GR-CATÉGORIES

HOANG XUAN SINH

Contents

1. Introduction

Ce travail se compose de trois chapitres. Le premier rassemble un certain nombre de définitions et résultats nécessaires pour les chapitres qui suivent sur les catégories munies d'une loi de $\otimes$ qu'on peut trouver dans [2, 6, 11, 14, 15], la terminologie employée dans cet chapitre étant de Neantro Saavedra Rivano [14]. Une $\otimes$-*catégorie* est une catégorie munie d'une loi $\otimes$. Une $\otimes$-catégorie *associative* est une catégorie munie d'un isomorphisme de trifoncteurs appelé *contrainte d'associativité*

$$a_{X,Y,Z}\colon X \otimes (Y \otimes Z) \xrightarrow{\sim} (X \otimes Y) \otimes Z$$

vérifiant une condition dite *l'axiome du pentagone*. Une $\otimes$-catégorie *commutative* est une catégorie munie d'un isomorphisme de bifoncteurs appelé *contrainte de commutativité*

$$c_{X,Y}\colon X \otimes Y \xrightarrow{\sim} Y \otimes X$$

vérifiant la relation $c_{Y,X} \circ c_{X,Y} = \mathrm{Id}_{X \otimes Y}$. Une contrainte de commutativité est *stricte* si

$$c_{X,X} = \mathrm{Id}_{X \otimes X}$$

pour tout X. Enfin, une $\otimes$-catégorie es dit *unifère* s'il est donné un objet $\underline{1}$ et des isomorphismes fonctoriels

$$g_X\colon X \xrightarrow{\sim} \underline{1} \otimes X$$

et

$$d_X\colon X \xrightarrow{\sim} X \otimes \underline{1}$$

tels que

$$g_{\underline{1}} = d_{\underline{1}}.$$

Le triple $(\underline{1}, g, d)$ constitue une *contrainte d'unité*.

Une $\otimes$-*catégorie* AC (resp., AU) est une $\otimes$-catégorie associative et commutative (resp., associative et unifère) vérifiant une certaine condition de compatibilité. Une $\otimes$-*catégorie* ACU est une $\otimes$-catégorie AC et AU.

Un $\otimes$-*foncteur* d'une $\otimes$-catégorie $\underline{C}$ dans une $\otimes$-catégorie $\underline{C}'$ est une couple $(F, \check{F})$, où F est un foncteur de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$ et $\check{F}$ un isomorphisme de bifoncteurs

$$\check{F}_{X,Y}\colon FX \otimes FY \xrightarrow{\sim} F(X \otimes Y)$$

Un $\otimes$-*foncteur associatif* (resp., *commutatif, unifère*) est un $\otimes$-foncteur d'une $\otimes$-catégorie associative (resp., commutative, unifère) dans une $\otimes$-catégorie associative (resp., commutative, unifère) vérifiant une condition dite condition de *compatibilité* avec les contraintes d'associativité (resp., de commutativité, d'unité). Un

$\otimes$-*foncteur AC* est un $\otimes$-foncteur associatif et commutatif, un $\otimes$-*foncteur ACU* est un $\otimes$-foncteur associatif, commutatif et unifère.

Pour deux $\otimes$-foncteurs $(F, \breve{F})$ et $(G, \breve{G})$ d'une $\otimes$-catégorie $\underline{C}$ dans une $\otimes$-catégorie $\underline{C}'$, un $\otimes$-*morphisme* de $(F, \breve{F})$ dans $(G, \breve{G})$ est un morphisme fonctoriel $\lambda\colon F \to G$ rendant commutatif le carré

$$\begin{tikzcd} FX \otimes FY \arrow[r, "\breve{F}_{X,Y}"] \arrow[d, "\lambda_X \otimes \lambda_Y"'] & F(X \otimes Y) \arrow[d, "\lambda_{X \otimes Y}"] \\ GX \otimes GY \arrow[r, "\breve{G}_{X,Y}"] & G(X \otimes Y). \end{tikzcd}$$

Le deuxième chapitre est réservé à l'etude des Gr-catégories es des Pic-catégories. Une Gr-*catégorie* est une $\otimes$-catégorie AU dont tous les objets sont inversibles et dont la catégorie sous-jacente est une groupoïde (i.e., toutes les flèches sont des isomorphismes). Une Gr-catégorie ressemble donc à un groupe. On tire de cette définition que, si $\underline{P}$ est une Gr-catégorie, l'ensemble $\pi_0(\underline{P})$ des classes à isomorphie près d'objets de $\underline{P}$, muni de la loi de composition induite pour la operation $\otimes$, est un groupe; le groupe $\mathrm{Aut}(\underline{1}) = \pi_1(\underline{P})$ est un groupe commutatif; et pour tout $X \in \mathrm{Ob}\,\underline{P}$

$$\begin{aligned} \gamma_X &: \mathrm{Aut}(\underline{1}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(X), u \mapsto u \otimes \mathrm{id}_X, \\ \delta_X &: \mathrm{Aut}(\underline{1}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(X), u \mapsto \mathrm{id}_X \otimes u. \end{aligned}$$

On attache ainsi à une Gr-catégorie $\underline{P}$ des groupes $\pi_0(\underline{P})$ et $\pi_1(\underline{P})$, où $\pi_1(\underline{P})$ est commutatif. On peut définir, au plus, une action de $\pi_0(\underline{P})$ dans $\pi_1(\underline{P})$ de la façon suivante: si $s \in \pi_0(\underline{P})$ est représenté par $X \in \mathrm{Ob}\,\underline{P}$ et $u \in \pi_1(\underline{P})$, on pose

$$su = \delta_X^{-1}\gamma_X(u).$$

$\pi_1(\underline{P})$ en devient un $\pi_0(\underline{P})$-module à gauche.

Soient M un groupe, N un M-module (abelien à gauche). Un *préépinglage* de type (M, N) pour une Gr-catégorie $\underline{P}$ est une couple $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ d'isomorphismes

$$\varepsilon_0\colon M \xrightarrow{\sim} \pi_0(\underline{P}), \quad \varepsilon_1\colon N \xrightarrow{\sim} \pi_1(\underline{P})$$

compatibles avec les actions de M sur N et $\pi_0(\underline{P})$ sur $\pi_1(\underline{P})$. Une Gr-catégorie *préépinglée de type* (M, N) est une Gr-catégorie muni d'un préépinglage. Enfin, un *morphisme* de Gr-catégories préépingleés de type (M, N), $(\underline{P}, \varepsilon) \to (\underline{P}', \varepsilon')$, est un

$\otimes$-foncteur associatif tel que les triangles

$$\begin{tikzcd} \pi_0(\underline{P}) \arrow[rr] & & \pi_0(\underline{P}') \\ & M \arrow[ul, "\varepsilon_0"] \arrow[ur, "\varepsilon_0'"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi_1(\underline{P}) \arrow[rr] & & \pi_1(\underline{P}') \\ & N \arrow[ul, "\varepsilon_1"] \arrow[ur, "\varepsilon_1'"'] & \end{tikzcd}$$

soient commutatifs. On en déduit que tout tel morphisme est une $\otimes$-équivalence, donc l'ensemble de classes d'équivalence de Gr-catégories préépingleés de type (M, N) est égal a l'ensemble de composantes connexes de la 2-catégorie de Gr-catégories préépingleés de type (M, N). Si on considére le groupe de cohomologie $H^3(M, N)$ de groupe M à valeurs dans le M-module N (au sens de la cohomologie de groupes [12]) on obtient une bijection canonique entre l'ensemble de classes d'équivalence de Gr-catégories préépingleés de type (M, N) et l'ensemble $H^3(M, N)$.

Une *Pic-catégorie* est une Gr-catégorie munie d'un contrainte de commutativité compatible avec sa contrainte d'associativité, ce qui fait qu'une Pic-catégorie ressemble à un groupe commutatif. On vérifie aussitôt qu'une condition nécessaire pour l'existence d'une structure de Pic-catégorie sur une Gr-catégorie $\underline{P}$ est que $\pi_0(\underline{P})$ soit commutatif et agisse trivialement sur $\pi_1(\underline{P})$. Une Pic-catégorie est *stricte* si sa contrainte de commutativité est stricte.

Soient M et N des groupes abéliens. Un *préépinglage* de type (M, N) pour une Pic-catégorie $\underline{P}$ est une couple $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ d'isomorphismes

$$\varepsilon_0 \colon M \xrightarrow{\sim} \pi_0(\underline{P}), \quad \varepsilon_1 \colon N \xrightarrow{\sim} \pi_1(\underline{P}).$$

Une Pic-catégorie *préépinglée de type* (M, N) est une Pic-catégorie muni d'un préépinglage. On définit *les morphismes* de tels objets de la même façon qu'on a fait pour les Gr-catégories.

Pour formuler des propositions, on introduit deux complexes de groupes abéliens libres

$$\begin{aligned} L_\bullet(M) \quad &: L_3(M) \xrightarrow{d_3} L_2(M) \xrightarrow{d_2} L_1(M) \xrightarrow{d_1} L_0(M) \to M \\ {}'L_\bullet(M) \quad &: {}'L_3(M) \xrightarrow{{}'d_3} {}'L_2(M) \xrightarrow{{}'d_2} {}'L_1(M) \xrightarrow{{}'d_1} {}'L_0(M) \to M \end{aligned}$$

dont le premier est une résolution tronquée de M, i.e., est une suite exacte. On obtient une bijection canonique entre l'ensemble de classes d'équivalence de Pic-catégories préépingleés de type (M, N) et l'ensemble $H^2(\mathrm{Hom}({}'L_\bullet(M), N))$. L'exactitude de complexe $L_\bullet(M)$ nous donne la trivialité de la classification des Pic-catégories strictes préépingleés de type (M, N), i.e., toutes les Pic-catégories strictes préépingleés de type (M, N) sont équivalentes.

Enfin, le troisiéme chapitre donne la construction de la solution de deux problèmes universels: celui de rendre des objets “objet unité” et celui d’inverser des objets.

Soient $\underline{A}$ une $\otimes$-catégorie AC, $\underline{A}'$ une outre $\otimes$-catégorie AC dont la catégorie sous-jacent est un groupoïde et $(T, \check{T})\colon \underline{A}' \to \underline{A}$ un $\otimes$-foncteur AC. On cherche à rendre les objets TA' de $\underline{A}$, $A' \in \operatorname{Ob} \underline{A}'$, “objet unité”, c’est à dire, on cherche:

(1) Une $\otimes$-catégorie ACU $\underline{P}$;
(2) Un $\otimes$-foncteur AC $(D, \check{D})\colon \underline{A} \to \underline{P}$;
(3) Un $\otimes$-isomorphisme

$$\lambda\colon (D, \check{D}) \circ (T, \check{T}) \xrightarrow{\sim} (I_{\underline{P}}, \check{I}_{\underline{P}}),$$

où $(I_{\underline{P}}, \check{I}_{\underline{P}})$ est le $\otimes$-foncteur $1_{\underline{P}}$ constant de $\underline{A}'$ dans $\underline{P}$.

Le triple $(\underline{P}, (D, \check{D}), \lambda)$ est tel qu’il soit universel pour les triples $(\underline{Q}, (E, \check{E}), \mu)$ vérifiant (1), (2) et (3).

Pour le problème d’inverser des objets, on considere une $\otimes$-catégorie ACU $\underline{C}$, une $\otimes$-catégorie ACU $\underline{C}'$ dont la catégorie sous-jacent est un groupoïde et un $\otimes$-foncteur ACU $(F, \check{F})\colon \underline{C}' \to \underline{C}$. On cherche une $\otimes$-catégorie ACU $\underline{P}$ et un $\otimes$-foncteur ACU $(\mathcal{D}, \check{\mathcal{D}})\colon \underline{C} \to \underline{P}$ ayant les propiétés suivantes:

(1) $\mathcal{D}FX'$ est inversible dans $\underline{P}$ pour tout $X' \in \operatorname{Ob} \underline{C}'$;
(2) Pour tout $\otimes$-foncteur ACU $(\mathcal{E}, \check{\mathcal{E}})$ de $\underline{C}$ dans une $\otimes$-catégorie ACU $\underline{Q}$ tel que $\mathcal{E}FX'$ soit inversible dans $\underline{Q}$ pour tout $X' \in \operatorname{Ob} \underline{C}'$, il existe un $\otimes$-foncteur ACU $(E', \check{E}')$ unique (à $\otimes$-isomorphisme unique près) de $\underline{P}$ dans $\underline{Q}$ tel que $(\mathcal{E}, \check{\mathcal{E}}) \simeq (E', \check{E}') \circ (\mathcal{D}, \check{\mathcal{D}})$.

Ce problème se ramène au premier. Il sufit de poser $\underline{A}' = \underline{C}'$, $\underline{A} = \underline{C}' \times \underline{C}$, $TX' = (FX', X')$, et de remarquer que si $\underline{C}, \underline{C}', \underline{Q}$ sont des $\otimes$-catégories ACU et $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\mathrm{ACU}}(\underline{C}, \underline{Q})$ est la catégorie des $\otimes$-foncteurs ACU de $\underline{C}$ dans $\underline{Q}$, alors on a une équivalence canonique de catégories

$$\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\mathrm{ACU}}(\underline{C} \times \underline{C}', \underline{Q}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\mathrm{ACU}}(\underline{C}, \underline{Q}) \times \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\mathrm{ACU}}(\underline{C}', \underline{Q}).$$

La $\otimes$-catégorie ACU $\underline{P}$ ainsi définie est appelée la *$\otimes$-catégorie de fractions* de la catégorie $\underline{C}$ définie par $(\underline{C}', (F, \check{F}))$. La $\otimes$-catégorie de fractions de $\underline{C}^{\mathrm{is}}$ définie par $(\underline{C}^{\mathrm{is}}, (\mathrm{id}_{\underline{C}^{\mathrm{is}}}, \mathrm{id}))$ est une Pic-catégorie. On l’apelle la *Pic-enveloppe* de la catégorie $\underline{C}$ et on la note $\underline{\mathrm{Pic}}(\underline{C})$. Pour $\underline{C} = \mathcal{P}(R)$, catégorie des R-modules projectifs de type fini (R un anneau unitaire) et $\underline{P} = \underline{\mathrm{Pic}}(\mathcal{P}(R))$, on obtient

$$\begin{aligned} \pi_0(\underline{P}) &\simeq K^0(R) \\ \pi_1(\underline{P}) &\simeq K^1(R) \end{aligned}$$

où $K^0(R)$ est le groupe de Grothendieck et $K^1(R)$ le groupe de Whitehead [1].

La considération de la $\otimes$-catégorie de fractions d'une $\otimes$-catégorie ACU nous donne le résultat suivant:

Soient $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie ACU, Z un objet quelconque de $\underline{C}$, S le foncteur de $\underline{C}$ dans $\underline{C}$ définie par

$$X \mapsto X \otimes Z.$$

On appelle *catégorie de suspension* de la $\otimes$-catégorie ACU $\underline{C}$ définie par l'objet Z, le triple $(\underline{\mathcal{P}}, i, p)$, solution du problème universel pour les triples $(\underline{\mathcal{Q}}, j, q)$, où $\underline{\mathcal{Q}}$ est une catégorie, j un foncteur de $\underline{C}$ dans $\underline{\mathcal{Q}}$ et q une équivalence de $\underline{\mathcal{Q}}$ dans $\underline{\mathcal{Q}}$, tels que le carré

$$\begin{tikzcd} \underline{C} \arrow[r, "S"] \arrow[d, "j"'] & \underline{C} \arrow[d, "j"] \\ \underline{\mathcal{Q}} \arrow[r, "q"] & \underline{\mathcal{Q}} \end{tikzcd}$$

soit commutatif (à isomorphisme fonctoriel près), i.e., $qj \simeq jS$.

Dans le cas où $\underline{C}$ es la catégorie homotopique ponctuée $\underline{\mathrm{Htp}}_*$ munie du produit contracté $\wedge$, des contraintes d'associativité, de commutativité, d'unité habituelles, et Z la 1-sphére S^1 (S est par conséquent le foncteur de suspension) on retrouve la définition connue de catégorie de suspension.

Soit $\underline{C}'$ la sous-catégorie $\otimes$-stable de la $\otimes$-catégorie ACU $\underline{C}$ engendrée par Z et $\underline{P}$ la catégorie de fractions de $\underline{C}$ définie par $(\underline{C}', (F, \mathrm{id}))$, où $F\colon \underline{C}' \to \underline{C}$ est le foncteur d'inclusion. On obtient un foncteur $\mathcal{G}\colon \underline{\mathcal{P}} \to \underline{P}$ de la catégorie de suspension $\underline{\mathcal{P}}$ dans la $\otimes$-catégorie de fractions $\underline{P}$. Si $\mathcal{G}$ n'est pas fidèle (ce qui se produit dans le cas où $\underline{C} = \underline{\mathrm{Htp}}_*$, $Z = S^1$ et la loi $\otimes$ est le produit contracté $\wedge$) alors il est impossible de construire dans $\underline{\mathcal{P}}$ une loi $\otimes$ tel que $\underline{\mathcal{P}}$ en soit une $\otimes$-catégorie ACU, iZ inversible dans $\underline{\mathcal{P}}$ et i immergé dans une couple $(i, \check{\imath})$ qui est un $\otimes$-foncteur ACU de $\underline{C}$ dans $\underline{\mathcal{P}}$.

Ces deux problèmes universels ont été posés par Monsieur Grothendieck lors de son séjour à l'université de Hanoi en Novembre 1967. Je tiens à lui exprimer ici tous mes remerciements pour ses précieuses directives.

2. Chapitre I
$\otimes$-Catégories et $\otimes$-foncteurs

2.1. $\otimes$-Catégories.

2.1.1. *Définition des $\otimes$-catégories.*

Definition 2.1. Soit $\underline{C}$ une catégorie. Un foncteur $\underline{C} \times \underline{C} \to \underline{C}$ est appelé une $\otimes$-*structure* sur $\underline{C}$, ou encore une loi $\otimes$ sur $\underline{C}$. Une $\otimes$-*catégorie* est une catégorie $\underline{C}$ munie d'une $\otimes$-structure qu'on note $\otimes_{\underline{C}}$, ou simplement $\otimes$, si aucune confusion n'est possible; à des objets X, Y de $\underline{C}$ ont associe donc un objet $X \otimes Y$ de $\underline{C}$ appelé *produit tensoriel des objets* X et Y qui dépend fonctoriellement de (X, Y), i.e., à des flèches $f\colon X \to X', g\colon Y \to Y'$ de $\underline{C}$, on a une flèche $f \otimes g\colon X \otimes X' \to Y \otimes Y'$ de $\underline{C}$, appelé *produit tensoriel des flèches* f et g, vérifiant les relations $\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{id}_Y = \mathrm{id}_{X \otimes Y}$, $f'f \otimes g'g = (f' \otimes g')(f \otimes g)$ au cas où f, f' et g, g' sont composables.

Definition 2.2. Soit X un objet d'une $\otimes$-catégorie $\underline{C}$. On dit que X est *régulier* si les foncteurs, définis par les applications

$$Y \mapsto Y \otimes X, \quad (f\colon Y \to Z) \mapsto (f \otimes \mathrm{id}_X\colon Y \otimes X \to Z \otimes X)$$

et

$$Y \mapsto X \otimes Y, \quad (f\colon Y \to Z) \mapsto (\mathrm{id}_X \otimes f\colon X \otimes Y \to X \otimes Z)$$

de $\underline{C}$ dans $\underline{C}$, sont des équivalences des catégories. On vérifie aisément que, si X es régulier et si $X' \simeq X$, i.e., X' est isomorphe à X, alors X' es aussi régulier.

2.1.2. *Exemples de $\otimes$-catégories.*

Examples 2.3.

(1) Soit $\underline{C}$ une catégorie dans laquelle le produit des couples d'objets existe. Pour tout couple (X, Y), choisissons un produit $(X \times Y, p_X, p_Y)$. On définit alors une $\otimes$-structure sur $\underline{C}$ en posant, pour des objets X, Y,

$$X \otimes Y = X \times Y$$

et, pour des flèches $f\colon X \to X'$, $g\colon Y \to Y'$,

$$f \otimes g = f \times g.$$

On vérifie sans difficulté que, dans cette $\otimes$-catégorie, les objets réguliers sont les objets finaux.

(2) Soit $\underline{C}$ la catégorie $\underline{\mathrm{Mod}}(A)$ des modules sur un anneau commutatif unitaire A. Le produit tensoriel de A-modules définit une loi $\otimes$ sur $\underline{C}$. Ici les objets réguliers sont les A-modules projectifs de rang 1 [4].

(3) Soit (X, x_0) un espace topologique pointé. On définit une catégorie $\underline{C}$ de la façon suivante: les objets de $\underline{C}$ sont les lacets de X localisés en x_0; si ω_1, ω_2 sont deux lacets, $\mathrm{Hom}_{\underline{C}}(\omega_1, \omega_2)$ est l'ensemble d'homotopies $\omega_1 \to \omega_2$ modulo la relation d'homotopie. La composition des lacets définit une $\otimes$-structure sur $\underline{C}$. Dans cette $\otimes$-catégorie tous les objets sont réguliers.

(4) Soient $\underline{C}$ une catégorie additive, $\underline{E}$ une catégorie cofibreé sur $\underline{C}$ [10]. Pour tout objet A de $\underline{C}$, la fibre de $\underline{E}$ en A est noté $\underline{E}(A)$. L'homomorphisme source dans $\underline{C}$ donne naissance à un foncteur

$$\underline{E}(A) \times \underline{E}(A) \to \underline{E}(A)$$

qui fait de $\underline{E}(A)$ une $\otimes$-catégorie.

(5) Soient M un groupe, N un M-module abélien à gauche. On construit une catégorie $\underline{C}$ dont les objets sont les éléments de M, les morphismes sont des automorphismes. Pour $S \in M$, on définit

$$\mathrm{Aut}_{\underline{C}}(S) = \{S\} \times N.$$

La composition des flèches dans $\underline{C}$ provient de l'addition dans N. On définit sur $\underline{C}$ une loi $\otimes$ de la façon suivante: si $S_1, S_2 \in M$, on pose

$$S_1 \otimes S_2 = S_1 S_2.$$

Si $(S_1, u_1), (S_2, u_2)$ sont des morphismes ($u_1, u_2 \in N$), on pose

$$(S_1, u_1) \otimes (S_2, u_2) = (S_1 S_2, u_1 + S_1 u_2).$$

Ici tous les objets de la $\otimes$-catégorie $\underline{C}$ sont réguliers en vertu du fait que M est un groupe et l'ensemble des flèches de $\underline{C}$ muni de la loi $\otimes$ est aussi un groupe, à savoir le produit semi-direct $M.N$.

