлявших эпоху.

Конечно, от Пифагора и Евклида до начала семнадцатого столетия у математики было довольно времени, чтобы сменить облик — да и потом, между «Исчислением бесконечно малых», изобретенным математиками в семнадцатом веке, и серединой теперешнего двадцатого утекло немало воды. Но, насколько я знаю, глубокие изменения, происшедшие в течение этих двух периодов (один сроком более чем в две тысячи лет, другой — в три столетия), ни разу не приняли формы нового видения, представленного чьим-нибудь конкретным трудом[81], как это было в физике и космологии, с великим синтезом, осуществленным Ньютоном, а затем Эйнштейном — два важнейших, узловых события в истории этих наук.

Похоже, что постольку, поскольку служитель нового широкого, объединяющего видения родился во мне, я оказался «единственным в своем

---

[81] Через несколько часов после написания этих строчек я был вдруг потрясен тем, что мне и в голову не пришло упомянуть здесь о широком синтезе разделов современной математики, который старался устроить союз (коллектив) Н. Бурбаки. (О группе Бурбаки будет сказано немало в первой части «РС».) Так вышло, мне кажется, по двум причинам.

С одной стороны, этот синтез ограничивался чем-то вроде «приведения в порядок» широкой совокупности идей и результатов, уже известных, без того, чтобы добавить к ним свои новаторские идеи. Если там была новая идея, то она заключалась в строгом математическом определении понятия «структуры», явившейся бесценною путеводною нитью для всей деятельности союза. Но эта идея, мне кажется, подобна скорее идее толкового и не без воображения лексикографа, чем одной из основ обновления языка, дающей свежее представление о реальности (в данном случае, математической).

С другой стороны, считая с пятидесятых годов, идея структуры оказалась в хвосте событий, с неожиданным наплывом «категорных» методов в некоторые из наиболее динамичных разделов математики, именно топологию и алгебраическую геометрию. (Так, понятие «топоса» отказалось влезть в «мешок Бурбаки», не то он бы расползся по швам!) Решив для себя, со всей ответственностью, разумеется, не ввязываться в это дело, Бурбаки тем самым отреклись от своего исходного намерения, состоявшего в том, чтобы обеспечить *единые* основы и *единый* язык для современной математики в целом.

Они, напротив, закрепили на месте язык, и в то же время определенный *стиль* изложения и подхода к математике. Этот стиль появился, как отражение (весьма неполное) некоего *духа*, когда-то живого и впрямую унаследованного от Гильберта. В течение пятидесятых и шестидесятых годов этот стиль, к лучшему то или к худшему (вот это скорее), сделался в конце концов обязательным. За двадцать лет он стал жестким *каноном* чисто наружной, парадной «строгости»; дух же, его некогда оживлявший, словно бы исчез безвозвратно.

роде» в истории математики, считая от ее начала до наших дней. Печально иметь вид человека, желающего так непозволительно выделяться на общем фоне! Все же я, кажется, разглядел издалека, к своему облегчению, возможного (и спасительного!) как будто бы *брата*. Мне недавно уже случилось его упомянуть, первым в ряду моих «братьев по темпераменту»; это *Эварист Галуа*. В его короткой и ослепительной жизни[82] я, как мне представляется, различаю признаки зарождения большого видения, воистину «союза числа и величины» в новом геометрическом контексте. Я упоминал уже на страницах «РС»[83], как, два года назад, у меня внезапно возникло это ощущение, что в математической работе, в тот момент почти безраздельно господствовавшей в моем воображении, я занят не чем иным, как «возрождением наследия Галуа». Это ощущение, с тех пор редко возобновлявшееся, все же молча зрело во мне, не упуская времени. В последние три недели, когда я обдумывал завершенный труд, оно заведомо усилилось. Нить преемственности самой непосредственной, ведущая к математикам прошлого (мне кажется, сейчас я научился ее видеть), связывает меня именно с Эваристом Галуа. Справедливо или нет, но мне кажется, что видение, которое я развил в течение пятнадцати лет своей жизни, и которое все еще зреет и набирает краски во мне вот уже шестнадцать лет, истекших со дня моего ухода — что это самое видение не мог бы не открыть Галуа[84], забредя в те же, что и я, математические владения, если бы преждевременная смерть грубо не оборвала его великолепный разбег.