Dans le cas où N est un M-module abélien à droite, on définit la loi $\otimes$ dans $\underline{C}$ par

$$\begin{aligned} S_1 \otimes S_2 &= S_1 S_2 \\ (S_1, u_1) \otimes (S_2, u_2) &= (S_1 S_2, u_1 S_2 + u_2). \end{aligned}$$

2.2. **Contraintes pour une loi $\otimes$.**

2.2.1. *Contraintes d'associativité.*

Definition 2.4. Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie. Une *contrainte d'associativité* pour $\underline{C}$ es un isomorphisme fonctoriel a

$$a_{X,Y,Z} \colon X \otimes (Y \otimes Z) \xrightarrow{\sim} (X \otimes Y) \otimes Z$$

tel que, pour des objets X, Y, Z, T de $\underline{C}$, le diagramme suivant soit commutatif (*axiome du pentagone*)

$$\begin{tikzcd}
& (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes T) \arrow[dr, "a_{X \otimes Y, Z, T}"] & \\
X \otimes (Y \otimes (Z \otimes T)) \arrow[ur, "a_{X,Y,Z\otimes T}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X \otimes a_{Y,Z,T}"'] & & ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes T \\
X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes T) \arrow[rr, "a_{X, Y\otimes Z, T}"] & & (X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes T. \arrow[u, "a_{X,Y,Z} \otimes \mathrm{id}_T"']
\end{tikzcd}$$

Definition 2.5. On appelle *$\otimes$-catégorie associative* une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte d'associativité.

Definition 2.6. Deux contraintes d'associativité a et a' d'une $\otimes$-catégorie $\underline{C}$ son dites *cohomologues* s'il existe un automorphisme fonctoriel φ du foncteur $\otimes \colon \underline{C} \times \underline{C} \to \underline{C}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd}
X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "a_{X,Y,Z}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X \otimes \varphi_{Y,Z}"'] & (X \otimes Y) \otimes Z \arrow[d, "\varphi_{X,Y} \otimes \mathrm{id}_Z"] \\
X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[d, "\varphi_{X, Y\otimes Z}"'] & (X \otimes Y) \otimes Z \arrow[d, "\varphi_{X\otimes Y, Z}"] \\
X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "a'_{X,Y,Z}"] & (X \otimes Y) \otimes Z
\end{tikzcd} \tag{2.7}$$

pour des objets X, Y, Z de $\underline{C}$.

Examples 2.8.

(1) Toutes les $\otimes$-catégories données dans les Exemples 2.3 sont des $\otimes$-catégories associatives.
(2) Dans l'exemple 2.3(5), il y a une contrainte d'associativité évidente, à savoir l'identité. On va voir qu'il y en a d'autres. Se donner un morphisme de

trifoncteurs a revient dans ce cas à se donner une application $f\colon M^3 \to N$, la relation entre f et a étant

$$a_{S_1,S_2,S_3} = (S_1S_2S_3, f(S_1, S_2, S_3)).$$

Lorsqu'on écrit l'axiome du pentagone en utilisant cette relation, on trouve

$$\begin{aligned} S_1 f(S_2, S_3, S_4) &- f(S_1S_2, S_3, S_4) + f(S_1, S_2S_3, S_4) \\ &- f(S_1, S_2, S_3S_4) + f(S_1, S_2, S_3) = 0, \end{aligned}$$

où l'on a posé $X = S_1, Y = S_2, Z = S_3, T = S_4$. Autrement dit $f\colon M^3 \to N$ définit une contrainte d'associativité si et seulement si f est un 3-cocycle de M à valeurs dans le M-module N, au sens de la cohomologie des groupes [12]. On explicite de même (2.7) pour démontrer que des 3-cocycles f, f' déterminent des contraintes d'associativité cohomologues si et seulement si f, f' sont des cocyles cohomologues. On trouve donc, dans ce cas, que le groupe de contraintes d'associativité, sous-groupe du groupe des automorphismes du foncteur $(S_1, S_2, S_3) \mapsto S_1S_2S_3$, est isomorphe au groupe $Z^3(M, N)$ des 3-cocycles de M à valeurs dans N. De même, le groupe des contraintes d'associativité modulo cohomologie est isomorphe au groupe cohomologique $H^3(M, N)$.

Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'objets d'une $\otimes$-catégorie $\underline{C}$ indexée par un ensemble fini non vide totalment ordonné $(I, <)$. Au moyen des X_i et de la loi $\otimes$, nous allons construire des objets de $\underline{C}$ qu'on appelle des *produits des* X_i *relativement à l'ordre* $<$. Par exemple pour $I = \{\alpha\}$, nous avons un seul produit X_α. Pour $I = \{\alpha, \beta\}$ avec $\alpha < \beta$, nous avons aussi un seul produit $X_\alpha \otimes X_\beta$; pour $I = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ avec $\alpha < \beta < \gamma$, nous avons deux produits $X_\alpha \otimes (X_\beta \otimes X_\gamma)$ et $(X_\alpha \otimes X_\beta) \otimes X_\gamma$; pour $I = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ avec $\alpha < \beta < \gamma < \delta$, nous avons cinq produits

$$\begin{gathered} X_\alpha \otimes (X_\beta \otimes (X_\gamma \otimes X_\delta)), \quad (X_\alpha \otimes X_\beta) \otimes (X_\gamma \otimes X_\delta) \\ ((X_\alpha \otimes X_\beta) \otimes X_\gamma) \otimes X_\delta, \quad (X_\alpha \otimes (X_\beta \otimes X_\gamma)) \otimes X_\delta, \quad X_\alpha \otimes ((X_\beta \otimes X_\gamma) \otimes X_\delta). \end{gathered}$$

Parmi ces produits relativement à l'ordre $<$, nous allons en choisir un que nous appellans le produit canonique de la famille $(X_i)_{i\in I}$ relativement à l'ordre $<$.

Definition 2.9. Soit $(X_i)_{i\in J}$ une famille d'objets d'une $\otimes$–catégorie $\underline{C}$, indexée par un ensemble totalment ordonné non vide $(J, <)$. Pour chaque ensemble non vide fini $I \subset J$ (totalment ordonné par l'ordre induit), on appelle le *produit canonique de la famille* $(X_i)_{i\in I}$ *relativement à l'ordre* $<$, l'objet de $\underline{C}$, noté $\otimes_I X_i$, et défini par récurrence sur le nombre d'éléments de I de la manière suivante:

(1) Si $I = \{\beta\}$, alors $\otimes_I X_i = X_\beta$;

(2) Si I a p éléments ($p > 1$) avec β le plus grand élément et I' l'ensemble des éléments $< \beta$ de I, alors $\otimes_I X_i = (\otimes_{I'} X_i) \otimes X_\beta$.

D'après cette définition, pour $I = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, le produit canonique de la famille $(X_i)_{i \in I}$ relativement à l'ordre $\alpha < \beta < \gamma$ est $(X_\alpha \otimes X_\beta) \otimes X_\gamma$. Dans ce qui suit de ce n°, nous dirons *produit canonique* (resp. *produit*) de la famille $(X_i)_{i\in I}$ au lieu de dire produit canonique de la famille $(X_i)_{i\in I}$ relativement à l'ordre $<$ (resp. produit de la famille $(X_i)_{i\in I}$ relativement à l'ordre $<$) si aucune confusion n'est à craindre.

Soit $(X_i)_{i\in J}$ une famille d'objets d'une $\otimes$-catégorie $\underline{C}$ associative, indexée par un ensemble non vide totalment ordonné $(J, <)$. Les ensembles non vides $I \subset J$ considérés ci-dessous sont des ensembles finis totalment ordonnés par l'ordre induit.

Definition 2.10. Pour chaque couple (I_1, I_2) de sous-ensembles non vides de I, tels que $I = I_1 \coprod I_2$ et que tout $i_1 \in I_1$ est plus petit que tout $i_2 \in I_2$, soit Φ_{I_1,I_2} un isomorphisme fonctoriel en les X_i, $i \in I$,

$$\underset{I}{\otimes} X_i \xrightarrow[\Phi_{I_1,I_2}]{\sim} \big(\underset{I_1}{\otimes} X_i\big) \otimes \big(\underset{I_2}{\otimes} X_i\big)$$

défini par récurrence sur le nombre d'éléments de I_2 de la manière suivante:

(1) Si $I_2 = \{\, p\}$, alors

$$\Phi_{I_1,I_2} \colon \underset{I}{\otimes} X_i = \big(\underset{I_1}{\otimes} X_i\big) \otimes X_\beta$$

est l'identité;

(2) Si I_2 a $p > 1$ éléments avec β le plus grand élément et I_2' l'ensemble des éléments $< \beta$ de I_2, alors Φ_{I_1,I_2} es définit par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\underset{I}{\otimes} X_i \arrow[r, "\Phi_{I_1,I_2}"] \arrow[d, equal] & \big(\underset{I_1}{\otimes} X_i\big) \otimes \big(\underset{I_2}{\otimes} X_i\big) = \big(\underset{I_1}{\otimes} X_i\big) \otimes \big(\big(\underset{I_2'}{\otimes} X_i\big) \otimes X_\beta\big) \arrow[d, "a"] \\
\big(\underset{I_1 \coprod I_2'}{\otimes} X_i\big) \otimes X_\beta \arrow[r, "\Phi_{I_1,I_2'} \otimes \mathrm{id}_{X_\beta}"] & \big(\big(\underset{I_1}{\otimes} X_i\big) \otimes \big(\underset{I_2'}{\otimes} X_i\big)\big) \otimes X_\beta.
\end{tikzcd}$$

Proposition 2.11. *Pour chaque triple (I_1, I_2, I_3) de sous-ensembles non vides de I tels qu'on ait $I = I_1 \coprod I_2 \coprod I_3$ et $i_1 < i_2 < i_3$ pour $i_1 \in I_1, i_2 \in I_2, i_3 \in I_3$, le*

diagramme suivant est commutatif
(2.12)

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_{I} X_i \arrow[r, "\Phi_{I_1,I_2\coprod I_3}"] \arrow[d, equal] & \big(\bigotimes_{I_1} X_i\big)\otimes\big(\bigotimes_{I_2\coprod I_3} X_i\big) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\Phi_{I_2,I_3}"] & \big(\bigotimes_{I_1} X_i\big)\otimes\big(\big(\bigotimes_{I_2} X_i\big)\otimes\big(\bigotimes_{I_3} X_i\big)\big) \arrow[d, "a"] \\
\bigotimes_{I} X_i \arrow[r, "\Phi_{I_1\coprod I_2,I_3}"] & \big(\bigotimes_{I_1\coprod I_2} X_i\big)\otimes\big(\bigotimes_{I_3} X_i\big) \arrow[r, "\Phi_{I_1,I_2}\otimes\mathrm{id}"] & \big(\big(\bigotimes_{I_1} X_i\big)\otimes\big(\bigotimes_{I_2} X_i\big)\big)\otimes\big(\bigotimes_{I_3} X_i\big).
\end{tikzcd}$$

Proof. Nous allons démontrer le théorème pour récurrence sur le nombre d'éléments de I_3.

(1) Si $I_3 = \{\beta\}$, alors (2.12) devient le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_{I} X_i \arrow[r, "\Phi_{I_1,I_2\coprod I_3}"] \arrow[d, equal] & \big(\bigotimes_{I_1} X_i\big)\otimes\big(\bigotimes_{I_2\coprod I_3} X_i\big) \arrow[r, equal] & \big(\bigotimes_{I_1} X_i\big)\otimes\big(\big(\bigotimes_{I_2} X_i\big)\otimes X_\beta\big) \arrow[d, "a"] \\
\bigotimes_{I} X_i \arrow[r, equal] & \big(\bigotimes_{I_1\coprod I_2} X_i\big)\otimes X_\beta \arrow[r, "\Phi_{I_1,I_2}\otimes\mathrm{id}"] & \big(\big(\bigotimes_{I_1} X_i\big)\otimes\big(\bigotimes_{I_2} X_i\big)\big)\otimes X_\beta,
\end{tikzcd}$$

qui est commutatif par définition de $\Phi_{I_1,I_2\coprod\{\beta\}}$.

(2) Si I_3 a $p > 1$ éléments avec β le plus grand élément et I_3' l'ensemble des éléments $< \beta$ de I_3, nous démontrons la commutativité de (2.12) en considérant le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_{I} X_i \arrow[r, "\Phi_{I_1,I_2\coprod I_3'}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & \big(\big(\bigotimes_{I_1} X_i\big)\otimes\big(\bigotimes_{I_2\coprod I_3'} X_i\big)\big)\otimes X_\beta \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes\Phi_{I_2,I_3'})\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & \big(\big(\bigotimes_{I_1} X_i\big)\otimes\big(\big(\bigotimes_{I_2} X_i\big)\otimes\big(\bigotimes_{I_3'} X_i\big)\big)\big)\otimes X_\beta \arrow[dddd, bend left=60, "a\otimes\mathrm{id}"] \\
\bigotimes_{I} X_i \arrow[r, "\Phi_{I_1,I_2\coprod I_3}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & \big(\bigotimes_{I_1} X_i\big)\otimes\big(\big(\bigotimes_{I_2\coprod I_3'} X_i\big)\otimes X_\beta\big) \arrow[u, "a"] \arrow[d, equal] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes(\Phi_{I_2,I_3'}\otimes\mathrm{id})"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IV})"] & \big(\bigotimes_{I_1} X_i\big)\otimes\big(\big(\big(\bigotimes_{I_2} X_i\big)\otimes\big(\bigotimes_{I_3'} X_i\big)\big)\otimes X_\beta\big) \arrow[u, "a"] \\
\bigotimes_{I} X_i \arrow[r, "\Phi_{I_1,I_2\coprod I_3}"] \arrow[d, equal] \arrow[drr, phantom, "(\mathrm{V})"] & \big(\bigotimes_{I_1} X_i\big)\otimes\big(\big(\bigotimes_{I_2\coprod I_3'} X_i\big)\otimes X_\beta\big) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\Phi_{I_2,I_3}"] & \big(\bigotimes_{I_1} X_i\big)\otimes\big(\big(\bigotimes_{I_2} X_i\big)\otimes\big(\big(\bigotimes_{I_3} X_i\big)\otimes X_\beta\big)\big) \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes a"] \arrow[d, "a"] \arrow[d, phantom, shift left=14ex, "(\mathrm{VIII})"] \\
\bigotimes_{I} X_i \arrow[r, "\Phi_{I_1\coprod I_2,I_3}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VI})"] & \big(\bigotimes_{I_1\coprod I_2} X_i\big)\otimes\big(\big(\bigotimes_{I_3'} X_i\big)\otimes X_\beta\big) \arrow[r, "\Phi_{I_1,I_2}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "a"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VII})"] & \big(\big(\bigotimes_{I_1} X_i\big)\otimes\big(\bigotimes_{I_2} X_i\big)\big)\otimes\big(\big(\bigotimes_{I_3'} X_i\big)\otimes X_\beta\big) \arrow[d, "a"] \\
\bigotimes_{I} X_i \arrow[r, "\Phi_{I_1\coprod I_2,I_3'}\otimes\mathrm{id}"] & \big(\big(\bigotimes_{I_1\coprod I_2} X_i\big)\otimes\big(\bigotimes_{I_3'} X_i\big)\big)\otimes X_\beta \arrow[r, "(\Phi_{I_1,I_2}\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"] & \big(\big(\big(\bigotimes_{I_1} X_i\big)\otimes\big(\bigotimes_{I_2} X_i\big)\big)\otimes\big(\bigotimes_{I_3'} X_i\big)\big)\otimes X_\beta
\end{tikzcd}$$

dans lequel les régions $(\mathrm{II}), (\mathrm{VII})$ sont commutatifs par naturalité de a; les régions $(\mathrm{I}), (\mathrm{IV}), (\mathrm{VI})$ par définition de Φ (Déf. (2.10)); la région (III)

par évidence; la région (VIII) para l'axiome du pentagone; enfin le circuit extérieur par hypothèse de récurrence. D'où la commutativité de la région (V) qui n'est outre que le diagramme (2.12) en se rapellant de la définition de $\otimes_I X_i$ (Déf. (2.9)).

$\square$

Proposition 2.13. *Chaque produit Y d'une famille $(X_i)_{i\in I}$ est isomorphe au produit canonique $\otimes_I X_i$ par un isomorphisme*

$$y\colon \bigotimes_I X_i \xrightarrow{\sim} Y$$

fonctoriel en les X_i.

Proof. Nous allons démontrer la proposition par récurrence sur le nombre d'éléments de I. Pour $I = \{\beta\}$, l'isomorphisme est l'identité $X_\beta = X_\beta$. Pour I ayant $p > 1$ éléments, en remarquant que Y doit être de la forme $Y = Z \otimes T$, Z et T étant des produits de $(X_i)_{i\in I_1}$, $(X_i)_{i\in I_2}$ respectivement avec $I = I_1 \coprod I_2$ et $i_1 < i_2$ pour $i_1 \in I_1$ et $i_2 \in I_2$, on définit y par le composé des isomorphismes

$$\bigotimes_I X_i \xrightarrow{\Phi_{I_1,I_2}} \Big(\bigotimes_{I_1} X_i\Big) \otimes \Big(\bigotimes_{I_2} X_i\Big) \xrightarrow{z\otimes t} Z \otimes T = Y$$

où z et t sont des isomorphismes définis par hypothése de récurrence. $\square$

L'isomorphisme y construit comme ci-dessus est appelé *l'isomorphisme canonique.*

Proposition 2.14. *Soient I_1, I_2, I_3 des sous-ensembles non vides de I tels que $I = I_1 \coprod I_2 \coprod I_3$ et $i_1 < i_2 < i_3$ pour $i_1 \in I_1, i_2 \in I_2, i_3 \in I_3$; et soient Y, Z, T des produits de $(X_i)_{i\in I_1}, (X_i)_{i\in I_2}, (X_i)_{i\in I_3}$ respectivement. Alors le diagramme*

(2.15)
$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "b"] \arrow[d, equal] & Y \otimes (Z \otimes T) \arrow[d, "a_{Y,Z,T}"] \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "b'"] & (Y \otimes Z) \otimes T
\end{tikzcd}$$

est commutatif, b et b' étant les isomorphismes canoniques.

Proof. Considérons le diagramme

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\bigotimes\limits_I X_i \arrow[r, "\Phi_{I_1, I_2 \coprod I_3}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I_2 \coprod I_3} X_i) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \Phi_{I_2, I_3}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & (\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes ((\bigotimes\limits_{I_2} X_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I_3} X_i)) \arrow[r, "y \otimes (z \otimes t)"] \arrow[d, "a"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & Y \otimes (X \otimes T) \arrow[d, "a"] \\
\bigotimes\limits_I X_i \arrow[r, "\Phi_{I_1 \coprod I_2, I_3}"] & (\bigotimes\limits_{I_1 \coprod I_2} X_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I_3} X_i) \arrow[r, "\Phi_{I_1, I_2} \otimes \mathrm{id}"] & ((\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I_2} X_i)) \otimes (\bigotimes\limits_{I_3} X_i) \arrow[r, "(y \otimes z) \otimes t"] & (Y \otimes Z) \otimes T
\end{tikzcd}
$$

où y, z, t sont les isomorphismes canoniques. Remarquons d'abord que les composés des isomorphismes horizontaux du diagramme donnent respectivement les isomorphismes canoniques b et b' du diagramme (2.15). On a la commutativité de la région (I) en vertue de la Proposition (2.11), et celle de la région (II) par la naturalité de a. D'où la commutativité du circuit extérieur, et donc celle de (2.15). $\square$

On peut énoncer la Proposition 2.14 sous forme plus générale dont la vérification est immédiate.

Proposition 2.16. *Soient Y_1, Y_2 des produits de $(X_i)_{i \in I}$ et $\tau \colon Y_1 \xrightarrow{\sim} Y_2$ un isomorphisme construit à l'aide de a, a^{-1}, des identités et de la loi $\otimes$; alors le diagramme*

$$
\begin{tikzcd}
\bigotimes\limits_I X_i \arrow[r, "b_1"] \arrow[d, equal] & Y_1 \arrow[d, "\tau"] \\
\bigotimes\limits_I X_i \arrow[r, "b_2"] & Y_2,
\end{tikzcd}
$$

où b_1, b_2 sont les isomorphismes canoniques, est commutatif.

Proposition 2.17. *Soient $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ des produits de $(X_i)_{i \in I}$, $\tau_{i,i+1} \colon Y_i \xrightarrow{\sim} Y_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ et $\tau_{n,1} \colon Y_n \xrightarrow{\sim} Y_1$ des isomorphismes construits au moyen de a, a^{-1}, des identités et de la loi $\otimes$. Alors le polygone suivant*

$$
\begin{tikzcd}
 & Y_1 \arrow[r, "\tau_{1,2}"] & Y_2 \arrow[dr, "\tau_{2,3}"] & \\
Y_n \arrow[ur, "\tau_{n,1}"] & & & Y_3 \arrow[d] \\
\bullet \arrow[u] & & & \bullet \arrow[dl, dotted] \\
 & \bullet \arrow[ul, dotted] & \bullet \arrow[l, dotted] &
\end{tikzcd}
$$

est commutatif.

Proof. En effet, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
Y_1 \arrow[r, "\tau_{1,2}"] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "(2)"] & Y_2 \arrow[r, "\tau_{1,3}"] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "(3)"] & Y_3 \cdots & \cdots & \cdots Y_{n-1} \arrow[r, "\tau_{n-1,n}"] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "(n)"] & Y_n \arrow[lllll, bend right, "\tau_{n,1}"'] \arrow[lllll, phantom, bend right=15, "(1)"] \\
\bigotimes\limits_I X_i \arrow[u, "b_1"] \arrow[r, equal] & \bigotimes\limits_I X_i \arrow[u, "b_2"] \arrow[r, equal] & \bigotimes\limits_I X_i \cdots \arrow[u, "b_3"] & \cdots & \cdots \bigotimes\limits_I X_i \arrow[u, "b_{n-1}"] \arrow[r, equal] & \bigotimes\limits_I X_i \arrow[u, "b_n"]
\end{tikzcd}$$

où les b_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, sont les isomorphismes canoniques, a les régions $(2), (3), \ldots, (n)$ et le circuit extérieur commutatifs en vertu de la Proposition 2.16. D'où la commutativité de la région (1) qui est le polygone considéré de la proposition. $\square$

Example 2.18. En vertue de la Proposition 2.17, le pentagone suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & (X_1 \otimes X_2) \otimes ((X_3 \otimes X_4) \otimes X_5) \arrow[dr, "\mathrm{Id} \otimes a^{-1}_{X_3, X_4, X_5}"] & \\
((X_1 \otimes X_2) \otimes (X_3 \otimes X_4)) \otimes X_5 \arrow[ur, "a^{-1}_{X_1 \otimes X_2, X_3 \otimes X_4, X_5}"] \arrow[d, "a_{X_1 \otimes X_2, X_3, X_4} \otimes \mathrm{Id}"'] & & (X_1 \otimes X_2) \otimes (X_3 \otimes (X_4 \otimes X_5)) \arrow[d, "a_{X_1 \otimes X_2, X_3, X_4 \otimes X_5}"] \\
(((X_1 \otimes X_2) \otimes X_3) \otimes X_4) \otimes X_5 & & ((X_1 \otimes X_2) \otimes X_3) \otimes (X_4 \otimes X_5) \arrow[ll, "a_{(X_1 \otimes X_2) \otimes X_3, X_4, X_5}"']
\end{tikzcd}$$

2.2.2. *Contraintes de commutativité.*

Definition 2.19. Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie. Une *contrainte de commutativité* pour $\underline{C}$ est un isomorphisme fonctoriel c

$$c_{X,Y} \colon X \otimes Y \xrightarrow{\sim} Y \otimes X$$

tel qu'on ait

$$c_{X,Y} \circ c_{Y,X} = \mathrm{Id}_{Y \otimes X}. \tag{2.20}$$

Une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte de commutativité est appelée une $\otimes$-*catégorie commutative.*

Definition 2.21. Deux contraintes de commutativité c et c' d'une $\otimes$-catégorie $\underline{C}$ son dites *cohomologues* s'il existe un automorphisme fonctoriel φ du foncteur

$$\otimes\colon \underline{C} \times \underline{C} \to \underline{C}$$

tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} X \otimes Y \arrow[r, "c_{X,Y}"] \arrow[d, "\varphi_{X,Y}"'] & Y \otimes X \arrow[d, "\varphi_{Y,X}"] \\ X \otimes Y \arrow[r, "c'_{X,Y}"'] & Y \otimes X \end{tikzcd} \tag{2.22}$$

Definition 2.23. Si $\underline{C}$ est une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte de commutativité c, X un objet de $\underline{C}$, on appelle *symétrie canonique* de $X \otimes X$ l'automorphisme

$$c_X = c_{X,X}\colon X \otimes X \xrightarrow{\sim} X \otimes X.$$

On dit que la contrainte de commutativité c est *stricte* si les symétries canoniques sont des identités; $\underline{C}$ est alors appelée une $\otimes$-*catégorie strictement commutative.*

Example 2.24. Dans l'exemple 2.3(5), on vérifie aussitôt qu'il existe des contraintes de commutativité si et seulement si M est commutatif et opére trivialment sur N. Se donner une contrainte de commutativité c revient dans ce cas à se donner une fonction antisymétrique $k\colon M^2 \to N$, la relation entre k et c étant

$$c_{S_1,S_2} = (S_1S_2, k(S_1, S_2)).$$

Ici le groupe des contraintes de commutativité, sous-groupe du groupe des automorphismes du foncteur $(S_1, S_2) \to S_1S_2$, est isomorphe canoniquement au groupe $\mathrm{Ant}^2(M, N)$ des fonctions antisymétriques $M^2 \to N$. Quand on écrit la commutativité du diagramme 2.22 en y remplaçant X, Y par S_1, S_2 respectivement et en posant

$$\varphi_{S_1,S_2} = (S_1S_2, h(S_1, S_2)),$$

$h \in C^2(M, N)$ étant une 2-cochaîne, on obtient

$$k = k' + \mathrm{ant}(h)$$

avec

$$\mathrm{ant}(h)(S_1, S_2) = h(S_1, S_2) - h(S_2, S_1).$$

Il en résulte que le groupe des classes de cohomologie de contraintes de commutativité dans ce cas s'identifie à $\mathrm{Ant}^2(M, N)/\mathrm{ant}(C^2(M, N))$ oú $\mathrm{ant}(C^2(M, N))$ est le groupe des fonctions antisymétriques de la forme $\mathrm{ant}(h)$ avec $h \in C^2(M, N)$.

2.2.3. *Contraintes d'unité.*

Definition 2.25. Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie. Une *contrainte d'unité* pour $\underline{C}$, ou simplement une *unité* pour $\underline{C}$, est un triple $(\underline{1}, g, d)$, oú $\underline{1}$ est un objet de $\underline{C}$ appelé *objet unité* et g, d sont des isomorphismes fonctoriels

$$g_X \colon X \xrightarrow{\sim} \underline{1} \otimes X, \quad d_X \colon X \xrightarrow{\sim} X \otimes \underline{1}$$

vérifiant la condition

$$g_{\underline{1}} = d_{\underline{1}}. \tag{2.26}$$

On note encore d l'isomorphisme $g_{\underline{1}} = d_{\underline{1}}$. On peut remarquer que les foncteurs

$$X \mapsto \underline{1} \otimes X \quad \text{et} \quad X \mapsto X \otimes \underline{1}$$

sont des équivalences de catégories, d'oú l'objet $\underline{1}$ est régulier (voir Definition 2.2). Une $\otimes$-catégorie munie d'une unité est dite *unifère*.

Proposition 2.27. *Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte d'unité $(\underline{1}, g, d)$. Pour tout objet X de $\underline{C}$, on a les formules*

$$g_{\underline{1}\otimes X} = \mathrm{Id}_{\underline{1}} \otimes g_X, \quad d_{X\otimes\underline{1}} = d_X \otimes \mathrm{Id}_{\underline{1}} \tag{2.28}$$

Proof. La naturalité de g et d donne les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g_X"] \arrow[d, "g_X"'] & \underline{1} \otimes X \arrow[d, "\mathrm{id}_{\underline{1}} \otimes g_X"] \\ \underline{1} \otimes X \arrow[r, "g_{\underline{1}\otimes X}"] & \underline{1} \otimes (\underline{1} \otimes X) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "d_X"] \arrow[d, "d_X"'] & X \otimes \underline{1} \arrow[d, "d_X \otimes \mathrm{id}_{\underline{1}}"] \\ X \otimes \underline{1} \arrow[r, "d_{X\otimes\underline{1}}"] & (X \otimes \underline{1}) \otimes \underline{1}, \end{tikzcd}$$

ce qui démontre les formules. $\square$

Proposition 2.29. *Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte d'unité $(\underline{1}, g, d)$. Alors le monoïde* $\mathrm{End}(\underline{1})$ *est commutatif.*

Proof. Grâce a l'isomorphisme $\underline{1} \underset{d}{\xrightarrow{\sim}} \underline{1} \otimes \underline{1}$, il sufit donc de prouver que $\mathrm{End}(\underline{1} \otimes \underline{1})$ est commutatif. Puisque $\underline{1}$ est régulier (voir Definition 2.2), tout endomorphisme f de $\underline{1} \otimes \underline{1}$ peut s'exprimer

$$f = u \otimes \mathrm{id}_{\underline{1}} = \mathrm{id}_{\underline{1}} \otimes v, \quad u, v \in \mathrm{End}(\underline{1}).$$

Si f' est un autre endomorphisme, on a

$$f' = u' \otimes \mathrm{id}_{\underline{1}} = \mathrm{Id}_{\underline{1}} \otimes v',$$

d'oú

$$ff' = (u \otimes \mathrm{id}_{\underline{1}})(\mathrm{Id}_{\underline{1}} \otimes v') = u \otimes v' = (\mathrm{Id}_{\underline{1}} \otimes v')(u \otimes \mathrm{id}_{\underline{1}}) = f'f.$$

$\square$

Remarks 2.30.

(1) En vertue de la naturalité de g, d et de la relation $g_{\underline{1}} = d_{\underline{1}}$, on a $u \otimes \mathrm{Id}_{\underline{1}} = \mathrm{Id}_{\underline{1}} \otimes u$ pour tout $u \in \mathrm{End}(\underline{1})$.
(2) Dans la démonstration ci-dessus, on utilise seulement l'hypothèse que $\underline{1}$ soit régulier et $\underline{1} \simeq \underline{1} \otimes \underline{1}$. Donc la proposition reste valable pour tout objet regulier Z tel que $Z \simeq Z \otimes Z$.

Nous allons maintenant définir deux homomorphismes γ, δ du monoïde $\mathrm{End}(\underline{1})$ dans le monoïde $\mathrm{End}(\mathrm{Id}_{\underline{C}})$ des morphismes fonctoriels du foncteur identique $\mathrm{Id}_{\underline{C}}$ de $\underline{C}$, qui nous serviront au Chapitre II.

Proposition 2.31. *Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte d'unité $(\underline{1}, g, d)$. Les applications*

$$\gamma_X \colon \mathrm{End}(\underline{1}) \to \mathrm{End}(\underline{1}), u \mapsto \gamma_X(u), \quad \delta_X \colon \mathrm{End}(\underline{1}) \to \mathrm{End}(\underline{1}), u \mapsto \delta_X(u),$$

définies respectivement par les diagrammes commutatifs

(2.32)
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\gamma_X(u)} & X \\ {\scriptstyle g_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_X} \\ \underline{1} \otimes X & \xrightarrow{u \otimes \mathrm{id}_X} & \underline{1} \otimes X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\delta_X(u)} & X \\ {\scriptstyle d_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d_X} \\ X \otimes \underline{1} & \xrightarrow{\mathrm{id}_X \otimes u} & X \otimes \underline{1}, \end{array}$$

sont des homomorphismes transformant l'élément unité en l'élément unité pour tout objet X de $\underline{C}$.

Proof. La vérification est immédiate. En plus, la naturalité de g, d donne

(2.33)
$$\gamma_{\underline{1}}(u) = \delta_{\underline{1}}(u) = u.$$

$\square$

Proposition 2.34. $(\gamma_X(u))_{X \in \mathrm{Ob}\underline{C}}, (\delta_X(u))_{X \in \mathrm{Ob}\underline{C}}$ *sont des morphismes fonctoriels du foncteur identique* $\mathrm{id}_{\underline{C}}$ *de* $\underline{C}$.

Proof. Considérons les diagrammes

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g_X"] \arrow[d, "f"'] \arrow[rrr, bend left, "\gamma_X(u)"] \arrow[rrr, phantom, bend left=20, "(\mathrm{IV})"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & \underline{1} \otimes X \arrow[r, "u \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes f"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & \underline{1} \otimes X \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes f"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & X \arrow[l, "g_X"'] \arrow[d, "f"] \\
X' \arrow[r, "g_{X'}"] \arrow[rrr, bend right, "\gamma_{X'}(u)"'] \arrow[rrr, phantom, bend right=20, "(\mathrm{V})"] & \underline{1} \otimes X' \arrow[r, "u \otimes \mathrm{id}"] & \underline{1} \otimes X' & X' \arrow[l, "g_{X'}"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "d_X"] \arrow[d, "f"'] \arrow[rrr, bend left, "\delta_X(u)"] \arrow[rrr, phantom, bend left=20, "(\mathrm{IX})"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VI})"] & X \otimes \underline{1} \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes u"] \arrow[d, "f \otimes \mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VII})"] & X \otimes \underline{1} \arrow[d, "f \otimes \mathrm{Id}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VIII})"] & X \arrow[l, "d_X"'] \arrow[d, "f"] \\
X' \arrow[r, "d_{X'}"] \arrow[rrr, bend right, "\delta_{X'}(u)"'] \arrow[rrr, phantom, bend right=20, "(\mathrm{X})"] & X' \otimes \underline{1} \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes u"] & X' \otimes \underline{1} & X' \arrow[l, "d_{X'}"']
\end{tikzcd}
$$

où f est une flèche quelconque. Dans ces diagrammes, la commutativité des régions (I), (III), (VI), (VIII) est donnée par la naturalité de g, d; celle de (II) et (VII) est immédiate en composant les flèches; enfin celle de (IV), (V), (IX), (X) résulte des diagrammes commutatifs (2.32). On en déduit la commutativité des circuits extérieurs, ce qui montre la fonctorialité de $\gamma_X(u)$ et $\delta_X(u)$. □

Proposition 2.35. *Les applications*

$$
\gamma\colon \mathrm{End}(\underline{1}) \to \mathrm{End}(\mathrm{id}_{\underline{C}}), u \mapsto (\gamma_X(u))_{X \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}},
$$
$$
\delta\colon \mathrm{End}(\underline{1}) \to \mathrm{End}(\mathrm{id}_{\underline{C}}), u \mapsto (\delta_X(u))_{X \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}}
$$

sont des homomorphismes de monoïdes.

Proof. Résultat immédiat des Propositions 2.31 et 2.34. □

Example 2.36. Dans l'exemple 2.3(5), la donnée d'une unité revient à celle d'un couple (l, r) de fonctions $M \to N$ vérifiant la relation $l(1) = r(1)$. Dans les diagrammes (2.32), si on remplace X par S, on trouve

$$
\gamma_S(u) = (S, u), \quad \delta_S(u) = (S, Su)
$$

ce qui montre que $\gamma \neq \delta$ en général. Cet exemple montre qu'une $\otimes$-catégorie peut avoir plusieurs unités.

Definition 2.37. Soient $(\underline{1}, g, d)$, $(\underline{1}', g', d')$ des unités pour la $\otimes$-catégorie $\underline{C}$. On appelle *morphisme* de $(\underline{1}, g, d)$ dans $(\underline{1}', g', d')$ un morphisme $\lambda \colon \underline{1} \to \underline{1}'$ rendant commutatifs les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{1} \otimes X \arrow[dd, "\lambda \otimes \mathrm{id}"] \\
X \arrow[ur, "g_X"] \arrow[dr, "g'_X"'] & \\
 & \underline{1}' \otimes X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & X \otimes \underline{1} \arrow[dd, "\mathrm{id} \otimes \lambda"] \\
X \arrow[ur, "d_X"] \arrow[dr, "d'_X"'] & \\
 & X \otimes \underline{1}'
\end{tikzcd}$$

pour tout objet X de $\underline{C}$. En faisant $X = \underline{1}$, on voit que λ est un isomorphisme, et que pour $(\underline{1}, g, d)$, $(\underline{1}', g', d')$ donnés, il y a un et un seul λ.

2.3. **Compatibilités entre contraintes.**

2.3.1. *Associativité et commutativité.*

Definition 2.38. Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie. Une contrainte d'associativité a et une contrainte de commutativité c pour $\underline{C}$ sont *compatibles* si pour des objets X, Y, Z de $\underline{C}$, le diagramme suivant est commutatif (*axiome de l'hexagone*)

$$\begin{tikzcd}
 & (X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "c_{X \otimes Y, Z}"] & Z \otimes (X \otimes Y) \arrow[dr, "a_{Z,X,Y}"] & \\
X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[ur, "a_{X,Y,Z}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_X \otimes c_{Y,Z}"'] & & & (Z \otimes X) \otimes Y \\
 & X \otimes (Z \otimes Y) \arrow[r, "a_{X,Z,Y}"'] & (X \otimes Z) \otimes Y \arrow[ur, "c_{X,Z} \otimes \mathrm{id}_Y"'] &
\end{tikzcd}$$

Un couple (a, c) vérifiant l'axiome de l'hexagone est appelée une *contrainte mixte d'associativité-commutativité*, ou plus simplement une *contrainte AC* pour la catégorie $\underline{C}$. Une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte AC est appelée une $\otimes$-*catégorie AC*. Elle est dite *stricte* si c l'est (voir Definition 2.23).

Definition 2.39. Deux contraintes AC (a, c) et (a', c') pour une $\otimes$-catégorie $\underline{C}$ sont dites *cohomologues* s'il existe un automorphisme fonctoriel φ du foncteur $\otimes \colon \underline{C} \times \underline{C} \to \underline{C}$ tel que les diagrammes (2.7) et (2.22) soient commutatifs.

Ici, pour avoir une proposition analogue à la Proposition 2.17, nous allons reprendre les notions de produit et produit canonique d'une famille d'objets de $\underline{C}$ $(X_i)_{i \in I}$

relativement à un ordre donné dans I. Comme nous possédons maintenant, en plus de la contrainte d'associativité, la contrainte de commutativité, nous allons donc introduire la notion de produit d'une famille $(X_i)_{i\in I}$. Dans ce qui suit de ce n°, on considère une famille d'objets $(X_i)_{i\in J}$ d'une $\otimes$-catégorie AC $\underline{C}$, indexé par un ensemble non vide totalment ordonné $(J,<)$. Les ensembles $I \subset J$ considérés sont supposés finis, non vides. On appelle *ordre canonique* de I l'ordre induit. Donc si I possede p éléments, I a $p!-1$ ordres autres que l'ordre canonique.

Definition 2.40. Un *produit* de $(X_i)_{i\in I}$ est un produit de $(X_i)_{i\in I}$ relativement à un ordre quelconque de I.

Example 2.41. Soit $I=\{\alpha,\beta,\gamma\}$ avec l'ordre canonique $\alpha<\beta<\gamma$. En dehors de cet ordre, I possède cinq autres ordres. Donc on a 12 produits de $(X_i)_{i\in I}$ qui sont

$$\begin{array}{lll}
(X_\alpha\otimes X_\beta)\otimes X_\gamma & (X_\beta\otimes X_\gamma)\otimes X_\alpha & (X_\gamma\otimes X_\alpha)\otimes X_\beta \\
(X_\beta\otimes X_\alpha)\otimes X_\gamma & (X_\gamma\otimes X_\beta)\otimes X_\alpha & (X_\alpha\otimes X_\gamma)\otimes X_\beta \\
X_\alpha\otimes (X_\beta\otimes X_\gamma) & X_\beta\otimes (X_\gamma\otimes X_\alpha) & X_\gamma\otimes (X_\alpha\otimes X_\beta) \\
X_\beta\otimes (X_\alpha\otimes X_\gamma) & X_\gamma\otimes (X_\beta\otimes X_\alpha) & X_\alpha\otimes (X_\gamma\otimes X_\beta)
\end{array}$$

Nous notons toujours par $\underset{I}{\otimes} X_i$ le produit canonique de $(X_i)_{i\in I}$ relativement à l'ordre canonique.

Definition 2.42. Pour chaque couple (I_1,I_2) de sous-ensembles non vides de I tels que $I=I_1\coprod I_2$, définissons un isomorphisme fonctoriel en les $X_i, i\in I$

$$\underset{I}{\otimes} X_i \xrightarrow[\Psi_{I_1,I_2}]{\sim} (\underset{I_1}{\otimes} X_i)\otimes(\underset{I_2}{\otimes} X_i)$$

par récurrence sur le nombre d'éléments de I. Notons β le plus grand élément de I.

(1) $I=\{\alpha,\beta\}$.

<u>1^er cas</u>: $\beta\in I_2$; alors

$$\Psi_{I_1,I_2}\colon \underset{I}{(X_i)} = X_\alpha\otimes X_\beta \tag{2.43}$$

est l'identité.

<u>2^e cas</u>: $\beta\in I_1$; alors

$$\Psi_{I_1,I_2}=c_{X_\alpha,X_\beta}\colon \underset{I}{\otimes} X_i = X_\alpha\otimes X_\beta \to (\underset{I_1}{\otimes} X_i)\otimes(\underset{I_2}{\otimes} X_i) = X_\beta\otimes X_\alpha \tag{2.44}$$

est la contrainte de commutativité c_{X_α,X_β}

(2) I a $p>2$ éléments.

<u>1^er cas</u>: $\beta\in I_2$.

(a) $I_2 = \{\beta\}$; alors

$$\Psi_{I_1,I_2} \colon \bigotimes_{I} X_i = (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes X_\beta \tag{2.45}$$

est l'identité.

(b) I_2 a plus d'un élément; alors Ψ_{I_1,I_2} est défini par le diagramme commutatif suivant

(2.46)

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes\limits_{I} X_i \arrow[rr, "\Psi_{I_1,I_2}"] \arrow[d, equal] & & (\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I_2} X_i) \arrow[r, equal] & (\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes ((\bigotimes\limits_{I'_2} X_i) \otimes X_\beta) \arrow[d, "a"] \\
\bigotimes\limits_{I} X_i \arrow[r, equal] & (\bigotimes\limits_{I_1 \coprod I'_2} X_i) \otimes X_\beta \arrow[rr, "\Psi_{I_1,I'_2} \otimes \mathrm{id}"] & & ((\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I'_2} X_i)) \otimes X_\beta
\end{tikzcd}$$

où I'_2 est l'ensemble des éléments $< \beta$ de I_2.

<u>2[e] cas</u>: $\beta \in I_1$.

(a) $I_1 = \{\beta\}$; alors

$$\Psi_{I_1,I_2} = c_{\bigotimes\limits_{I_2} X_i, X_\beta} \colon \bigotimes_{I} X_i = (\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes X_\beta \to X_\beta \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i) = (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i) \tag{2.47}$$

est la contrainte de commutativité $c_{\bigotimes\limits_{I_2} X_i, X_\beta}$.

(b) I_1 a plus d'un élément; alors Ψ_{I_1,I_2} est défini par le diagramme commutatif suivant

(2.48)

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes\limits_{I} X_i \arrow[rr, "\Psi_{I_1,I_2}"] \arrow[dddd, equal] & & (\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I_2} X_i) \arrow[r, equal] & ((\bigotimes\limits_{I'_1} X_i) \otimes X_\beta) \otimes (\bigotimes\limits_{I_2} X_i) \\
 & & & (\bigotimes\limits_{I'_1} X_i) \otimes (X_\beta \otimes (\bigotimes\limits_{I_2} X_i)) \arrow[u, "a"'] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes c"] \\
 & & & (\bigotimes\limits_{I'_1} X_i) \otimes ((\bigotimes\limits_{I_2} X_i) \otimes X_\beta) \arrow[d, "a"] \\
 & & & \\
\bigotimes\limits_{I} X_i \arrow[r, equal] & (\bigotimes\limits_{I'_1 \coprod I_2} X_i) \otimes X_\beta \arrow[rr, "\Psi_{I'_1,I_2} \otimes \mathrm{id}"] & & ((\bigotimes\limits_{I'_1} X_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I_2} X_i)) \otimes X_\beta
\end{tikzcd}$$

où I'_1 est l'ensemble des éléments $< \beta$ de I_1

Proposition 2.49. *Pour chaque couple (I_1, I_2) de sous-ensembles non vides de I tels qu'on ait $I = I_1 \coprod I_2$, le diagramme suivant est commutatif*

$$
\begin{tikzcd}
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1,I_2}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i) \arrow[d, "c"] \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\Psi_{I_2,I_1}"] & (\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_1} X_i)
\end{tikzcd}
\tag{2.50}
$$

Proof. En vertu de la symétrie de I_1, I_2 dans (2.50) on peut toujours supposer le plus grande élément β de I appartient à I_1 pour fixer les ideés. Pour démontrer la commutativité de (2.50), nous allons raisonner par récurrence sur le nombre d'éléments de I. D'abord remarquons que pour $I_1 = \{\beta\}$, le diagramme (2.50) devient

$$
\begin{tikzcd}
\bigotimes_I X_i = (\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes X_\beta \arrow[r, "c"] \arrow[d, equal] & X_\beta \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i) \arrow[d, "c"] \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, equal] & (\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes X_\beta
\end{tikzcd}
$$

compte tenu des relations (2.45) et (2.47). Ce diagramme est évidenment commutatif, en particulier pour $I = \{\alpha, \beta\}$.