Есть, конечно, еще и другая вещь, которая прибавляет силы этому ощущению «родства по существу» — родства, которое не сводится ни к одному лишь «математическому темпераменту», ни к какой-либо иной из сторон нашей работы. В нашей жизни, его и моей, я чувствую общность судеб. Конечно, Галуа нелепо погиб двадцати одного года от роду, в то время как мне уже под шестьдесят, и я определенно готов тянуть и дальше. При всем том, однако, Эварист Галуа при жизни оставался, точь-в-точь как я полтора века спустя, *второстепенной* фигурой в официальном математическом мире. Что до Галуа, тут поверхностному

---

[82] Эварист Галуа (1811–1832) был убит на дуэли, в возрасте двадцати одного года. Существует, я думаю, несколько его биографий. Я в юности читал о нем роман-биографию, написанный физиком Инфельдом и немало меня тогда поразивший.

[83] См. «Наследие Галуа» (РС I, §7).

[84] Я, впрочем, убежден, что Галуа пошел бы намного дальше меня. С одной стороны, из-за его исключительной одаренности (что до меня, моя доля куда меньше в этом отношении). С другой — потому, что он, возможно, не допустил бы, в отличие от меня, чтобы большая часть его энергии ушла на эти нескончаемые усилия: постепенно, вплоть до малейших деталей, приводить в должный вид то, что и так уже уже более или менее известно…

наблюдателю может показаться, что эта второстепенность «случайна», что у него просто не было времени своими трудами и новаторскими идеями заставить себя признать. В моем случае, моя второстепенность в течение первых трех лет моей жизни как математика объясняется моим неведением (быть может, нарочитым...) о самом существовании мира математиков, с которым я потом столкнулся. И с тех пор, как я ушел с математической сцены, вот уже шестнадцать лет тому, она — последствие сознательного выбора. Того самого, который, без сомнения, и повлек за собой наказание: «согласной волею и в едином порыве» стереть всякие следы моего имени в математике, и с ними то видение, чьим служителем я себя сделал.

Но за случайными расхождениями я все же различаю общую причину этой «второстепенности», на мой взгляд, существенную. Я вижу ее не в исторических обстоятельствах, и не в особенностях «темперамента», или «характера» (эти свойства, конечно, свои у каждого из нас, ведь мы разные люди), и уж тем более не на уровне одаренности (почти сверхъестественной в случае Галуа, сравнительно скромной — в моем). Если и есть оно, это родство, я вижу его на более приземленном уровне — совсем элементарном.

Я испытывал подобное, редкое, чувство родства несколько раз в своей жизни. Именно оно «сближает» меня еще с одним математиком, бывшим моим старшим коллегой: *Клодом Шевалле*[85]. Связь, о которой я хотел сказать, это что-то вроде «наивности», или «невинности», о которой здесь уже заходила речь. Она выражается в естественной склонности (часто не особенно ценимой окружающими) смотреть на вещи своими собственными глазами, а не сквозь патентованные очки, любезно предложенные какой-нибудь, широкой или не очень, группой людей, по той или иной причине управляющих мнениями.

Эта «склонность», или внутренняя позиция, не есть привилегия зрелости — она принадлежит младенчеству. Это дар, получаемый при рождении, одновременно с жизнью; он смиренный и грозный. Дар, часто глубоко зарытый; некоторые умеют его как-то сохранять, или, может быть, обретать вновь...

Можно также называть его *даром одиночества.*

---

[85] Я понемногу, то здесь, то там, говорю о Клоде Шевалле на страницах «РС», в особенности в разделе «Встреча с Клодом Шевалле, или случай дать волю чувствам» (РС I, §11), и в примечании «Прощание с Клодом Шевалле» (РС III, примечание n° 100).