Supposons la commutativité de (2.50) pour les ensembles I ayant $p - 1 \geq 2$ éléments, nous allons la montrer pour les ensembles I ayant p éléments. Pour cela considérons le diagramme suivant

$$
\begin{tikzcd}
\bigotimes_I X_i = (\bigotimes_{I'_1\coprod I_2} X_i)\otimes X_\beta \arrow[r, "\Psi_{I_2,I'_1}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & ((\bigotimes_{I_2} X_i)\otimes(\bigotimes_{I'_1} X_i))\otimes X_\beta & \\
\bigotimes_I X_i = (\bigotimes_{I'_1\coprod I_2} X_i)\otimes X_\beta \arrow[r, "\Psi_{I'_1,I_2}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[ddd, equal] & ((\bigotimes_{I'_1} X_i)\otimes(\bigotimes_{I_2} X_i))\otimes X_\beta \arrow[u, "c\otimes\mathrm{id}"'] & \\
{} \arrow[r, phantom, "(\mathrm{II})"] & (\bigotimes_{I'_1} X_i)\otimes((\bigotimes_{I_2} X_i)\otimes X_\beta) \arrow[u, "a"'] \arrow[r, phantom, "(\mathrm{IV})"] & {} \\
& (\bigotimes_{I'_1} X_i)\otimes(X_\beta\otimes(\bigotimes_{I_2} X_i)) \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes c"'] \arrow[d, "a"] & \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1,I_2}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & (\bigotimes_{I_1} X_i)\otimes(\bigotimes_{I_2} X_i) = ((\bigotimes_{I'_1} X_i)\otimes X_\beta)\otimes(\bigotimes_{I_2} X_i) \arrow[d, "c"] & \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\Psi_{I_2,I_1}"] & (\bigotimes_{I_2} X_i)\otimes(\bigotimes_{I_1} X_i) = (\bigotimes_{I_2} X_i)\otimes((\bigotimes_{I'_1} X_i)\otimes X_\beta) \arrow[uuuuu, bend right=60, "a"'] &
\end{tikzcd}
$$

où I'_1 est l'ensemble des éléments $< \beta$ de I_1. Dans ce diagramme la région (I) est commutative par hypothèse de récurrence; (II) par définition de Ψ_{I_1,I_2} (diagramme (2.48)); (IV) par l'axiome de l'hexagone; et enfin le circuit extérieur par définition de Ψ_{I_2,I_1} (diagramme (2.46)). On en déduit la commutativité de (III), d'où l'assertion. $\square$

Pour chaque triple (I_1, I_2, I_3) de sous ensembles non vides de I tels que $I = I_1 \coprod I_2 \coprod I_3$, nous allons considérer les diagrammes suivants

(2.51)

$$
\begin{tikzcd}
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1,I_2\coprod I_3}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes_{I_1} X_i)\otimes(\bigotimes_{I_2\coprod I_3} X_i) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\Psi_{I_2,I_3}"] & (\bigotimes_{I_1} X_i)\otimes((\bigotimes_{I_2} X_i)\otimes(\bigotimes_{I_3} X_i)) \arrow[d, "a"] \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1\coprod I_2,I_3}"] & (\bigotimes_{I_1\coprod I_2} X_i)\otimes(\bigotimes_{I_3} X_i) \arrow[r, "\Psi_{I_1,I_2}\otimes\mathrm{id}"] & ((\bigotimes_{I_1} X_i)\otimes(\bigotimes_{I_2} X_i))\otimes(\bigotimes_{I_3} X_i),
\end{tikzcd}
$$

(2.52)

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes\limits_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_2,\, I_1 \coprod I_3}"] \arrow[d, equal] & \Big(\bigotimes\limits_{I_2} X_i\Big) \otimes \Big(\bigotimes\limits_{I_1 \coprod I_3} X_i\Big) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \Psi_{I_1,\, I_3}"] & \Big(\bigotimes\limits_{I_2} X_i\Big) \otimes \Big(\Big(\bigotimes\limits_{I_1} X_i\Big) \otimes \Big(\bigotimes\limits_{I_3} X_i\Big)\Big) \arrow[d, "a"] \\
\bigotimes\limits_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_2 \coprod I_1,\, I_3}"] & \Big(\bigotimes\limits_{I_2 \coprod I_1} X_i\Big) \otimes \Big(\bigotimes\limits_{I_3} X_i\Big) \arrow[r, "\Psi_{I_2,\, I_1} \otimes \mathrm{id}"] & \Big(\Big(\bigotimes\limits_{I_2} X_i\Big) \otimes \Big(\bigotimes\limits_{I_1} X_i\Big)\Big) \otimes \Big(\bigotimes\limits_{I_3} X_i\Big)
\end{tikzcd}$$

(2.53)

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes\limits_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1,\, I_3 \coprod I_2}"] \arrow[d, equal] & \Big(\bigotimes\limits_{I_1} X_i\Big) \otimes \Big(\bigotimes\limits_{I_3 \coprod I_2} X_i\Big) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \Psi_{I_3,\, I_2}"] & \Big(\bigotimes\limits_{I_1} X_i\Big) \otimes \Big(\Big(\bigotimes\limits_{I_3} X_i\Big) \otimes \Big(\bigotimes\limits_{I_2} X_i\Big)\Big) \arrow[d, "a"] \\
\bigotimes\limits_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1 \coprod I_3,\, I_2}"] & \Big(\bigotimes\limits_{I_1 \coprod I_3} X_i\Big) \otimes \Big(\bigotimes\limits_{I_2} X_i\Big) \arrow[r, "\Psi_{I_1,\, I_3} \otimes \mathrm{id}"] & \Big(\Big(\bigotimes\limits_{I_1} X_i\Big) \otimes \Big(\bigotimes\limits_{I_3} X_i\Big)\Big) \otimes \Big(\bigotimes\limits_{I_2} X_i\Big)
\end{tikzcd}$$

(2.54)

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes\limits_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_3,\, I_1 \coprod I_2}"] \arrow[d, equal] & \Big(\bigotimes\limits_{I_3} X_i\Big) \otimes \Big(\bigotimes\limits_{I_1 \coprod I_2} X_i\Big) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \Psi_{I_1,\, I_2}"] & \Big(\bigotimes\limits_{I_3} X_i\Big) \otimes \Big(\Big(\bigotimes\limits_{I_1} X_i\Big) \otimes \Big(\bigotimes\limits_{I_2} X_i\Big)\Big) \arrow[d, "a"] \\
\bigotimes\limits_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_3 \coprod I_1,\, I_2}"] & \Big(\bigotimes\limits_{I_3 \coprod I_1} X_i\Big) \otimes \Big(\bigotimes\limits_{I_2} X_i\Big) \arrow[r, "\Psi_{I_3,\, I_1} \otimes \mathrm{id}"] & \Big(\Big(\bigotimes\limits_{I_3} X_i\Big) \otimes \Big(\bigotimes\limits_{I_1} X_i\Big)\Big) \otimes \Big(\bigotimes\limits_{I_2} X_i\Big)
\end{tikzcd}$$

(2.55)

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes\limits_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_2,\, I_3 \coprod I_1}"] \arrow[d, equal] & \Big(\bigotimes\limits_{I_2} X_i\Big) \otimes \Big(\bigotimes\limits_{I_3 \coprod I_1} X_i\Big) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \Psi_{I_3,\, I_1}"] & \Big(\bigotimes\limits_{I_2} X_i\Big) \otimes \Big(\Big(\bigotimes\limits_{I_3} X_i\Big) \otimes \Big(\bigotimes\limits_{I_1} X_i\Big)\Big) \arrow[d, "a"] \\
\bigotimes\limits_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_2 \coprod I_3,\, I_1}"] & \Big(\bigotimes\limits_{I_2 \coprod I_3} X_i\Big) \otimes \Big(\bigotimes\limits_{I_1} X_i\Big) \arrow[r, "\Psi_{I_2,\, I_3} \otimes \mathrm{id}"] & \Big(\Big(\bigotimes\limits_{I_2} X_i\Big) \otimes \Big(\bigotimes\limits_{I_3} X_i\Big)\Big) \otimes \Big(\bigotimes\limits_{I_1} X_i\Big)
\end{tikzcd}$$

(2.56)

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes\limits_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_3,\, I_2 \coprod I_1}"] \arrow[d, equal] & \Big(\bigotimes\limits_{I_3} X_i\Big) \otimes \Big(\bigotimes\limits_{I_2 \coprod I_1} X_i\Big) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \Psi_{I_2,\, I_1}"] & \Big(\bigotimes\limits_{I_3} X_i\Big) \otimes \Big(\Big(\bigotimes\limits_{I_2} X_i\Big) \otimes \Big(\bigotimes\limits_{I_1} X_i\Big)\Big) \arrow[d, "a"] \\
\bigotimes\limits_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_3 \coprod I_2,\, I_1}"] & \Big(\bigotimes\limits_{I_3 \coprod I_2} X_i\Big) \otimes \Big(\bigotimes\limits_{I_1} X_i\Big) \arrow[r, "\Psi_{I_3,\, I_2} \otimes \mathrm{id}"] & \Big(\Big(\bigotimes\limits_{I_3} X_i\Big) \otimes \Big(\bigotimes\limits_{I_2} X_i\Big)\Big) \otimes \Big(\bigotimes\limits_{I_1} X_i\Big)
\end{tikzcd}$$

Lemma 2.57. *Les trois propriétés suivantes sont équivalentes:*

(a) *les diagrammes* (2.51) *et* (2.52) *sont commutatifs,*
(b) *les diagrammes* (2.53) *et* (2.54) *sont commutatifs,*
(c) *les diagrammes* (2.55) *et* (2.56) *sont commutatifs.*

Proof. a) $\Longrightarrow$ b). Considérons le diagramme suivant

(2.58)

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1, I_3 \coprod I_2}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_3 \coprod I_2} X_i) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \Psi_{I_3, I_2}"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{I})"] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes ((\bigotimes_{I_3} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i)) \arrow[d, "a"] \arrow[ddddd, bend left=60, "\mathrm{id} \otimes c"] & \\
\bigotimes_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1 \coprod I_3, I_2}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & (\bigotimes_{I_1 \coprod I_3} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i) \arrow[r, "\Psi_{I_1, I_3} \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "c"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & ((\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i)) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i) \arrow[d, "c"] & \\
\bigotimes_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_2, I_1 \coprod I_3}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_1 \coprod I_3} X_i) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \Psi_{I_1, I_3}"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{IV})"] & (\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes ((\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i)) \arrow[d, "a"] \arrow[r, phantom, "(\mathrm{VIII})"] & {} \\
\bigotimes_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_2 \coprod I_1, I_3}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{V})"] & (\bigotimes_{I_2 \coprod I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i) \arrow[r, "\Psi_{I_2, I_1} \otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VI})"] & ((\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_1} X_i)) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i) & \\
\bigotimes_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1 \coprod I_2, I_3}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes_{I_1 \coprod I_2} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i) \arrow[r, "\Psi_{I_1, I_2} \otimes \mathrm{id}"] \arrow[u, "\mathrm{id} \otimes \mathrm{id}"'] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{VII})"] & ((\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i)) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i)) \arrow[u, "c \otimes \mathrm{id}"'] & \\
\bigotimes_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1, I_2 \coprod I_3}"] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2 \coprod I_3} X_i) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \Psi_{I_2, I_3}"] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes ((\bigotimes_{I_2} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_3} X_i)) \arrow[u, "a"'] &
\end{tikzcd}$$

oú la commutativité des régions (II), (VI) et des contours extérieurs découle de la Proposition 2.49; celle de (III) vient de la naturalité de c; celle de (IV), (VII) est donneé par l'hypothèse; celle de (V) est évident; enfin celle de (VIII) résulte de l'axiome de l'hexagone. D'oú la commutativité de la région (I) qui est le diagramme (2.53). Dans le diagramme (2.58), si on remplace I_2 par I_3 et I_3 par I_2, on obtient la commutativité de (2.54).

b) $\Longrightarrow$ c). Il suffit de remplacer dans (2.58) I_1, I_2, I_3 respectivement par I_3, I_1, I_2, puis par I_3, I_2, I_1.

c) $\Longrightarrow$ a). On remplace dans (2.58) I_1, I_2, I_3 respectivement par I_2, I_3, I_1, puis par I_2, I_1, I_3. □

Proposition 2.59. *Pour chaque triple* (I_1, I_2, I_3) *de sous ensembles non vides de* I *tels que* $I = I_1 \coprod I_2 \coprod I_3$*, le diagramme* (2.51) *est commutatif.*

Proof. Soit β le plus grand élément de I. D'après le lemme précédent, pour démontrer la commutativité de (2.51), on peut toujour supposer $\beta \in I_3$. D'abord remarquons que pour $I_3 = \{\beta\}$ le diagramme (2.51) devient

$$
\begin{tikzcd}
\bigotimes\limits_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1, I_2 \coprod \{\beta\}}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I_2 \coprod \{\beta\}} X_i) \arrow[r, equal] & (\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes ((\bigotimes\limits_{I_2} X_i) \otimes X_\beta) \arrow[d, "a"] \\
\bigotimes\limits_{I} X_i \arrow[r, equal] & (\bigotimes\limits_{I_1 \coprod I_2} X_i) \otimes X_\beta \arrow[r, "\Psi_{I_1, I_2} \otimes \mathrm{Id}"] & ((\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I_2} X_i)) \otimes X_\beta .
\end{tikzcd}
$$

Ce diagramme est commutatif par définition de Ψ (diagramme (2.46)) pour tout I non vide, en particulier pour I se composant de trois éléments. Nous allons démontrer la proposition par récurrence sur le nombre d'éléments de I. L'assertion est vraie pour les ensembles I ayant trois éléments. Supposons la commutativité de (2.51) pour les ensembles I ayant p éléments. Cela revient à prouver la commutativité de la région (IV) du diagramme suivant, où I_3' désigne l'ensemble des éléments $< \beta$ de I_3 (I_3 est supposé évidemment avoir plus d'un élément).

$$
\begin{tikzcd}
\bigotimes\limits_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1, I_2 \coprod I_3'} \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & ((\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I_2 \coprod I_3'} X_i)) \otimes X_\beta \arrow[r, "(\mathrm{id} \otimes \Psi_{I_2, I_3'}) \otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & ((\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes ((\bigotimes\limits_{I_2} X_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I_3'} X_i))) \otimes X_\beta \arrow[dddd, bend left=60, "a \otimes \mathrm{id}"] \\
\bigotimes\limits_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1, I_2 \coprod I_3}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes ((\bigotimes\limits_{I_2 \coprod I_3'} X_i) \otimes X_\beta) \arrow[u, "a"] \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes (\Psi_{I_2, I_3'} \otimes \mathrm{id})"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{III})"] & (\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes (((\bigotimes\limits_{I_2} X_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I_3'} X_i)) \otimes X_\beta) \arrow[u, "a"] \arrow[dd, phantom, "(\mathrm{VII})"] \\
\bigotimes\limits_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1, I_2 \coprod I_3}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes ((\bigotimes\limits_{I_2 \coprod I_3'} X_i) \otimes X_\beta) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \Psi_{I_2, I_3}"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{IV})"] & (\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes ((\bigotimes\limits_{I_2} X_i) \otimes ((\bigotimes\limits_{I_3'} X_i) \otimes X_\beta)) \arrow[u, "\mathrm{id} \otimes a"] \arrow[d, "a"] \\
\bigotimes\limits_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1 \coprod I_2, I_3}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{V})"] & (\bigotimes\limits_{I_1 \coprod I_2} X_i) \otimes ((\bigotimes\limits_{I_3'} X_i) \otimes X_\beta) \arrow[r, "\Psi_{I_1, I_2} \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "a"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VI})"] & ((\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I_2} X_i)) \otimes ((\bigotimes\limits_{I_3'} X_i) \otimes X_\beta) \arrow[d, "a"] \\
\bigotimes\limits_{I} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1 \coprod I_2, I_3'} \otimes \mathrm{id}"] & ((\bigotimes\limits_{I_1 \coprod I_2} X_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I_3'} X_i)) \otimes X_\beta \arrow[r, "(\Psi_{I_1, I_2} \otimes \mathrm{id}) \otimes \mathrm{id}"] & (((\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I_2} X_i)) \otimes (\bigotimes\limits_{I_3'} X_i)) \otimes X_\beta
\end{tikzcd}
$$

Dans ce diagramme la commutativité des régions (I), (III), (V) résulte de la définition de Ψ (diagramme (2.46)); celle de (II), (VI) résulte de la naturalité de a; celle de (VII) résulte de l'axiome du pentagone; enfin celle de circuit extérieur est donnée par l'hypothèse de récurrence. D'où la commutativité de (IV). $\square$

Proposition 2.60. *Chaque produit Y d'une famille $(X_i)_{i\in I}$ est isomorphe au produit canonique $\underset{I}{\otimes} X_i$ relativement à l'ordre canonique par un isomorphisme*

$$y\colon \underset{I}{\otimes} X_i \xrightarrow{\sim} Y$$

fonctoriel en les X_i.

Proof. Nous allons construire y par récurrence sur le nombre d'éléments de I. Pour $I = \{\beta\}$ l'isomorphisme est l'identité $X_\beta = X_\beta$. Pour I ayant $p > 1$ eléments, en remarquant que Y doit être de la forme $Y = Z \otimes T$, Z et T étant des produits de $(X_i)_{i\in I_1}$, $(X_i)_{i\in I_2}$ respectivement avec $I = I_1 \coprod I_2$, l'isomorphisme y est défini comme le composé des isomorphismes

$$\underset{I}{\otimes} X_i \xrightarrow{\Psi_{I_1,I_2}} (\underset{I_1}{\otimes} X_i) \otimes (\underset{I_2}{\otimes} X_i) \xrightarrow{z\otimes t} Z \otimes T,$$

où z et t sont des isomorphismes donnés par l'hypothése de récurrence. □

L'isomorphisme y construit comme ci-dessus est appelé *l'isomorphisme canonique.*

Nous allons maintenant énoncer des propositions dont la démonstration est analogue à celle de les Propositions 2.14, 2.16 et 2.17.

Proposition 2.61. *Soient I_1, I_2, I_3 des sous-ensembles non vides de I tels que $I = I_1 \coprod I_2 \coprod I_3$; et soient Y, Z, T des produits de $(X_i)_{i\in I_1}, (X_i)_{i\in I_2}, (X_i)_{i\in I_3}$ respectivement. Alors le diagramme suivant est commutatif, b et b' étant les isomorphismes canoniques définis dans la Proposition* 2.60

(2.62)
$$\begin{tikzcd}
\underset{I}{\otimes} X_i \arrow[r, "b"] \arrow[d, equal] & Y \otimes (Z \otimes T) \arrow[d, "a"] \\
\underset{I}{\otimes} X_i \arrow[r, "b'"] & (Y \otimes Z) \otimes T.
\end{tikzcd}$$

Proposition 2.63. *Soient I_1, I_2 des sous-ensembles non-vides de I tels que $I = I_1 \coprod I_2$; et soient Y, Z des produits de $(X_i)_{i\in I_1}$, $(X_i)_{i\in I_2}$ respectivement. Alors le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
\underset{I}{\otimes} X_i \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & Y \otimes Z \arrow[d, "c"] \\
\underset{I}{\otimes} X_i \arrow[r, "f'"] & Z \otimes Y
\end{tikzcd}$$

est commutatif, f et f' étant les isomorphismes canoniques.

Proposition 2.64. *Soient Y_1, Y_2 des produits de $(X_i)_{i\in I}$ et $\mu\colon Y_1 \to Y_2$ un isomorphisme construit à l'aide de a, a^{-1}, c, c^{-1}, des identités et de la loi $\otimes$; alors le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes\limits_I X_i \arrow[r, "b_1"] \arrow[d, equal] & Y_1 \arrow[d, "u"] \\
\bigotimes\limits_I X_i \arrow[r, "b_2"] & Y_2,
\end{tikzcd}$$

où b_1, b_2 sont les isomorphismes canoniques, est commutatif.

Proposition 2.65. *Soient $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ des produits de $(X_i)_{i\in I}$, $\mu_{i,i+1}\colon Y_i \xrightarrow{\sim} Y_{i+1}$ $(i = 1, 2, \dots, n-1)$ et $\mu_{n,1}\colon Y_n \xrightarrow{\sim} Y_1$ des isomorphismes construits au moyen de a, a^{-1}, c, c^{-1}, des identités et de la loi $\otimes$. Alors le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd}
& Y_1 \arrow[r] & Y_2 \arrow[dr] & \\
Y_n \arrow[ur] & & & Y_3 \arrow[d] \\
\bullet \arrow[u] & & & \bullet \arrow[dl, dotted] \\
& \bullet \arrow[ul, dotted] & \bullet \arrow[l, dotted] &
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Example 2.66. Le polygone suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
(X_1 \otimes X_2) \otimes (X_3 \otimes (X_4 \otimes X_5)) \arrow[r, "c"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes c"'] & (X_3 \otimes (X_4 \otimes X_5)) \otimes (X_1 \otimes X_2) \arrow[d, "c\otimes \mathrm{id}"] \\
(X_1 \otimes X_2) \otimes ((X_4 \otimes X_5) \otimes X_3) \arrow[d, "a"'] & ((X_4 \otimes X_5) \otimes X_3) \otimes (X_1 \otimes X_2) \arrow[d, "a^{-1}"] \\
((X_1 \otimes X_2) \otimes (X_4 \otimes X_5)) \otimes X_3 \arrow[d, "c\otimes \mathrm{id}"'] & (X_4 \otimes X_5) \otimes (X_3 \otimes (X_1 \otimes X_2)) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes c"] \\
((X_4 \otimes X_5) \otimes (X_1 \otimes X_2)) \otimes X_3 \arrow[r, "a^{-1}"] & (X_4 \otimes X_5) \otimes ((X_1 \otimes X_2) \otimes X_3)
\end{tikzcd}$$

Remark 2.67. Supposons $X_1 = X_4 = X$ et $X_2 = X_5 = Y$ dans le polygone ci-dessus. Alors si on reemplace la flèche $c_{X\otimes Y} \otimes \mathrm{id}$ par l'identité $\mathrm{id}_{X\otimes Y} \otimes \mathrm{id}_{X_3}$, le polygone n'est plus commutatif sauf dans le cas où la catégorie $\underline{C}$ est stricte. Donc quand on est dans une $\otimes$-catégorie AC non strict et on a affaire avec un polygone du genre dans l'exemple, dont les sommets sont des produits d'objets non différents, il nous faut penser à les numoréter pour ne pas faire gaffe.

2.3.2. *Associativité et unité.*

Definition 2.68. Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie. On dit qu'une contrainte d'associativité a et une contrainte d'unité $(\underline{1}, g, d)$ pour $\underline{C}$ sont *compatibles*, si pour tout couple d'objets (X, Y) de $\underline{C}$ les triangles suivants

(2.69)
$$\begin{tikzcd} \underline{1} \otimes (X \otimes Y) \arrow[rr, "a"] & & (\underline{1} \otimes X) \otimes Y \\ & X \otimes Y \arrow[ul, "g_{X\otimes Y}"] \arrow[ur, "g_X \otimes \mathrm{id}_Y"'] & \end{tikzcd}$$

(2.70)
$$\begin{tikzcd} X \otimes (\underline{1} \otimes Y) \arrow[rr, "a"] & & (X \otimes \underline{1}) \otimes Y \\ & X \otimes Y \arrow[ul, "\mathrm{id}_X \otimes g_Y"] \arrow[ur, "d_X \otimes \mathrm{id}_Y"'] & \end{tikzcd}$$

(2.71)
$$\begin{tikzcd} X \otimes (Y \otimes \underline{1}) \arrow[rr, "a"] & & (X \otimes Y) \otimes \underline{1} \\ & X \otimes Y \arrow[ul, "\mathrm{id}_X \otimes d_Y"] \arrow[ur, "d_{X\otimes Y}"'] & \end{tikzcd}$$

sont commutatifs.

Une couple comme ci-dessus est appelé une *contrainte mixte d'associativité-unité*, ou plus simplement une *contrainte AU* pour la $\otimes$-catégorie $\underline{C}$. Une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte AU est appelée une *$\otimes$-catégorie AU*.

Nous allons voir que ces conditions de compatibilité sont surabondants.

Proposition 2.72. *Les propriétés suivants sont équivalentes:*

(a) (2.70) *est commutatif.*
(b) (2.69) *et* (2.71) *sont commutatifs.*
(c) *Les diagrammes suivants sont commutatifs pour tout X dans $\underline{C}$.*

$$
\begin{tikzcd}
\underline{1} \otimes (\underline{1} \otimes Y) \arrow[rr, "a"] & & (\underline{1} \otimes \underline{1}) \otimes X \\
& \underline{1} \otimes X \arrow[ul, "g_{\underline{1} \otimes X}"] \arrow[ur, "g_{\underline{1}} \otimes \mathrm{id}_X"'] &
\end{tikzcd}
\tag{2.73}
$$

$$
\begin{tikzcd}
X \otimes (\underline{1} \otimes \underline{1}) \arrow[rr, "a"] & & (X \otimes \underline{1}) \otimes \underline{1} \\
& X \otimes \underline{1} \arrow[ul, "\mathrm{id}_X \otimes d_{\underline{1}}"] \arrow[ur, "d_{X \otimes \underline{1}}"'] &
\end{tikzcd}
\tag{2.74}
$$

Proof. b) $\Longrightarrow$ c). Evident.

c) $\Longrightarrow$ a) Considérons les diagrammes suivants

(2.75)
$$
\begin{tikzcd}
(X \otimes \underline{1}) \otimes Y \arrow[r, "(\mathrm{id}_X \otimes g_{\underline{1}}) \otimes \mathrm{id}_Y"] & (X \otimes (\underline{1} \otimes \underline{1})) \otimes Y \arrow[dddd, bend left=60, "c \otimes \mathrm{id}_Y"] \\
X \otimes (\underline{1} \otimes Y) \arrow[u, "a"] \arrow[r, "\mathrm{id}_X \otimes (g_{\underline{1}} \otimes \mathrm{id}_Y)"] \arrow[d, equal] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{I})"] & X \otimes ((\underline{1} \otimes \underline{1}) \otimes Y) \arrow[u, "a"'] \\
X \otimes (\underline{1} \otimes Y) \arrow[r, "\mathrm{id}_X \otimes g_{\underline{1} \otimes Y}"] \arrow[d, equal] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{II})"] & X \otimes ((\underline{1} \otimes (\underline{1} \otimes Y)) \arrow[u, "\mathrm{id}_X \otimes a"'] \arrow[d, "a"'] \arrow[r, phantom, "(\mathrm{V})"] & {} \\
X \otimes (\underline{1} \otimes Y) \arrow[r, "d_X \otimes \mathrm{id}_{\underline{1} \otimes Y}"] \arrow[d, "a"] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{III})"] & (X \otimes \underline{1}) \otimes (\underline{1} \otimes Y) \arrow[d, "a"'] \\
(X \otimes \underline{1}) \otimes Y \arrow[r, "(d_X \otimes \mathrm{id}_{\underline{1}}) \otimes \mathrm{id}_Y"] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{IV})"] & ((X \otimes \underline{1}) \otimes \underline{1}) \otimes Y
\end{tikzcd}
$$

(2.76)
$$
\begin{tikzcd}
X \otimes Y \arrow[r, "\mathrm{id}_X \otimes g_Y"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X \otimes g_Y"'] & X \otimes (\underline{1} \otimes Y) \arrow[d, "\mathrm{id}_X \otimes g_{\underline{1} \otimes Y}"'] \arrow[ddd, bend left=60, "a"] \\
X \otimes (\underline{1} \otimes Y) \arrow[r, "\mathrm{id}_X \otimes g_{\underline{1} \otimes Y}"] \arrow[d, equal] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{VI})"] & X \otimes (\underline{1} \otimes (\underline{1} \otimes Y)) \arrow[d, "a"] \arrow[r, phantom, "(\mathrm{IX})"] & {} \\
X \otimes (\underline{1} \otimes Y) \arrow[r, "d_X \otimes \mathrm{id}_{\underline{1} \otimes Y}"] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{VII})"] & (X \otimes \underline{1}) \otimes (\underline{1} \otimes Y) \\
X \otimes Y \arrow[u, "\mathrm{id}_X \otimes g_Y"] \arrow[r, "d_X \otimes \mathrm{id}_Y"] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{VIII})"] & (X \otimes \underline{1}) \otimes Y \arrow[u, "\mathrm{id}_{X \otimes \underline{1}} \otimes g_Y"']
\end{tikzcd}
$$

où la commutativité des régions (I), (IV) résulte de la fonctorialité de a et il en est de même de celle de (IX) si on remarque qu'on a $g_{\underline{1} \otimes Y} = \mathrm{id}_{\underline{1}} \otimes g_Y$ (2.28); celle de (II) et du circuit extérieur de (2.75) est donnée par l'hypothèse en tenant compte des relations $g_{\underline{1}} = d_{\underline{1}}, d_X \otimes \mathrm{id}_{\underline{1}} = d_{X \otimes \underline{1}}$ (voir (2.26) et (2.28)); celle de (V) résulte de l'axiome du pentagone; celle de (VI), (VIII) est évidente. On en déduit la commutativité du circuit extérieur de (2.76).

a) $\Longrightarrow$ b) Considérons les diagrammes ci-dessous dont la commutativité des régions (I), (IV), (VII), (IX) découle de la naturalité de a; celle de (III), (VIII) et des circuits extérieurs résulte de l'hypothèse; et enfin celle de (V), (X) vient de l'axiome du pentagone. On en déduit la commutativité de (II) et (VI) et par conséquent celle de (2.69) et (2.71) puisque $\underline{1}$ est régulier (voir Définition 2.2)

$$
\begin{tikzcd}
(\underline{1} \otimes X) \otimes Y \arrow[r, "(\mathrm{id}_{\underline{1}} \otimes g_X) \otimes \mathrm{id}_Y"] & (\underline{1} \otimes (\underline{1} \otimes X)) \otimes Y \arrow[dddd, bend left=60, "a \otimes \mathrm{id}_Y"] \\
\underline{1} \otimes (X \otimes Y) \arrow[u, "a"] \arrow[r, "\mathrm{id}_{\underline{1}} \otimes (g_X \otimes \mathrm{id}_Y)"] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{(I)}"] & \underline{1} \otimes ((\underline{1} \otimes X) \otimes Y) \arrow[u, "a"'] \\
\underline{1} \otimes (X \otimes Y) \arrow[u, equal] \arrow[r, "\mathrm{id}_{\underline{1}} \otimes g_{X \otimes Y}"] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{(II)}"] & \underline{1} \otimes (\underline{1} \otimes (X \otimes Y)) \arrow[u, "\mathrm{id}_{\underline{1}} \otimes a"'] \arrow[d, "a"'] \arrow[r, phantom, "\mathrm{(V)}"] & {} \\
\underline{1} \otimes (X \otimes Y) \arrow[u, equal] \arrow[r, "d_{\underline{1}} \otimes \mathrm{id}_{X \otimes Y}"] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{(III)}"] \arrow[d, "a"'] & (\underline{1} \otimes \underline{1}) \otimes (X \otimes Y) \arrow[d, "a"'] \\
(\underline{1} \otimes X) \otimes Y \arrow[r, "(d_{\underline{1}} \otimes \mathrm{id}_X) \otimes \mathrm{id}_Y"] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{(IV)}"] & ((\underline{1} \otimes \underline{1}) \otimes X) \otimes Y
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(X \otimes Y) \otimes \underline{1} \arrow[r, "d_{X \otimes Y} \otimes \mathrm{id}_{\underline{1}}"] & ((X \otimes Y) \otimes \underline{1}) \otimes \underline{1} \\
(X \otimes Y) \otimes \underline{1} \arrow[u, equal] \arrow[r, "(\mathrm{id}_X \otimes d_Y) \otimes \mathrm{id}_{\underline{1}}"] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{(VI)}"] & (X \otimes (Y \otimes \underline{1})) \otimes \underline{1} \arrow[u, "a \otimes \mathrm{id}_{\underline{1}}"'] \\
X \otimes (Y \otimes \underline{1}) \arrow[u, "a"] \arrow[r, "\mathrm{id}_X \otimes (d_Y \otimes \mathrm{id}_{\underline{1}})"] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{(VII)}"] & X \otimes ((Y \otimes \underline{1}) \otimes \underline{1}) \arrow[u, "a"'] \arrow[r, phantom, "\mathrm{(X)}"] & {} \\
X \otimes (Y \otimes \underline{1}) \arrow[u, equal] \arrow[r, "\mathrm{id}_X \otimes (\mathrm{id}_Y \otimes g_{\underline{1}})"] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{(VIII)}"] \arrow[d, "a"'] & X \otimes (Y \otimes (\underline{1} \otimes \underline{1})) \arrow[u, "\mathrm{id}_X \otimes a"'] \arrow[d, "a"'] \\
(X \otimes Y) \otimes \underline{1} \arrow[r, "(\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{id}_Y) \otimes g_{\underline{1}}"] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{(IX)}"] & (X \otimes Y) \otimes (\underline{1} \otimes \underline{1}) \arrow[uuuu, bend right=60, "a"']
\end{tikzcd}
$$

□

Soit toujours $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie AU avec $(a, (\underline{1}, g, d))$ comme contrainte AU. De façon analogue à §2.2.1 , nous considérons une famille d'objets $(X_i)_{i \in J}$ de $\underline{C}$, indexée par un ensemble totalement ordonnée $(J, <)$ et nous suppossons qu'il existe des $i \in J$ tels que $X_i = \underline{1}$. Pour chaque ensemble fini $I \subset J$ totalement ordonnée pour l'ordre induit (ici I peut être l'ensemble vide), nous définissons comme dans §2.2.1 le produit canonique el les produits de $(X_i)_{i \in I}$ où la seule différence qu'ici on pose

$$\bigotimes_{\emptyset} X_i = \underline{1} \tag{2.77}$$

quand I est l'ensemble vide.

Definition 2.78. Pour chaque couple (I_1, I_2) de sous-ensembles de I tels que $I = I_1 \coprod I_2$ et que la relation $i_1 \in I_1$ et $i_2 \in I_2$ implique la relation $i_1 < i_2$, définissons un isomorphisme fonctoriel en les $X_i, i \in I$,

$$\bigotimes_I X_i \xrightarrow{\Phi_{I_1,I_2}} (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i)$$

de la manière suivante:

(1) Si $I_1 = \emptyset$, alors

$$\Phi_{I_1,I_2} = g_{\bigotimes_I X_i}. \tag{2.79}$$

(2) Si $I_2 = \emptyset$, alors

$$\Phi_{I_1,I_2} = d_{\bigotimes_I X_i}. \tag{2.80}$$

(3) Si $I_2 = \{\beta\}$, alors

$$\Phi_{I_1,I_2} = \mathrm{id}_{\bigotimes_I X_i}. \tag{2.81}$$

(4) Si I_2 a $p > 1$ éléments avec β le plus grand élément et I_2' l'ensemble des éléments $< \beta$ de I_2, alors Φ_{I_1,I_2} est défini par récurrence sur le nombre d'éléments de I_2 par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\Phi_{I_1,I_2}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i) = (\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes ((\bigotimes_{I_2'} X_i) \otimes X_\beta) \arrow[d, "a"] \\
(\bigotimes_{I_1 \coprod I_2'} X_i) \otimes X_\beta \arrow[r, "\Phi_{I_1,I_2'} \otimes \mathrm{id}"] & ((\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2'} X_i)) \otimes X_\beta.
\end{tikzcd} \tag{2.82}$$

Proposition 2.83. *Pour chaque triple (I_1, I_2, I_3) de sous-ensembles de I tels que $I = I_1 \coprod I_2 \coprod I_3$ et que la relation $\alpha \in I_j, \alpha' \in I_{j'}$ $(1 \le j \le j' \le 3)$ implique $\alpha < \alpha'$,*

le diagramme suivant est commutatif
(2.84)

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes\limits_{I} X_i \arrow[r, "\Phi_{I_1, I_2 \coprod I_3}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I_2 \coprod I_3} X_i) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \Phi_{I_2, I_3}"] & (\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes ((\bigotimes\limits_{I_2} X_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I_3} X_i)) \arrow[d, "a"] \\
\bigotimes\limits_{I} X_i \arrow[r, "\Phi_{I_1 \coprod I_2, I_3}"] & (\bigotimes\limits_{I_1 \coprod I_2} X_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I_3} X_i) \arrow[r, "\Phi_{I_1, I_2} \otimes \mathrm{id}"] & ((\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I_2} X_i)) \otimes (\bigotimes\limits_{I_3} X_i).
\end{tikzcd}$$

Proof.

(1) I_1, I_2, I_3 sont différents de l'ensemble vide. Alors on est dans le cas de la Proposition 2.11.

(2) $I_1 = \emptyset$. Alors (2.84) devient le contour extérieur du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes\limits_{I} X_i \arrow[rr, "g_{\bigotimes\limits_{I} X_i}"] \arrow[dd, equal] \arrow[ddrr, "\Phi_{I_2, I_3}"] & & \underline{1} \otimes (\bigotimes\limits_{I} X_i) \arrow[rr, "\mathrm{id} \otimes \Phi_{I_2, I_3}"] & & \underline{1} \otimes ((\bigotimes\limits_{I_2} X_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I_3} X_i)) \arrow[dd, "a"] \\
 & \mathrm{(I)} & \mathrm{(II)} & \mathrm{(III)} & \\
\bigotimes\limits_{I} X_i \arrow[rr, "\Phi_{I_2, I_3}"] & & (\bigotimes\limits_{I_2} X_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I_3} X_i) \arrow[rr, "g_{\bigotimes\limits_{I_2} X_i} \otimes \mathrm{id}"] \arrow[uurr, "g"] & & (\underline{1} \otimes (\bigotimes\limits_{I_2} X_i)) \otimes (\bigotimes\limits_{I_3} X_i).
\end{tikzcd}$$

compte tenu de (2.77) et (2.84). Dans ce diagramme la commutativité de la région (I) est évidente; celle de (II) résulte de la naturalité de g; et enfin celle de (III) vient de la compatibilité de a avec $(\underline{1}, g, d)$. D'où la commutativité du circuit extérieur.

(3) $I_2 = \emptyset$. Alors (2.84) est le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes\limits_{I} X_i \arrow[r, "\Phi_{I_1, I_3}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I_3} X_i) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes g_{\bigotimes\limits_{I_3} X_i}"] & (\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes (\underline{1} \otimes (\bigotimes\limits_{I_3} X_i)) \arrow[d, "a"] \\
\bigotimes\limits_{I} X_i \arrow[r, "\Phi_{I_1, I_3}"] & (\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I_3} X_i) \arrow[r, "d_{\bigotimes\limits_{I_1} X_i} \otimes \mathrm{id}"] & ((\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes \underline{1}) \otimes (\bigotimes\limits_{I_3} X_i),
\end{tikzcd}$$

compte tenu de (2.77), (2.79),(2.80). Ici la commutativité est évident en vertu de (2.70).

(4) $I_3 = \emptyset$. Alors (2.84) est le circuit extérieur du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes\limits_I X_i \arrow[r, "\Phi_{I_1,I_2}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, "d_{\bigotimes\limits_I X_i}"] & (\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I_2} X_i) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes d_{\bigotimes\limits_{I_2} X_i}"] \arrow[dr, "d_{(\bigotimes\limits_{I_1} X_i)\otimes(\bigotimes\limits_{I_2} X_i)}"] & (\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes ((\bigotimes\limits_{I_2} X_i) \otimes \underline{1}) \arrow[d, "a"] \\
\bigotimes\limits_I X_i \arrow[r, "d_{\bigotimes\limits_{I_1\coprod I_2} X_i}"] & (\bigotimes\limits_{I_1\coprod I_2} X_i) \otimes \underline{1} \arrow[r, "\Phi_{I_1,I_2}\otimes\mathrm{id}"] & ((\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I_2} X_i)) \otimes \underline{1}
\end{tikzcd}$$

(I) (II) (III)

compte tenu de (2.77), (2.80). Dans ce diagramme la commutativité de la région (I) est évidente; celle de (II) découle de la fonctorialité de d; et enfin celle de (III) résulte de la compatibilité de a avec $(\underline{1}, g, d)$ (diagramme (2.71)). D'où la commutativité du circuit extérieur.

□

Proposition 2.85. *Pour toute famille $(X_i)_{i\in I}$, les diagrammes suivants sont commutatifs*

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes\limits_I X_i \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & \bigotimes\limits_I X_i \arrow[d, "g_{\bigotimes\limits_I X_i}"] \\
\bigotimes\limits_I X_i \arrow[r, "\Phi_{\emptyset,I}"] & (\bigotimes\limits_{\emptyset} X_i) \otimes (\bigotimes\limits_I X_i) = \underline{1} \otimes (\bigotimes\limits_I X_i)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes\limits_I X_i \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & \bigotimes\limits_I X_i \arrow[d, "d_{\bigotimes\limits_I X_i}"] \\
\bigotimes\limits_I X_i \arrow[r, "\Phi_{I,\emptyset}"] & (\bigotimes\limits_I X_i) \otimes (\bigotimes\limits_{\emptyset} X_i) = (\bigotimes\limits_I X_i) \otimes \underline{1}
\end{tikzcd}$$

Proof. On a la commutativité de ces diagrammes en vertu de (2.77), (2.79), (2.80).

□

Proposition 2.86. *Chaque produit Y d'une famille $(X_i)_{i\in I}$ est isomorphe au produit canonique $\bigotimes\limits_{I'} X_i$ par un isomorphisme*

$$y\colon \bigotimes_{I'} X_i \xrightarrow{\sim} Y$$

fonctoriel en les X_i, $i \in I'$, I' etant le sous ensemble de I se composant des éléments $i \in I$ tels que $X_i \neq \underline{1}$.

Proof.

(1) Pour $I = \{\beta\}$, on a $I' = I$ pour $X_\beta \neq \underline{1}$ et $I' = \emptyset$ pour $X_\beta = \underline{1}$. Dans les deux cas on pose

$$y = \mathrm{id}_{X_\beta}.$$

(2) Pour I ayant $p > 1$ éléments, en remarquant que Y doit être de la forme $Y = Z \otimes T$, Z et T étant des produits de $(X_i)_{i \in I_1}, (X_i)_{i \in I_2}$ respectivement avec $I = I_1 \coprod I_2$ et $i_1 < i_2$ pour $i_1 \in I_1, i_2 \in I_2$, on définit l'isomorphisme y comme le composé des isomorphismes

$$\bigotimes_{I'} X_i \xrightarrow{\Phi_{I_1', I_2'}} (\bigotimes_{I_1'} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2'} X_i) \xrightarrow{z \otimes t} Z \otimes T = Y,$$

z et t étant des isomorphismes définis par l'hypothèse de récurrence.

(3) Pour $I = \emptyset$, on a $Y = \underline{1}$ et $\bigotimes_{I'} X_i = \underline{1}$. Dans ce cas on pose

$$y = \mathrm{id}_{\underline{1}}.$$

□

L'isomorphisme y construit comme ci-dessus est appelé *l'isomorphisme canonique.*

Ici nous avons aussi la proposition dont la démonstration est comme celle dans §2.2.1.

Proposition 2.87. *Soient I_1, I_2, I_3 des sous-ensembles non vides de I tels que $I = I_1 \coprod I_2 \coprod I_3$ et $i_1 < i_2 < i_3$ pour $i_1 \in I_1, i_2 \in I_2, i_3 \in I_3$; et soient Y, Z, T des produits de $(X_i)_{i \in I_1}, (X_i)_{i \in I_2}, (X_i)_{i \in I_3}$ respectivement. Alors le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \bigotimes_{I'} X_i \arrow[r, "b"] \arrow[d, equal] & Y \otimes (Z \otimes T) \arrow[d, "a"] \\ \bigotimes_{I'} X_i \arrow[r, "b'"] & (Y \otimes Z) \otimes T \end{tikzcd}$$

est commutatif; b et b' étant les isomorphismes canoniques et I' l'ensemble des éléments i de I tels que $X_i \neq \underline{1}$.

Proposition 2.88. *Soit Y un produit d'une famille non vide $(X_i)_{i\in I}$. Alors les diagrammes suivants sont commutatifs*

$$
\begin{tikzcd}
\bigotimes\limits_{I'} X_i \arrow[r, "y"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[d, "g_Y"] \\
\bigotimes\limits_{I'} X_i \arrow[r, "y'"] & \underline{1} \otimes Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\bigotimes\limits_{I'} X_i \arrow[r, "y'"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[d, "d_Y"] \\
\bigotimes\limits_{I'} X_i \arrow[r, "y''"] & Y \otimes \underline{1}
\end{tikzcd}
$$

y, y', y'' étant les isomorphismes canoniques; I' l'ensemble des éléments i de I tels que $X_i \neq \underline{1}$.

Proposition 2.89. *Soient Y_1, Y_2 des produits des familles non vides $(X_i)_{i\in I_1}, (X_i)_{i\in I_2}$ respectivement où $I_1 \subset I_2$ et $X_i = \underline{1}$ pour $i \in I_2 - I_1$. Soit $\nu\colon Y_1 \xrightarrow{\sim} Y_2$ un isomorphisme construit à l'aide de $a, a^{-1}, g, g^{-1}, d, d^{-1}$, des identités et de la loi $\otimes$. Alors le diagramme*

$$
\begin{tikzcd}
\bigotimes\limits_{I'_1} X_i \arrow[r, "y_1"] \arrow[d, equal] & Y_1 \arrow[d, "\nu"] \\
\bigotimes\limits_{I'_2} X_i \arrow[r, "y_2"] & Y_2
\end{tikzcd}
$$

est commutatif; y_1, y_2 étant les isomorphismes canoniques; I'_1 l'ensemble des $i \in I_1$ tels que $X_i \neq \underline{1}$.

Proposition 2.90. *Soient $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ des produits des familles non vides*

$$(X_i)_{i\in I_1}, (X_i)_{i\in I_2}, \ldots, (X_i)_{i\in I_n}$$

respectivement et tels que

$$\bigotimes_I X_i \underset{y_j}{\xrightarrow{\sim}} Y_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

I étant l'ensemble des $i \in I_j$ pour lesquels $X_i \neq \underline{1}$, ce qui veut dire que l'ensemble des $i \in I_j$ pour lesquels $X_i \neq \underline{1}$ est le même pour $j = 1, 2, \ldots, n$; et y_j l'isomorphisme canonique. Soient $\nu_{i,i+1}\colon Y_i \xrightarrow{\sim} Y_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ et $\nu_{n,1}\colon Y_n \xrightarrow{\sim} Y_1$ des isomorphismes construits au moyen de $a, a^{-1}, g, g^{-1}, d, d^{-1}$, des identités et de la loi

$\otimes$. *Alors le polygone suivant*

$$
\begin{tikzcd}
 & Y_1 \arrow[r, "\nu_{1,2}"] & Y_2 \arrow[dr, "\nu_{2,3}"] & \\
Y_n \arrow[ur, "\nu_{n,1}"] & & & Y_3 \arrow[d] \\
\bullet \arrow[u] & & & \bullet \arrow[dl, dotted] \\
 & \bullet \arrow[ul, dotted] & \bullet \arrow[l, dotted] &
\end{tikzcd}
$$

est commutatif.

Examples 2.91.

(1) Le polygone suivant est commutatif

$$
\begin{tikzcd}
 & (X\otimes\underline{1})\otimes(\underline{1}\otimes(Y\otimes Z)) \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes g^{-1}_{Y\otimes Z}"] & \\
((X\otimes\underline{1})\otimes\underline{1})\otimes(Y\otimes Z) \arrow[d, "(d_X\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"'] & & (X\otimes\underline{1})\otimes(Y\otimes Z) \arrow[d, "a^{-1}"] \\
(X\otimes\underline{1})\otimes(Y\otimes Z) \arrow[dr, "d_X\otimes\mathrm{id}"'] & & X\otimes(\underline{1}\otimes(Y\otimes Z)) \\
 & X\otimes(Y\otimes Z) \arrow[ur, "\mathrm{id}\otimes g_{Y\otimes Z}"'] &
\end{tikzcd}
$$

(2) Reprenons l'exemple 2.3(5). Se donner une contrainte d'associativité a et une contrainte d'unité $(\underline{1}, g, d)$ dans ce cas revient à se donner respectivement un 3-cocycle f de M à valeurs dans le M-module N (Exemple 2.8(2)) et un couple (l, r) de fonctions $s\colon M \to N$ vérifiant $l(1) = r(1)$ (Exemple 2.36), les relations entre a et f, (g, d) et (l, r) étant

$$
\begin{aligned}
a_{S_1,S_2,S_3} &= (S_1S_2S_3, f(S_1, S_2, S_3)) \\
g_S &= (S, l(S)) \\
d_S &= (S, r(S)).
\end{aligned}
$$

Nous supposons ici, pour simplifier le problème, que f est un 3-cocycle normalisé, i.e., $f(1, S_2, S_3) = f(S_1, 1, S_3) = f(S_1, S_2, 1) = 0$. Ecrivons les conditions de compatibilité (2.73) et (2.74). Nous obtinons

$$
\begin{aligned}
l(S) &= l(1) \\
r(S) &= S\,l(1)
\end{aligned}
\tag{2.92}
$$

compte tenu de la normalisation de f et de la relation $l(1) = r(1)$. Donc ici une contrainte d'unité est bien déterminée par un élément $l(1) = u \in N$, i.e., bien déterminée par la donnée d'un morphisme $(1, u)$. Prenons un autre morphisme $(1, u')$ qui donne d'aprés (2.92) un autre couple (l', r') de fonctions $M \to N$

$$\begin{aligned} l'(S) &= u' \\ r'(S) &= Su'. \end{aligned}$$

Il existe manifestement un isomorphisme $\lambda = (1, u' - u)$ entre les unités correspondant à (l, r) et (l', r') (Définition 2.37). On peut se demander ici s'il y a toujours un morphisme entre deux unités d'une $\otimes$-catégorie. Pour répondre à cette question, reprenons l'Exemple 2.36. Dans ce cas, la donnée d'une unité revient à celle d'un couple (l, r) de fonctions $M \to N$ vérifiant $l(1) = r(1)$; celle d'un morphisme entre les unités correspondant à $(l, r), (l', r')$ revient a donner un élément $v \in N$ vérifiant

$$\begin{aligned} l'(S) &= l(S) + v \\ r'(S) &= r(S) + Sv \end{aligned}$$

pour tout $S \in M$, ce qui n'a pas lieu en général pour $(l, r), (l', r')$ arbitraires. Nous allons montrer ci-dessus qu'il existe toujours un morphisme entre deux unités d'une $\otimes$-catégorie associative. Précisons qu'il s'agit des unités compatibles avec la contrainte d'associativité.

Proposition 2.93. *Soient* $(a, (\underline{1}, g, d))$ *et* $(a, (\underline{1}', g', d'))$ *deux contraintes* AU *pour une* $\otimes$*-catégorie* $\underline{C}$. *Alors il existe un morphisme unique* λ *qui est un isomorphisme de* $(\underline{1}, g, d)$ *dans* $(\underline{1}', g', d')$.

Proof. S'il existe un morphisme $\lambda\colon (\underline{1}, g, d) \to (\underline{1}', g', d')$, λ est bien unique et est un isomorphisme (Définition 2.37). Montrons donc l'existence de λ. Pour cela considérons les diagrammes commutatifs suivant

$$\begin{tikzcd} & \underline{1} \otimes \underline{1} \arrow[dd, "g'_{\underline{1}} g_{\underline{1}}^{-1}"] \\ \underline{1} \arrow[ur, "g_{\underline{1}}"] \arrow[dr, "g'_{\underline{1}}"'] & \\ & \underline{1}' \otimes \underline{1} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \underline{1} \otimes \underline{1} \arrow[dd, "d'_{\underline{1}} d_{\underline{1}}^{-1}"] \\ \underline{1} \arrow[ur, "d_{\underline{1}}"] \arrow[dr, "d'_{\underline{1}}"'] & \\ & \underline{1} \otimes \underline{1}'. \end{tikzcd}$$

Puisque $\underline{1}$ est régulier, alors il existe deux isomorphismes

$$\lambda, \lambda' \colon \underline{1} \to \underline{1}'$$

tels que

$$\lambda \otimes \mathrm{id}_{\underline{1}} = g'_{\underline{1}} g_{\underline{1}}^{-1}; \qquad \mathrm{id}_{\underline{1}} \otimes \lambda' = d'_{\underline{1}} d_{\underline{1}}^{-1}. \tag{2.94}$$

Montrons $\lambda = \lambda'$. Dans ce but, considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
& \underline{1}\otimes\underline{1} \arrow[dl, "\mathrm{id}\otimes g_{\underline{1}}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes g'_{\underline{1}}"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{I})"] & \\
\underline{1}\otimes(\underline{1}\otimes\underline{1}) \arrow[rr, "\mathrm{id}\otimes(\lambda\otimes\mathrm{id})"] \arrow[d, "a"'] & {} \arrow[d, phantom, "(\mathrm{II})"] & \underline{1}\otimes(\underline{1}'\otimes\underline{1}) \arrow[d, "a"] \\
(\underline{1}\otimes\underline{1})\otimes\underline{1} \arrow[rr, "(\mathrm{id}\otimes\lambda')\otimes\mathrm{id}"] & {} \arrow[d, phantom, "(\mathrm{III})"] & (\underline{1}\otimes\underline{1}')\otimes\underline{1} \\
& \underline{1}\otimes\underline{1} \arrow[ul, "d_{\underline{1}}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[ur, "d'_{\underline{1}}\otimes\mathrm{id}"'] &
\end{tikzcd}$$

dont la commutativité de (I), (III) résulte de (2.94); celle du contour extérieur vient de la condition de la compatibilité (2.70). D'où la commutativité de (II), ce qui donne $(\mathrm{id} \otimes \lambda) \otimes \mathrm{id} = (\mathrm{id} \otimes \lambda') \otimes \mathrm{id}$ en vertu de la fonctorialité de a, et par conséquent $\lambda = \lambda'$ puisque $\underline{1}$ est régulier. Ils nous reste à prouver que λ es un morphisme de $(\underline{1}, g, d)$ dans $(\underline{1}', g', d')$. Il suffit de montrer que pour tout objet X de $\underline{C}$, le triangle

$$\begin{tikzcd}
& \underline{1}\otimes X \arrow[dd, "\lambda\otimes\mathrm{id}"] \\
X \arrow[ur, "g_X"] \arrow[dr, "g'_X"'] & \\
& \underline{1}'\otimes X
\end{tikzcd}$$

est commutatif, la preuve de l'assertion analogue pour d_X, d'_X étant semblable. Ce triangle est la région (I) (à facteur $\underline{1}$ prés) du diagramme

$$\begin{tikzcd}
& \underline{1}\otimes(\underline{1}\otimes X) \arrow[r, "a"] \arrow[dd, "\mathrm{id}\otimes(\lambda\otimes\mathrm{id})"] & (\underline{1}\otimes\underline{1})\otimes X \arrow[dd, "(\mathrm{id}\otimes\lambda)\otimes\mathrm{id}"'] & \\
\underline{1}\otimes X \arrow[ur, "\mathrm{id}\otimes g_X"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes g'_X"'] \arrow[r, phantom, "(\mathrm{I})"] & {} \arrow[r, phantom, "(\mathrm{II})"] & {} \arrow[r, phantom, "(\mathrm{III})"] & \underline{1}\otimes X \arrow[ul, "d_{\underline{1}}\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dl, "d'_{\underline{1}}\otimes\mathrm{id}"] \\
& \underline{1}\otimes(\underline{1}'\otimes X) \arrow[r, "a"] & (\underline{1}\otimes\underline{1}')\otimes X &
\end{tikzcd}$$

dont la région (II) est commutative par naturalité de a, (III) par (2.94) et l'égalité $\lambda = \lambda'$, et enfin le circuit extérieur par la condition de compatibilité (2.70). D'où la commutaivité de (I). $\square$

Les formules suivants nous seront utiles au Chapitre II.

Proposition 2.95. *Soit* $\underline{C}$ *une* $\otimes$*-catégorie* AU *et soit* $(a, (\underline{1}, g, d))$ *sa contrainte* AU. *On a les formules suivantes (Proposition* 2.31*) où* $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}, u \in \mathrm{End}(\underline{1})$

$$\gamma_{X\otimes Y}(u) = \gamma_X(u) \otimes \mathrm{id}_Y \tag{2.96}$$

$$\delta_{X\otimes Y}(u) = \mathrm{id}_X \otimes \delta_Y(u) \tag{2.97}$$

$$\delta_X(u) \otimes \mathrm{id}_Y = \mathrm{id}_X \otimes \gamma_Y(u) \tag{2.98}$$

(2.99)

Proof. Considérons les diagrammes suivants

$$\begin{tikzcd}
X \otimes Y \arrow[r, "\gamma_{X\otimes Y}(u)"] \arrow[d, "g_{X\otimes Y}"'] \arrow[ddd, bend right=60, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & X \otimes Y \arrow[d, "g_{X\otimes Y}"] \arrow[ddd, bend left=60, "\mathrm{id}"] \\
\underline{1} \otimes (X \otimes Y) \arrow[r, "u\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"] \arrow[d, "a", "(\mathrm{IV})"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & \underline{1} \otimes (X \otimes Y) \arrow[d, "a"', "(\mathrm{V})"] \\
(\underline{1} \otimes X) \otimes Y \arrow[r, "(u\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"] & (\underline{1} \otimes X) \otimes Y \\
X \otimes Y \arrow[r, "\gamma_X(u)\otimes\mathrm{id}"] \arrow[u, "g_X\otimes\mathrm{id}"] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{III})"] & X \otimes Y \arrow[u, "g_X\otimes\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X \otimes Y \arrow[r, "\delta_{X\otimes Y}(u)"] \arrow[d, "d_{X\otimes Y}"'] \arrow[ddd, bend right=60, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VI})"] & X \otimes Y \arrow[d, "d_{X\otimes Y}"] \arrow[ddd, bend left=60, "\mathrm{id}"] \\
(X \otimes Y) \otimes \underline{1} \arrow[r, "(\mathrm{id}_X\otimes\mathrm{id}_Y)\otimes u"] & (X \otimes Y) \otimes \underline{1} \\
X \otimes (Y \otimes \underline{1}) \arrow[r, "\mathrm{id}_X\otimes(\mathrm{id}_Y\otimes u)"] \arrow[u, "a"', "(\mathrm{IX})"] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{VII})"] & X \otimes (Y \otimes \underline{1}) \arrow[u, "a", "(\mathrm{X})"'] \\
X \otimes Y \arrow[r, "\mathrm{id}_X\otimes\delta_Y(u)"] \arrow[u, "\mathrm{id}_X\otimes d_Y"] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{VIII})"] & X \otimes Y \arrow[u, "\mathrm{id}_X\otimes d_Y"']
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
X \otimes Y \arrow[rr, "\mathrm{id}_X \otimes \gamma_Y(u)"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X \otimes g_Y"'] \arrow[ddd, bend right=60, "\mathrm{id}"'] \arrow[drr, phantom, "(\mathrm{XI})"] & & X \otimes Y \arrow[d, "\mathrm{id}_X \otimes g_Y"] \arrow[ddd, bend left=60, "\mathrm{id}"] \\
X \otimes (\underline{1} \otimes Y) \arrow[rr, "\mathrm{id}_X \otimes (u \otimes \mathrm{id}_Y)"] \arrow[d, "a"'] \arrow[drr, phantom, "(\mathrm{XII})"] & & X \otimes (\underline{1} \otimes Y) \arrow[d, "a"] \\
(X \otimes \underline{1}) \otimes Y \arrow[rr, "(\mathrm{id}_X \otimes u) \otimes \mathrm{id}_Y"] \arrow[l, phantom, "(\mathrm{XIV})"] & & (X \otimes \underline{1}) \otimes Y \arrow[r, phantom, "(\mathrm{XV})"] & {} \\
X \otimes Y \arrow[rr, "\delta_X(u) \otimes \mathrm{id}_Y"] \arrow[u, "d_X \otimes \mathrm{id}_Y"] \arrow[urr, phantom, "(\mathrm{XIII})"] & & X \otimes Y \arrow[u, "d_X \otimes \mathrm{id}_Y"']
\end{tikzcd}
$$

dont la commutativité des régions (I), (III), (VI), (VIII), (XI), (XIII) vient de la définition de γ et δ (Proposition 2.31); celle de (II), (VII), (XII) résulte de la naturalité de a; et enfin celle de (IV), (V), (IX), (X), (XIV), (XV) découle des conditions de compatibilité (2.69), (2.70), (2.71). D'où la commutativité des trois circuits extérieurs, ce qui nous donne les formules considérées. $\square$

2.3.3. *Commutativité et unité.*

Definition 2.100. Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie. Une contrainte de commutativité c et une contrainte d'unité $(\underline{1}, g, d)$ sont dites *compatibles*, si pour tout objet X de $\underline{C}$, le triangle

$$
\begin{tikzcd}
 & \underline{1} \otimes X \arrow[dd, "c_{\underline{1},X}"] \\
X \arrow[ur, "g_X"] \arrow[dr, "d_X"'] & \\
 & X \otimes \underline{1}
\end{tikzcd}
\tag{2.101}
$$

est commutatif. On a en particulier

$$
c_{\underline{1},\underline{1}} = \mathrm{id}_{\underline{1} \otimes \underline{1}}. \tag{2.102}
$$

Un couple $(c, (\underline{1}, g, d))$ comme ci-dessus est appelé une *contrainte mixte de commutativité-unité*, ou plus simplement une *contrainte CU* pour la $\otimes$-catégorie $\underline{C}$. Une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte CU est appelée une $\otimes$-*catégorie CU*.

Proposition 2.103. *Dans une $\otimes$-catégorie* CU $\underline{C}$*, les homomorphismes γ_X et δ_X (Proposition* 2.31*) sont égaux pour tout objet X de $\underline{C}$.*

Proof. Considérons le diagramme suivant

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\gamma_X(u)"] \arrow[d, "g_X"'] \arrow[ddd, bend right=60, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & X \arrow[d, "g_X"] \arrow[ddd, bend left=60, "\mathrm{id}"] \\
\underline{1}\otimes X \arrow[r, "u\otimes\mathrm{id}_X"] \arrow[d, "c_{\underline{1},X}", "(\mathrm{IV})"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & \underline{1}\otimes X \arrow[d, "c_{\underline{1},X}"', "(\mathrm{V})"] \\
X\otimes\underline{1} \arrow[r, "\mathrm{id}_X\otimes u"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & X\otimes\underline{1} \\
X \arrow[u, "d_X"] \arrow[r, "\delta_X(u)"] & X \arrow[u, "d_X"']
\end{tikzcd}
$$

où la commutativité des régions (I), (III) résulte de la définition de γ_X et δ_X; celle de (II) résulte de la naturalité de c; et enfin celle de (IV), (V) résulte de la condition de compatibilité (2.101). On obtient $\gamma_X(u) = \delta_X(u)$ pour tout $u \in \mathrm{End}(\underline{1})$, donc

$$\gamma_X = \delta_X \tag{2.104}$$

pour tout $X \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$. $\square$

2.3.4. *Associativité, commutativité et unité.*

Definition 2.105. Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie. On dit qu'une contrainte d'associativité a, une contrainte de commutativité c et une contrainte d'unité $(\underline{1}, g, d)$ pour $\underline{C}$ sont *compatibles* si elles son compatibles deux à deux, au sens défini dans les Definitions 2.38, 2.68 et 2.100.

Un triple $(a, c, (\underline{1}, g, d))$ comme ci-dessus est appelé une *contrainte mixte d'associativité-commutativité-unité*, ou plus simplement une *contrainte ACU* pour la $\otimes$-catégorie $\underline{C}$. Une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte ACU est appelée une $\otimes$-*catégorie ACU*. Elle est dite *stricte* si c l'est (Définition 2.23).

On va démontrer ci-dessous que les conditions de compatibilité dans la Définition 2.105 sont surabondants.

Proposition 2.106. *Soient $a, c, (\underline{1}, g, d)$ des contraintes d'associativité, commutativité, unité pour une $\otimes$-catégorie $\underline{C}$. Si a est compatible avec c et avec $(\underline{1}, g, d)$ séparément, alors c est compatible avec $(\underline{1}, g, d)$.*

Proof. Le triangle de compatibilité entre c et $(\underline{1}, g, d)$ (diagramme (2.101)) se retrouve en la région (IV) (à facteur régulier $\underline{1}$ près) du diagramme suivant

$$
\begin{tikzcd}
\underline{1} \otimes X \arrow[r, "g_{\underline{1} \otimes X}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & \underline{1} \otimes (\underline{1} \otimes X) \arrow[d, "a"] \arrow[ddddd, bend left=60, "\mathrm{id}_{\underline{1}} \otimes c_{\underline{1}, X}"] \\
\underline{1} \otimes X \arrow[r, "g_{\underline{1}} \otimes \mathrm{id}_X"] \arrow[d, "c_{\underline{1}, X}"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & (\underline{1} \otimes \underline{1}) \otimes X \arrow[d, "c"] \\
X \otimes \underline{1} \arrow[r, "\mathrm{id}_X \otimes g_{\underline{1}}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & X \otimes (\underline{1} \otimes \underline{1}) \arrow[d, "a"] \arrow[d, phantom, shift left=8ex, "(\mathrm{VI})"] \\
X \otimes \underline{1} \arrow[r, "d_X \otimes \mathrm{id}_{\underline{1}}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IV})"] & (X \otimes \underline{1}) \otimes \underline{1} \\
X \otimes \underline{1} \arrow[r, "g_X \otimes \mathrm{id}_{\underline{1}}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{V})"] & (\underline{1} \otimes X) \otimes \underline{1} \arrow[u, "c_{u,X} \otimes \mathrm{id}_{\underline{1}}"'] \\
X \otimes \underline{1} \arrow[r, "g_{X \otimes \underline{1}}"] & \underline{1} \otimes (X \otimes \underline{1}) \arrow[u, "a"']
\end{tikzcd}
$$

dont la commutativité des régions (I), (III), (V) résulte des conditions de compatibilité (2.69),(2.70), (2.71); celle de (II) résulte de la naturalité de c; celle de (VI) résulte de l'axiome de l'hexagone; et enfin celle du contour extérieur résulte de la naturalité de g. D'où la commutativité de (IV). $\square$

Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte ACU $(a, c, (\underline{1}, g, d))$. Considérons une famille d'objets $(X_i)_{i \in J}$ de $\underline{C}$, indexeé par un ensemble non vide totalement ordonné $(J, <)$. Les ensembles $I \subseteq J$ considérés sont supposés finis et peuvent être vides. Comme $\underline{C}$ est à la fois AC et AU, nous allons procéder comme dans les paragraphes 2.3.1 et 2.3.2. De façon précise, nous définissons le produit canonique $\bigotimes\limits_I X_i$ d'une famille $(X_i)_{i \in I}$ relativement à l'ordre canonique de la maniére suivante:

- $\bigotimes\limits_I X_i = \underline{1}$ si $I = \emptyset$
- $\bigotimes\limits_I X_i = X_\beta$ si $I = \{\beta\}$
- $\bigotimes\limits_I X_i = (\bigotimes\limits_{I'} X_i) \otimes X_\beta$ si I a $p > 1$ éléments avec β le plus grand élément et I' l'ensemble des éléments $< \beta$ de I.

Nous définissons les produits de $(X_i)_{i \in I}$ comme dans la Définition 2.39.

Enfin pour chaque couple (I_1, I_2) de sous-ensembles (qui peuvent être vides) de I tels que $I = I_1 \coprod I_2$, définissons un isomorphisme fonctoriel en les $X_i, i \in I$,

$$\underset{I}{\otimes} X_i \xrightarrow{\Psi_{I_1,I_2}} (\underset{I_1}{\otimes} X_i) \otimes (\underset{I_2}{\otimes} X_i)$$

de la maniére suivante:

- Si $I_1 = \emptyset$, alors
$$\Psi_{I_1,I_2} = g_{\underset{I}{\otimes} X_i}.$$
- Si $I_2 = \emptyset$, alors
$$\Psi_{I_1,I_2} = d_{\underset{I}{\otimes} X_i}.$$
- Si $I_1 \neq \emptyset$ et $I_2 \neq \emptyset$, alors Ψ_{I_1,I_2} est défini comme dans la Définition 2.42.

Proposition 2.107. *Pour chaque couple (I_1, I_2) de sous-ensembles de I tels que $I = I_1 \coprod I_2$, le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd}
\underset{I}{\otimes} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1,I_2}"] \arrow[d, equal] & (\underset{I_1}{\otimes} X_i) \otimes (\underset{I_2}{\otimes} X_i) \arrow[d, "c"] \\
\underset{I}{\otimes} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_2,I_1}"] & (\underset{I_2}{\otimes} X_i) \otimes (\underset{I_1}{\otimes} X_i).
\end{tikzcd}$$

Proof.

(1) I_1 et I_2 sont tous différents de l'ensemble vide. La démonstration est analogue à celle de la Proposition 2.49.

(2) I_1 ou I_2 est l'ensemble vide. La commutativité du diagramme considéré résulte de la compatibilité entre c et $(\underline{1}, g, d)$ compte tenu de la définition de Ψ_{I_1,I_2} ci-dessus.

$\square$

Proposition 2.108. *Pour chaque triple (I_1, I_2, I_3) de sous-ensembles de I tels que $I = I_1 \coprod I_2 \coprod I_3$, le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd}
\underset{I}{\otimes} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1,I_2 \coprod I_3}"] \arrow[d, equal] & (\underset{I_1}{\otimes} X_i) \otimes (\underset{I_2 \coprod I_3}{\otimes} X_i) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \Psi_{I_2,I_3}"] & (\underset{I_1}{\otimes} X_i) \otimes ((\underset{I_2}{\otimes} X_i) \otimes (\underset{I_3}{\otimes} X_i)) \arrow[d, "a"] \\
\underset{I}{\otimes} X_i \arrow[r, "\Psi_{I_1 \coprod I_2,I_3}"] & (\underset{I_1 \coprod I_2}{\otimes} X_i) \otimes (\underset{I_3}{\otimes} X_i) \arrow[r, "\Psi_{I_1,I_2} \otimes \mathrm{id}"] & ((\underset{I_1}{\otimes} X_i) \otimes (\underset{I_2}{\otimes} X_i)) \otimes (\underset{I_3}{\otimes} X_i).
\end{tikzcd}$$

Proof.

(1) I_1, I_2, I_3 sont tous différents de l'ensemble vide. Dans ce cas la démonstration est la même que celle de la Proposition 2.59.

(2) L'un des trois ensembles I_1, I_2, I_3 est l'ensemble vide. Alors la démonstration est analogue à celle de la Proposition 2.83, (2)-(4).

□

Proposition 2.109. *Pour toute famille $(X_i)_{i\in I}$, les diagrammes suivants sont commutatifs*

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_I X_i \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & \bigotimes_I X_i \arrow[d, "g_{\bigotimes_I X_i}"] \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\Psi_{\emptyset, I}"] & (\bigotimes_\emptyset X_i) \otimes (\bigotimes_I X_i) = \underline{1} \otimes (\bigotimes_I X_i).
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_I X_i \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & \bigotimes_I X_i \arrow[d, "d_{\bigotimes_I X_i}"] \\
\bigotimes_I X_i \arrow[r, "\Psi_{I, \emptyset}"] & (\bigotimes_I X_i) \otimes (\bigotimes_\emptyset X_i) = (\bigotimes_I X_i) \otimes \underline{1}.
\end{tikzcd}$$

Proof. Résultat immédiat de la définition de $\bigotimes_\emptyset X_i, \Psi_{\emptyset,I}, \Psi_{I,\emptyset}$. □

Proposition 2.110. *Chaque produit Y d'une famille $(X_i)_{i\in I}$ est isomorphe au produit canonique relativement à l'ordre canonique $\bigotimes_{I'} X_i$ par un isomorphisme*

$$y\colon \bigotimes_{I'} X_i \xrightarrow{\sim} Y$$

fonctoriel en les $X_i, i \in I'$, I' étant l'ensemble des $i \in I$ pour lesquels $X_i \neq \underline{1}$.

Proof.

(1) Pour $I = \{\beta\}$, on a $I' = I$ pour $X_\beta \neq \underline{1}$ et $I' = \emptyset$ pour $X_\beta = \underline{1}$. Dans les deux cas on pose
$$y = \mathrm{id}_{X_\beta}$$

(2) Pour I ayant $p > 1$ éléments, en remarquant que Y doit être de la forme $Y = Z \otimes T$, Z et T étant des produits de $(X_i)_{i\in I_1}, (X_i)_{i\in I_2}$ respectivement avec $I = I_1 \coprod I_2$, on définit y comme le composé des isomorphismes
$$\bigotimes_{I'} X_i \xrightarrow{\Psi_{I_1', I_2'}} (\bigotimes_{I_1'} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2'} X_i) \xrightarrow{z\otimes t} Z \otimes T = Y,$$

z et t étant les isomorphismes par l'hypothèse de récurrence.

(3) Pour $I = \emptyset$, on a $Y = \underline{1}$ et $\underset{I'}{\otimes} X_i = \underline{1}$. Dans ce cas on pose

$$y = \mathrm{id}_{\underline{1}}.$$

□

L'isomorphisme y construit comme ci-dessus est appelé *l'isomorphisme canonique*.

Moyennant les Propositions 2.107–2.110, nous avons les propositions suivantes dont la démonstration est comme celle dans §2.2.1.

Proposition 2.111. *Soient I_1, I_2, I_3 des sous-ensembles non vides de I tels que $I = I_1 \coprod I_2 \coprod I_3$; et soient Y, Z, T des produits de $(X_i)_{i \in I_1}, (X_i)_{i \in I_2}, (X_i)_{i \in I_3}$ respectivement. Alors le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd} \underset{I'}{\otimes} X_i \arrow[r, "b"] \arrow[d, equal] & Y \otimes (Z \otimes T) \arrow[d, "a"] \\ \underset{I'}{\otimes} X_i \arrow[r, "b'"] & (Y \otimes Z) \otimes T, \end{tikzcd}$$

b et b' étant les isomorphismes canoniques et I' l'ensemble des éléments $i \in I$ pour lesquels $X_i \neq \underline{1}$.

Proposition 2.112. *Soient I_1, I_2 des sous-ensembles non vides de I tels que $I = I_1 \coprod I_2$; et soient Y, Z des produits de $(X_i)_{i \in I_1}, (X_i)_{i \in I_2}$ respectivement. Alors le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \underset{I'}{\otimes} X_i \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & Y \otimes Z \arrow[d, "c"] \\ \underset{I'}{\otimes} X_i \arrow[r, "f'"] & Z \otimes Y \end{tikzcd}$$

est commutatif; f et f' étant les isomorphismes canoniques et I' l'ensemble des éléments $i \in I$ tels que $X_i \neq \underline{1}$.

Proposition 2.113. *Soit Y un produit d'une famille non vide $(X_i)_{i\in I}$. Les diagrammes suivants sont commutatifs*

$$
\begin{tikzcd}
\bigotimes_{I'} X_i \arrow[r, "y"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[d, "g_Y"] \\
\bigotimes_{I'} X_i \arrow[r, "y'"] & \underline{1} \otimes Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\bigotimes_{I'} X_i \arrow[r, "y"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[d, "d_Y"] \\
\bigotimes_{I'} X_i \arrow[r, "y''"] & Y \otimes \underline{1}
\end{tikzcd}
$$

y, y', y'' étant les isomorphismes canoniques et I' l'ensemble des éléments $i \in I$ tels que $X_i \neq \underline{1}$.

Proposition 2.114. *Soient Y_1, Y_2 des produits des familles non vides $(X_i)_{i\in I_1}, (X_i)_{i\in I_2}$ respectivement et telles que l'ensemble des $i \in I_j$ pour lesquels $X_i \neq \underline{1}$ est le même ensemble I pour $j = 1, 2$. Soit $\nu\colon Y_1 \xrightarrow{\sim} Y_2$ un isomorphisme construit à l'aide de $a, a^{-1}, c, c^{-1}, g, g^{-1}, d, d^{-1}$, des identités et de la loi $\otimes$. Alors le diagramme*

$$
\begin{tikzcd}
\bigotimes_{I} X_i \arrow[r, "y_1"] \arrow[d, equal] & Y_1 \arrow[d, "\nu"] \\
\bigotimes_{I} X_i \arrow[r, "y_2"] & Y_2
\end{tikzcd}
$$

est commutatif; y_1, y_2 étant les isomorphismes canoniques.

Proposition 2.115. *Soient $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ des produits des familles non vides*

$$(X_i)_{i\in I_1}, (X_i)_{i\in I_2}, \ldots, (X_i)_{i\in I_n}$$

respectivement et telles que l'ensemble des $i \in I_j$ pour lesquels $X_i \neq \underline{1}$ est le même pour $j = 1, 2, \ldots, n$. Soient $\nu_{i,i+1}\colon Y_i \xrightarrow{\sim} Y_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ et $\nu_{n,1}\colon Y_n \xrightarrow{\sim} Y_1$ des isomorphismes construits au moyen de $a, a^{-1}, g, g^{-1}, d, d^{-1}$, des identités et de la loi $\otimes$. Alors le polygone suivant est commutatif

$$
\begin{tikzcd}
 & Y_1 \arrow[r, "\nu_{1,2}"] & Y_2 \arrow[dr, "\nu_{2,3}"] & \\
Y_n \arrow[ur, "\nu_{n,1}"] & & & Y_3 \arrow[d] \\
\bullet \arrow[u] & & & \bullet \arrow[dl, dotted] \\
 & \bullet \arrow[ul, dotted] & \bullet \arrow[l, dotted] &
\end{tikzcd}
\quad .
$$

Example 2.116. Le polygone suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
(\underline{1} \otimes X) \otimes ((Y \otimes Z) \otimes \underline{1}) \arrow[rr, "\mathrm{id} \otimes d_{Y \otimes Z}"] \arrow[d, "c"'] & & (\underline{1} \otimes X) \otimes (Y \otimes Z) \arrow[d, "a"] \\
((Y \otimes Z) \otimes \underline{1}) \otimes (\underline{1} \otimes X) \arrow[d, "d^{-1}_{Y \otimes Z} \otimes g^{-1}_X"'] & & ((\underline{1} \otimes X) \otimes Y) \otimes Z \arrow[d, "(g^{-1}_X \otimes \mathrm{id}) \otimes \mathrm{id}"] \\
(Y \otimes Z) \otimes X \arrow[dr, "c"'] & & (X \otimes Y) \otimes Z \arrow[dl, "a^{-1}"] \\
& X \otimes (Y \otimes Z) &
\end{tikzcd}$$

2.3.5. *Objets inversibles.*

Dans ce n°, $\underline{C}$ désigne une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte AU $(a, (\underline{1}, g, d))$.

Definition 2.117. Soit X un objet de $\underline{C}$. On dit que X est *inversible* s'il existe des objets X', X'' de $\underline{C}$ tels que $X' \otimes X \simeq \underline{1}, X \otimes X'' \simeq \underline{1}$.

Proposition 2.118. *Si $x' \colon X' \otimes X \simeq \underline{1}$ et $x'' \colon X \otimes X'' \simeq \underline{1}$, alors $X' \simeq X''$.*

Proof. En effet, on a

$$X' \xrightarrow[\sim]{d_{X'}} X' \otimes \underline{1} \xleftarrow[\sim]{\mathrm{id} \otimes x''} X' \otimes (X \otimes X'') \xrightarrow[\sim]{a} (X' \otimes X) \otimes X'' \xrightarrow[\sim]{x' \otimes \mathrm{id}} \underline{1} \otimes X'' \xleftarrow[\sim]{g_{X''}} X''$$

□

Corollary 2.119. *X est inversible si et seulement s'il existe X' tel que $X' \otimes X \simeq \underline{1}$ et $X \otimes X' \simeq \underline{1}$.*

Proof. S'il existe X' tel que $X' \otimes X \simeq \underline{1}, X \otimes X' \simeq \underline{1}$, on a bien X inversible d'après la Définition 2.117. Inversement, supposons X inversible, c'est à dire il existe X', X'' tels que $X' \otimes X \simeq \underline{1}$ et $X \otimes X'' \simeq \underline{1}$. Or la Proposition 2.118 nous donne $X' \simeq X''$, d'où $X \otimes X'' \simeq X \otimes X' \simeq \underline{1}$. Il résulte du corollaire que X' est aussi inversible. □

Proposition 2.120. *X est inversible si et seulement si X est régulier.*

Proof. Si X est inversible, en vertu du corollaire de la Proposition 2.118, il existe X' tel que $X' \otimes X \simeq \underline{1}$ et $X \otimes X' \simeq \underline{1}$. Alors les foncteurs de $\underline{C}$ dans $\underline{C}$

$$\begin{aligned} F &\colon \underline{C} \to \underline{C}, Y \mapsto Y \otimes X, & G &\colon \underline{C} \to \underline{C}, Y \mapsto Y \otimes X', \\ F' &\colon \underline{C} \to \underline{C}, Y \mapsto X \otimes Y, & G' &\colon \underline{C} \to \underline{C}, Y \mapsto X' \otimes Y \end{aligned}$$

vérifient les relations

$$\begin{aligned} GF &\simeq \mathrm{id}_{\underline{C}}, & FG &\simeq \mathrm{id}_{\underline{C}}, \\ G'F' &\simeq \mathrm{id}_{\underline{C}}, & F'G' &\simeq \mathrm{id}_{\underline{C}}. \end{aligned}$$

Donc F et F' sont des équivalences, et pour conséquent X est régulier.

Inversement, supposons que X est régulier; d'où F, F' sont des équivalences. On en déduit l'existence de X', X'' tels que $X' \otimes X \simeq \underline{1}$ et $X \otimes X'' \simeq \underline{1}$, donc X est inversible. $\square$

Proposition 2.121. *Soient X un objet inversible et X^{-1} tel que*

$$t_X \colon X^{-1} \otimes X \xrightarrow{\sim} \underline{1}, \quad p_X \colon X \otimes X^{-1} \xrightarrow{\sim} \underline{1}.$$

Les propriétés suivants sont équivalents:

(a) *Le pentagone suivant est commutatif*

(2.122)
$$\begin{tikzcd} X^{-1} \otimes (X \otimes X^{-1}) \arrow[rr, "a"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes p_X"'] & & (X^{-1} \otimes X) \otimes X^{-1} \arrow[d, "t_X \otimes \mathrm{id}"] \\ X^{-1} \otimes \underline{1} & & \underline{1} \otimes X^{-1} \\ & X^{-1} \arrow[ul, "d_{X^{-1}}"] \arrow[ur, "g_{X^{-1}}"'] & \end{tikzcd}$$

(b) *Le pentagone suivant est commutatif*

(2.123)
$$\begin{tikzcd} X \otimes (X^{-1} \otimes X) \arrow[rr, "a"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes t_X"'] & & (X \otimes X^{-1}) \otimes X \arrow[d, "p_X \otimes \mathrm{id}"] \\ X \otimes \underline{1} & & \underline{1} \otimes X \\ & X \arrow[ul, "d_X"] \arrow[ur, "g_X"'] & \end{tikzcd}$$

Proof. Les diagrammes (2.122) et (2.123) se retrouvent en les régions (II) et (IV) (à facteur régulier prés) du diagramme suivant

$$
\begin{tikzcd}
 & (X\otimes X^{-1})\otimes(X\otimes X^{-1}) \arrow[ddddl, bend right, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes p_X"'] \arrow[drr, "a"] \arrow[dddrr, bend left, "p_X\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{XII})"] & \\
X\otimes(X^{-1}\otimes(X\otimes X^{-1})) \arrow[ur, "a"] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{XI})", near start] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes a"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes(\mathrm{id}\otimes p_X)"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & X\otimes((X^{-1}\otimes X)\otimes X^{-1}) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes(t_X\otimes\mathrm{id})"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & (X\otimes(X^{-1}\otimes X))\otimes X^{-1} \arrow[r, "a\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes t_X)\otimes\mathrm{id}"] & ((X\otimes X^{-1})\otimes X)\otimes X^{-1} \arrow[d, "(p_X\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"'] \\
X\otimes(X^{-1}\otimes\underline{1}) \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{V})"] & X\otimes(\underline{1}\otimes X^{-1}) \arrow[r, "a"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VI})"] & (X\otimes\underline{1})\otimes X^{-1} \arrow[r, phantom, "(\mathrm{IV})"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VII})"] & (\underline{1}\otimes X)\otimes X^{-1} \\
(X\otimes X^{-1})\otimes\underline{1} \arrow[d, "p_X\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VIII})"] & X\otimes X^{-1} \arrow[l, "d_{X\otimes X^{-1}}"] \arrow[ul, "\mathrm{id}\otimes d_{X^{-1}}"'] \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes g_{X^{-1}}"] \arrow[r, equal] \arrow[d, "p_X"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IX})"] & X\otimes X^{-1} \arrow[u, "d_X\otimes\mathrm{id}"] \arrow[ur, "g_X\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, "g_{X\otimes X^{-1}}"'] \arrow[d, "p_X"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{X})"] & \underline{1}\otimes(X\otimes X^{-1}) \arrow[u, "a"'] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes p_X"] \\
\underline{1}\otimes\underline{1} & \underline{1} \arrow[l, "d_{\underline{1}}"'] \arrow[r, equal] & \underline{1} \arrow[r, "g_{\underline{1}}"] & \underline{1}\otimes\underline{1}
\end{tikzcd}
$$

dans lequel la commutativité de la région (I) résulte de l'axiome du pentagone; celle des régions (III), (XI), (XIII) résulte de la fonctorialité de a; celle des régions (V),(VI),(VII) résulte de la compatibilité entre a et $(\underline{1}, g, d)$; celle de la région (VIII) résulte de la fonctorialité de d; celle de (IX) est évidente; celle de (X) résulte de la fonctorialité de g; et celle du circuit extérieur vient de la relation $d_{\underline{1}} = g_{\underline{1}}$ (2.26). D'oú la commutativité de (II) est équivalente à celle de (IV), ce qui démontre la proposition. $\square$

Il résulte de la proposition que, pour l'isomorphisme $t_X\colon X^{-1} \otimes X \xrightarrow{\sim} \underline{1}$ donné, il existe un et seulement un isomorphisme $p_X\colon X \otimes X^{-1} \xrightarrow{\sim} \underline{1}$ rendant commutatifs les diagrammes (2.122) et (2.123); ce qui nous donne la définition suivante

Definition 2.124. Un inverse pour un objet X de $\underline{C}$ est un triple (X^{-1}, t_X, p_X) avec

$$t_X\colon X^{-1} \otimes X \xrightarrow{\sim} \underline{1}, \quad p_X\colon X \otimes X^{-1} \xrightarrow{\sim} \underline{1}$$

rendant commutatifs les diagrammes (2.122), (2.123).

Proposition 2.125. *Soient (X^{-1}, t_X, p_X), (X', t'_X, p'_X) deux inverses pour un objet inversible X et k l'isomorphisme déterminé par le diagramme commutatif*

(2.126)
$$\begin{tikzcd} X^{-1} \otimes X \arrow[rr, "k \otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, "t_X"'] & & X' \otimes X \arrow[dl, "t'_X"] \\ & \underline{1} & \end{tikzcd}$$

Alors le diagramme suivant est commutatif (et inversement)

(2.127)
$$\begin{tikzcd} X \otimes X^{-1} \arrow[rr, "\mathrm{id} \otimes k"] \arrow[dr, "p_X"'] & & X' \otimes X \arrow[dl, "p'_X"] \\ & \underline{1} & \end{tikzcd}$$

Proof. Considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
X \otimes (X^{-1} \otimes X) \arrow[r, "a"] \arrow[rrrr, bend left=20, "\mathrm{id} \otimes (k \otimes \mathrm{id})"] \arrow[dd, "\mathrm{id} \otimes t_X"'] & (X \otimes X^{-1}) \otimes X \arrow[rr, "(\mathrm{id} \otimes k) \otimes \mathrm{id}"] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{I})"] & & (X \otimes X') \otimes X & X \otimes (X' \otimes X) \arrow[l, "a"'] \arrow[dd, "\mathrm{id} \otimes t'_X"] \\
\arrow[r, phantom, "(\mathrm{II})"] & & \underline{1} \otimes X \arrow[ul, "p_X \otimes \mathrm{id}"] \arrow[ur, "p'_X \otimes \mathrm{id}"'] \arrow[u, phantom, "(\mathrm{II})"] & \arrow[r, phantom, "(\mathrm{III})"] & \\
X \otimes \underline{1} & & X \arrow[ll, "d_X"'] \arrow[rr, "d_X"] \arrow[u, "g_X"] & & X \otimes \underline{1}
\end{tikzcd}$$

dont la région (II) est le diagramme (2.127) (à facteur régulier près). Ici la commutativité de la région (I) résulte de la fonctorialité de a; celle de (II), (III) vient de la Définition (2.124); et celle du circuit extérieur est donnée par l'hypothèse. D'où la commutativité de (II) et par suite celle de (2.127). $\square$

Considérons maintenant une famille finie d'objets $(X_i)_{i \in I}$. Supposons

$$I = I_1 \coprod \{j,k\} \coprod I_2$$

avec $i_1 < j < k < i_2$ pour tout $i_1 \in I_1$, tout $i_2 \in I_2$ (I est supposé totalment ordonné), et de plus $X_j = X^{-1}, X_k = X$ (resp. $X_j = X, X_k = X^{-1}$). Définissons une "*contraction*" r (resp. s): $\bigotimes_I X_i \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{I_1 \coprod I_2} X_i$ par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes\limits_I X_i \arrow[r, "\Phi_{I_1 \coprod \{j,k\}, I_2}"] \arrow[d, "r\ (\mathrm{resp.}\ s)"] & \Big(\bigotimes\limits_{I_1 \coprod \{j,k\}} X_i\Big) \otimes \Big(\bigotimes\limits_{I_2} X_i\Big) \arrow[r, "\Phi_{I_1, \{j,k\}} \otimes \mathrm{id}"] & \Big(\Big(\bigotimes\limits_{I_1} X_i\Big) \otimes \Big(\bigotimes\limits_{\{j,k\}} X_i\Big)\Big) \otimes \Big(\bigotimes\limits_{I_2} X_i\Big) \arrow[d, "(\mathrm{id} \otimes t_X) \otimes \mathrm{id}\ (\mathrm{resp.}\ (\mathrm{id} \otimes p_X) \otimes \mathrm{id})"'] \\
\bigotimes\limits_{I_1 \coprod I_2} X_i \arrow[r, "\Phi_{I_1, I_2}"] & \Big(\bigotimes\limits_{I_1} X_i\Big) \otimes \Big(\bigotimes\limits_{I_2} X_i\Big) \arrow[r, "\Phi_{I_1, \emptyset} \otimes \mathrm{id}"] & \Big(\Big(\bigotimes\limits_{I_1} X_i\Big) \otimes \Big(\bigotimes\limits_{\emptyset} X_i\Big)\Big) \otimes \Big(\bigotimes\limits_{I_2} X_i\Big),
\end{tikzcd}$$

les isomorphismes Φ étant les isomorphismes définis dans la Définition 2.78. Il peut arriver qu'on a en outre $I_2 = \{l\} \coprod I'_2$ avec $l < i_2$ pour tout $i_2 \in I'_2$ et $X_l = X^{-1}$ (resp. $X_l = X$), alors on vérifie aisément en vertu des diagrammes commutatifs (2.122) et (2.123) que l'isomorphisme r (resp. s) est égal à l'isomorphisme r' (resp.

s') défini par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes\limits_I X_i \arrow[r, "\Phi_{I_1\coprod\{j,k,l\},I'_2}"] \arrow[d, "r'\ (\mathrm{resp.}\ s')"] & (\bigotimes\limits_{I_1\coprod\{j,k,l\}} X_i)\otimes(\bigotimes\limits_{I'_2} X_i) \arrow[r, "\Phi_{I_1\coprod\{j\},\{k,l\}}\otimes\mathrm{id}"] & ((\bigotimes\limits_{I_1\coprod\{j\}} X_i)\otimes(\bigotimes\limits_{\{k,l\}} X_i))\otimes(\bigotimes\limits_{I'_2} X_i) \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes p_X)\otimes\mathrm{id}\ (\mathrm{resp.}\ (\mathrm{id}\otimes t_X)\otimes\mathrm{id})"'] \\
\bigotimes\limits_{I_1\coprod I_2} X_i \arrow[r, "\Phi_{I_1\coprod\{j\},I'_2}"] & (\bigotimes\limits_{I_1\coprod\{j\}} X_i)\otimes(\bigotimes\limits_{I'_2} X_i) \arrow[r, "\Phi_{I_1\coprod\{j\},\emptyset}\otimes\mathrm{id}"] & ((\bigotimes\limits_{I_1\coprod\{j\}} X_i)\otimes(\bigotimes\limits_{\emptyset} X_i))\otimes(\bigotimes\limits_{I'_2} X_i).
\end{tikzcd}$$

Les contractions r et s nous donnent aussitôt la proposition suivante

Proposition 2.128. *Tout diagramme dans $\underline{C}$ construit à l'aide de $a, a^{-1}, g, g^{-1}, d, d^{-1}$ p, p^{-1}, des indentités et de la loi $\otimes$ est commutatif.*

La proposition (2.128) nous permet d'énoncer la proposition suivante

Proposition 2.129. *Si (X^{-1}, t_X, p_X) et (Y^{-1}, t_Y, p_Y) sont des inverses pour X et Y inversibles, resp., alors (X, p_X, t_X) est un inverse pour X^{-1} et $(Y^{-1}\otimes X^{-1}, t_{X\otimes Y}, p_{X\otimes Y})$ est un inverse pour $X \otimes Y$, où $t_{X\otimes Y}$ et $p_{X\otimes Y}$ sont définis par les diagrammes commutatifs suivants*

$$\begin{tikzcd}
((Y^{-1}\otimes X^{-1})\otimes X)\otimes Y & (Y^{-1}\otimes(X^{-1}\otimes X))\otimes Y \arrow[l, "a\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes t_X)\otimes\mathrm{id}"] & (Y^{-1}\otimes\underline{1})\otimes Y \\
(Y^{-1}\otimes X^{-1})\otimes(X\otimes Y) \arrow[u, "a"] \arrow[r, "t_{X\otimes Y}"] & \underline{1} & Y^{-1}\otimes Y \arrow[l, "t_Y"'] \arrow[u, "d_{Y^{-1}}\otimes\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
((X\otimes Y)\otimes Y^{-1})\otimes X^{-1} & (X\otimes(Y\otimes Y^{-1}))\otimes X^{-1} \arrow[l, "a\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes p_Y)\otimes\mathrm{id}"] & (X\otimes\underline{1})\otimes X^{-1} \\
(X\otimes Y)\otimes(Y^{-1}\otimes X^{-1}) \arrow[u, "a"] \arrow[r, "p_{X\otimes Y}"] & \underline{1} & X\otimes X^{-1} \arrow[l, "p_X"'] \arrow[u, "d_X\otimes\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}$$

Proof. La premiére assertion résulte aussitôt de la définition 2.124; quant á la deuxiéme, elle est une conséquence immédiate de la Proposition 2.128. $\square$

Proposition 2.130. *Soient $(X^{-1}, t_X, p_X), (Y^{-1}, t_Y, p_Y), (Z^{-1}, t_Z, p_Z)$ des inverses pour X, Y, Z, respectivement, et $f\colon X \xrightarrow{\sim} Y, h\colon Y \xrightarrow{\sim} Z$ des isomorphismes. On a les propriétés suivantes:*

(i) *Il existe un et un seul isomorphisme* $\alpha(f)\colon X^{-1} \xrightarrow{\sim} Y^{-1}$ *rendant commutatif le diagramme*

$$
\begin{tikzcd}
X^{-1}\otimes X \arrow[r, "t_X"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes f"'] & \underline{1} & Y^{-1}\otimes Y \arrow[l, "t_Y"'] \\
& X^{-1}\otimes Y \arrow[ur, "\alpha(f)\otimes\mathrm{id}"'] &
\end{tikzcd}
\tag{2.131}
$$

(ii) *Le diagramme suivant est commutatif*

$$
\begin{tikzcd}
X\otimes X^{-1} \arrow[r, "p_X"] \arrow[dr, "f\otimes\mathrm{id}"'] & \underline{1} & Y\otimes Y^{-1} \arrow[l, "p_Y"'] \\
& Y\otimes X^{-1} \arrow[ur, "\mathrm{id}\otimes\alpha(f)"'] &
\end{tikzcd}
\tag{2.132}
$$

(iii) $\alpha(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ *et* $\alpha(hf) = \alpha(h)\alpha(f)$.

Proof.

(i) Conséquence immédiate de ce que Y est régulier.
(ii) Considérons le diagramme suivant dont la région (IX) est le diagramme (2.132) (à facteur régulier prés):

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
(Y^{-1}\otimes Y)\otimes Y^{-1} \arrow[rr, "t_Y\otimes\mathrm{id}"] & & \underline{1}\otimes Y^{-1} & Y^{-1} \arrow[l, "g_{Y^{-1}}"'] \arrow[r, "d_{Y^{-1}}"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{I})" very near start, shift right=0ex] & Y^{-1}\otimes\underline{1} & Y^{-1}\otimes(Y\otimes Y^{-1}) \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes p_Y"'] \arrow[lllll, bend right=12, "a"'] \\
(Y^{-1}\otimes Y)\otimes X^{-1} \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\alpha(f)"] \arrow[rr, "t_Y\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, equal] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{II})"] & & \underline{1}\otimes X^{-1} \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\alpha(f)"] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{III})"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{VI})"] & X^{-1} \arrow[l, "g_{X^{-1}}"'] \arrow[r, "d_{X^{-1}}"] \arrow[u, "\alpha(f)"'] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{IV})"] & X^{-1}\otimes\underline{1} \arrow[u, "\alpha(f)\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{V})"] & X^{-1}\otimes(Y\otimes Y^{-1}) \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes p_Y"'] \arrow[u, "\alpha(f)\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[d, equal] \\
(Y^{-1}\otimes Y)\otimes X^{-1} \arrow[r, "t_Y\otimes\mathrm{id}"] & \underline{1}\otimes X^{-1} & (X^{-1}\otimes X)\otimes X^{-1} \arrow[l, "t_X\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dll, "(\mathrm{id}\otimes f)\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{VIII})"] & X^{-1}\otimes(X\otimes X^{-1}) \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes p_X"] \arrow[drr, "\mathrm{id}\otimes(f\otimes\mathrm{id})"'] & X^{-1}\otimes\underline{1} \arrow[d, phantom, "(\mathrm{IX})"] & X^{-1}\otimes(Y\otimes Y^{-1}) \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes p_Y"'] \\
(X^{-1}\otimes Y)\otimes X^{-1} \arrow[u, "(\alpha(f)\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{VII})"] & & & & & X^{-1}\otimes(Y\otimes X^{-1}) \arrow[lllll, "a"'] \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes(\mathrm{id}\otimes\alpha(f))"']
\end{tikzcd}
$$

Dans ce diagramme la commutativité des régions (I), (VI) résulte de la Proposition 2.128; celle de (II), (V) est évidente; celle de (III), (IV) est le résultat de la fonctorialité de g et d; celle de (VII) est donnée par la définition de $\alpha(f)$; et enfin celle de (VIII) et du circuit extérieur vient de la fonctorialité de a. D'où la commutativité de (IX) et par suite celle de (2.132). Ce résultat nous [illegible]

$$\alpha(\alpha(f)) = f$$

en considérant $(X, p_X, t_X), (Y, p_Y, t_Y)$ comme des inverses de X^{-1}, Y^{-1} respectivement (proposition 2.122).

(iii) En faisant $Y = X$ et $f = \mathrm{id}_X$ dans le diagramme (2.131), on a aussitôt $\alpha(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{X^{-1}}$. Pour démontrer $\alpha(hf) = \alpha(h)\alpha(f)$, considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
Z^{-1}\otimes Z \arrow[dd, "t_Z"'] & X^{-1}\otimes Z \arrow[l, "\alpha(hf)\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[rr, equal] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "\mathrm{(II)}"] & & X^{-1}\otimes A \arrow[d, "\alpha(f)\otimes\mathrm{id}"] \\
\arrow[r, phantom, "\mathrm{(I)}"] & X^{-1}\otimes Y \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes h"] \arrow[r, "\alpha(f)\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(III)}"] & Y^{-1}\otimes Y \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes h"] \arrow[d, "t_Y"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(IV)}"] & Y^{-1}\otimes Z \arrow[d, "\alpha(h)\otimes\mathrm{id}"] \\
\underline{1} & X^{-1}\otimes X \arrow[l, "t_X"'] \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes f"] \arrow[r, "t_X"] & \underline{1} & Z^{-1}\otimes Z \arrow[l, "t_Z"']
\end{tikzcd}$$

dont la commutativité des régions (I),(III), (IV) résulte de la définition de α; celle de (II) es évidente. D'où la commutativité du circuit extérieur, ce qui démontre l'assertion, compte tenu du fait que Z est régulier.

□

Example 2.133. Reprenons l'exemple 2.91(2). Nous supposons de plus que M est abélien et agit trivialement sur N. Donnons nous une contrainte de commutativité (voir Example 2.24)

$$c_{S_1,S_2} = (S_1S_2, k(S_1,S_2))$$

compatible avec la contrainte d'associativité, $k(S_1,S_2)$ étant supposée normalisée. Ecrivons l'axiome de l'hexagone pour $X = Z = S$, $Y = S^{-1}$,

$$f(S,S^{-1},S) + k(1,S) + f(S,S,S^{-1}) - k(S^{-1},S) - f(S,S,S^{-1}) - k(S,S) = 0.$$

Nous obtenons, compte tenu de la normalisation de k,

$$-f(S,S^{-1},S) = -k(S^{-1},S) - k(S,S)$$

ou, en vertu de l'antisymmetrie de k

$$-f(S,S^{-1},S) = k(S,S^{-1}) + k(S,S)$$

qui nous donne d'aprés la définition de p_S (Définition 2.124)

$$p_S = c(S,S^{-1}) + c(S,S) + t_S.$$

On en conclut que dans une $\otimes$-catégorie ACU $\underline{C}$, on n'a pas en général la commutativité de diagramme

$$\begin{tikzcd} X \otimes X^{-1} \arrow[rr, "c_{X,X^{-1}}"] \arrow[dr, "p_X"'] & & X^{-1} \otimes X \arrow[dl, "t_X"] \\ & \underline{1} & \end{tikzcd}$$

On peut démontrer qu'elle a lieu si $\underline{C}$ est une $\otimes$-catégorie ACU stricte (voir la Proposition 3.56 ci-dessous). Dans ce cas on a aussitôt la proposition suivante

Proposition 2.134. *Tout diagramme dans une $\otimes$-catégorie* ACU *stricte, construit a l'aide de $a, a^{-1}, g, g^{-1}, d, d^{-1}, c, c^{-1}, t, t^{-1}, p, p^{-1}$, des identités et de la loi $\otimes$, est commutatif.*

Proposition 2.135. *Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie ACU. Si (X^{-1}, t_X, p_X) et (Y^{-1}, t_Y, p_Y) sont des inverses pour X, Y inversibles, alors $(X^{-1} \otimes Y^{-1}, t'_{X\otimes Y}, p'_{X\otimes Y})$ est un inverse pour $X \otimes Y$, où $t'_{X\otimes Y}$ et $p'_{X\otimes Y}$ sont les isomorphismes définis par les triangles commutatifs*

(2.136)
$$\begin{tikzcd} (X^{-1} \otimes Y^{-1}) \otimes (X \otimes Y) \arrow[rr, "c\otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, "t'_{X\otimes Y}"'] & & (Y^{-1} \otimes X^{-1}) \otimes (X \otimes Y) \arrow[dl, "t_{X\otimes Y}"] \\ & \underline{1} & \end{tikzcd}$$

(2.137)
$$\begin{tikzcd} (X \otimes Y) \otimes (X^{-1} \otimes Y^{-1}) \arrow[rr, "\mathrm{id}\otimes c"] \arrow[dr, "p'_{X\otimes Y}"'] & & (X \otimes Y) \otimes (Y^{-1} \otimes X^{-1}) \arrow[dl, "p_{X\otimes Y}"] \\ & \underline{1}, & \end{tikzcd}$$

$t_{X\otimes Y}$ et $p_{X\otimes Y}$ étant donnés par la Proposition 2.129*.*

Proof. Considérons le diagramme ci-dessous dont la commutativité de la région (I) résulte de la naturalité de a; celle de (II) résulte de la Proposition 2.129; celle de (III) et (IV) résulte de la naturalité de d, g respectivement; enfin celle de (V) et (VI) résulte de la commutativité des triangles (2.136) et (2.137) et de la relation

$c_{Y^{-1}\otimes X^{-1}} \circ c_{X^{-1}\otimes Y^{-1}} = \mathrm{id}_{X^{-1}\otimes Y^{-1}}$:

$$\begin{tikzcd}
(X^{-1}\otimes Y^{-1})\otimes((X\otimes Y)\otimes(X^{-1}\otimes Y^{-1})) \arrow[rr, "a"] \arrow[d, "c\otimes(\mathrm{id}\otimes c)"] \arrow[ddd, bend right=60, "\mathrm{id}\otimes p'_{X\otimes Y}\ (\mathrm{V})"'] \arrow[drr, phantom, "(\mathrm{I})"] & & ((X^{-1}\otimes Y^{-1})\otimes(X\otimes Y))\otimes(X^{-1}\otimes Y^{-1}) \arrow[d, "(c\otimes\mathrm{id})\otimes c"'] \arrow[ddd, bend left=60, "(\mathrm{VI})\ t'_{X\otimes Y}\otimes\mathrm{id}"] \\
(Y^{-1}\otimes X^{-1})\otimes((X\otimes Y)\otimes(Y^{-1}\otimes X^{-1})) \arrow[rr, "a"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes p_{X\otimes Y}"] \arrow[drr, phantom, "(\mathrm{II})"] & & ((Y^{-1}\otimes X^{-1})\otimes(X\otimes Y))\otimes(Y^{-1}\otimes X^{-1}) \arrow[d, "t_{X\otimes Y}\otimes\mathrm{id}"'] \\
(Y^{-1}\otimes X^{-1})\otimes\underline{1} \arrow[d, "c\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & Y^{-1}\otimes X^{-1} \arrow[l, "d"'] \arrow[r, "g"] \arrow[d, "c"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IV})"] & \underline{1}\otimes(Y^{-1}\otimes X^{-1}) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes c"] \\
(X^{-1}\otimes Y^{-1})\otimes\underline{1} & X^{-1}\otimes Y^{-1} \arrow[l, "d"'] \arrow[r, "g"] & \underline{1}\otimes(X^{-1}\otimes Y^{-1}).
\end{tikzcd}$$

On en déduit la commutativité du circuit extérieur, d'où la proposition. □

2.4. $\otimes$-foncteurs.

2.4.1. *Définition des $\otimes$-foncteurs.*

Definition 2.138. Un $\otimes$-*foncteur* d'une $\otimes$-catégorie $\underline{C}$ dans une $\otimes$-catégorie $\underline{C}'$ est un couple $(F, \check{F})$ d'un foncteur $F\colon \underline{C} \to \underline{C}'$ et d'un isomorphisme fonctoriel

$$\check{F}_{X,Y}\colon F(X)\otimes F(Y) \xrightarrow{\sim} F(X\otimes Y).$$

On dit que $(F, \check{F})$ est un $\otimes$-foncteur *strict* si, pour tous $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$, on a

$$\begin{aligned} F(X\otimes Y) &= F(X)\otimes F(Y) \\ \check{F}_{X,Y} &= \mathrm{id}_{F(X\otimes Y)}. \end{aligned}$$

Si $(F, \check{F}), (G, \check{G})$ sont des $\otimes$-foncteurs de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$, un $\otimes$-*morphisme* de $(F, \check{F})$ dans $(G, \check{G})$ est un morphisme fonctoriel $\lambda\colon F \to G$ rendant commutatif, pour $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$, le carré

$$\begin{tikzcd}
F(X)\otimes F(Y) \arrow[r, "\check{F}_{X,Y}"] \arrow[d, "\lambda_X\otimes\lambda_X"'] & F(X\otimes Y) \arrow[d, "\lambda_{X\otimes Y}"] \\
G(X)\otimes G(Y) \arrow[r, "\check{G}_{X,Y}"] & G(X\otimes Y).
\end{tikzcd}$$

Si de plus λ est un isomorphisme de foncteurs, on dit qu'on a un $\otimes$-*isomorphisme.* En outre, si $(H, \check{H})$ est un outre $\otimes$-foncteur de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$ et $\mu\colon G \to H$ un $\otimes$-morphisme de $(G, \check{G})$ dans $(H, \check{H})$, on vérifie aussitôt que $\mu\circ\lambda$ est aussi un $\otimes$-morphisme qu'on appelle le $\otimes$-*morphisme composé* des $\otimes$-morphismes λ et μ. On obtient ainsi une catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\underline{C}, \underline{C}')$ dont les objets sont les $\otimes$-foncteurs de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$ et les morphismes les $\otimes$-morphismes.

Definition 2.139. Soient $\underline{C}, \underline{C}', \underline{C}''$ des $\otimes$-catégories, $(F, \check{F})$ et $(F', \check{F}')$ des $\otimes$-foncteurs de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$ et de $\underline{C}'$ dans $\underline{C}''$ respectivement. Nous définissons le $\otimes$-*foncteur composé* de $(F, \check{F})$ et $(F', \check{F}')$ comme le couple $(F'', \check{F}'')$, noté $(F', \check{F}') \circ (F, \check{F})$ ou $(F'F, (\check{F'F}))$, où

$$\begin{aligned} F'' &= F' \circ F \\ \check{F}'' &= (F' * \check{F}) \circ (\check{F}' * (F, F)), \end{aligned}$$

c'est à dire que pour les objets X, Y de $\underline{C}$, $\check{F}''_{X,Y}$ est défini par le triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} F'FX \otimes F'FY \arrow[rr, "\check{F}'_{FX,FY}"] \arrow[dr, "\check{F}''_{X,Y}"'] & & F'(FX \otimes FY) \arrow[dl, "F'(\check{F}_{X,Y})"] \\ & F'F(X \otimes Y). & \end{tikzcd}$$

En outre, si $(G, \check{G}) \colon \underline{C} \to \underline{C}'$, $(G', \check{G}') \colon \underline{C} \to \underline{C}'$ sont aussi des $\otimes$-foncteurs, $\lambda \colon F \to G, \lambda' \colon F' \to G'$ des $\otimes$-morphismes, on vérifie immédiatement que $F' * \lambda$ et $\lambda' * G$ sont des $\otimes$-morphismes, d'où $\lambda' * \lambda \colon F'F \to G'G$ est aussi un $\otimes$-morphisme. On dispose donc d'une 2-catégorie $\otimes$-$\underline{\underline{\mathrm{Cat}}}$, ayant comme objets les $\otimes$-catégories, et comme catégories de morphismes les catégories $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\underline{C}, \underline{C}')$.

2.4.2. *Compatibilité avec des contraintes.*

Definition 2.140. Soient $\underline{C}, \underline{C}'$ des $\otimes$-catégories munies des contraintes d'associativité a et a', respectivement. On dit qu'un $\otimes$-foncteur $(F, \check{F}) \colon \underline{C} \to \underline{C}'$ est *compatible* avec a, a' si, pour tous $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$, le diagramme
(2.141)

$$\begin{tikzcd} FX \otimes (FY \otimes FZ) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \check{F}_{Y,Z}"] \arrow[d, "a'"'] & FX \otimes F(Y \otimes Z) \arrow[r, "\check{F}_{X,Y \otimes Z}"] & F(X \otimes (Y \otimes Z)) \arrow[d, "Fa"] \\ (FX \otimes FY) \otimes FZ \arrow[r, "\check{F}_{X,Y} \otimes \mathrm{id}"] & F(X \otimes Y) \otimes FZ \arrow[r, "\check{F}_{X \otimes Y, Z}"] & F((X \otimes Y) \otimes Z) \end{tikzcd}$$

est commutatif. On dit alors que $(F, \check{F})$ est un $\otimes$-*foncteur associatif*. La sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\underline{C}, \underline{C}')$ dont les objets sont les $\otimes$-foncteurs associatifs est notée $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\mathrm{A}}(\underline{C}, \underline{C}')$.

Proposition 2.142. *Soient $\underline{C}, \underline{C}', \underline{C}''$ des $\otimes$-catégories munies, respectivement, des contraintes d'associativité a, a', a''; $(F, \check{F}) \colon \underline{C} \to \underline{C}'$, $(F', \check{F}') \colon \underline{C}' \to \underline{C}''$ des $\otimes$-foncteurs associatifs. Alors le $\otimes$-foncteur composé $(F'F, (\check{F'F}))$ est aussi associatif.*

Proof. Considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
F'(FX \otimes (FY \otimes FZ)) \arrow[dddd, "F'a'"'] \arrow[rrrr, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[rrrr, phantom, bend left=12, "\mathrm{(I)}"] & F'FX \otimes F'(FY \otimes FZ) \arrow[l, "\check{F}'"'] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes F'(\check{F})"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(II)}"] & F'FX \otimes F'F(Y \otimes Z) \arrow[r, "\check{F}'"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(III)}"] & F'(FX \otimes F(Y \otimes Z)) \arrow[d, "F'(\check{F})"] & F'(FX \otimes (FY \otimes FZ)) \arrow[l, "F'(\mathrm{id}\otimes\check{F})"'] \arrow[dddd, "F'a'"] \\
& F'FX \otimes (F'FY \otimes F'FZ) \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\check{F}'"] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes(\check{F'F})"] \arrow[d, "a''"'] & F'FX \otimes F'F(Y \otimes Z) \arrow[r, "(\check{F'F})"] \arrow[d, phantom, "\mathrm{(IV)}"] & F'F(X \otimes (Y \otimes Z)) \arrow[d, "F'Fa"] & \\
\arrow[r, phantom, "\mathrm{(VIII)}"] & (F'FX \otimes F'FY) \otimes F'FZ \arrow[r, "(\check{F'F})\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\check{F}'\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(V)}"] & F'F(X \otimes Y) \otimes F'FZ \arrow[r, "(\check{F'F})"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(VI)}"] & F'F((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[r, phantom, "\mathrm{(IX)}"] & \\
F'((FX \otimes FY) \otimes FZ) \arrow[rrrr, bend right, "\mathrm{id}"'] \arrow[rrrr, phantom, bend right=12, "\mathrm{(VII)}"] & F'(FX \otimes FY) \otimes F'FZ \arrow[l, "\check{F}'"'] \arrow[r, "F'(\check{F})\otimes\mathrm{id}"] & F'F(X \otimes Y) \otimes F'FZ \arrow[r, "\check{F}'"] & F'(F(X \otimes Y) \otimes FZ) \arrow[u, "F'(\check{F})"'] & F'((FX \otimes FY) \otimes FZ) \arrow[l, "F'(\check{F}\otimes\mathrm{id})"']
\end{tikzcd}$$

dans lequel la commutativité des régions (I), (VII) résulte de la fonctorialité de $\check{F}'$; celle de (II), (III), (V), (VI) vient de la définition de $(\check{F'F})$ (Définition 2.139); celle de (VIII), (IX) est le résultat de la compatibilité de $(F, \check{F})$ et $(F', \check{F}')$ avec les contraintes d'associativité; enfin celle du circuit extérieur est évident. D'où la commutativité de (IV), qui exprime que $(F'F, (\check{F'F}))$ est compatible avec a et a''. $\square$

Remark 2.143. Avec la définition 2.140, on peut dire que deux contraintes d'associativité a, a' sur $\underline{C}$ sont cohomologues (Définition 2.6) si et seulement s'il existe un $\otimes$-foncteur $(F, \check{F})\colon (\underline{C}, a) \to (\underline{C}, a')$ compatible avec a, a' et tel que $F = \mathrm{id}_{\underline{C}}$.

Definition 2.144. Soient $\underline{C}, \underline{C}'$ des $\otimes$-catégories munies des contraintes de commutativité c et c' respectivement. On dit qu'un $\otimes$-foncteur $(F, \check{F})\colon \underline{C} \to \underline{C}'$ est *compatible* avec c, c' si, pour tous $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
FX \otimes FY \arrow[r, "\check{F}_{X,Y}"] \arrow[d, "c'_{FX,FY}"'] & F(X \otimes Y) \arrow[d, "F(c_{X,Y})"] \\
FY \otimes FX \arrow[r, "\check{F}_{Y,X}"] & F(Y \otimes X)
\end{tikzcd} \tag{2.145}$$

est commutatif. On dit alors que $(F, \check{F})$ est un $\otimes$-*foncteur commutatif.* La sous-catégorie pleine de $\mathrm{Hom}^{\otimes}(\underline{C}, \underline{C}')$ dont les objets sont les $\otimes$-foncteurs commutatifs est notée $\mathrm{Hom}^{\otimes,\mathrm{C}}(\underline{C}, \underline{C}')$.

On vérifie aussitôt la proposition suivante.

Proposition 2.146. *Soient $\underline{C}, \underline{C}', \underline{C}''$ des $\otimes$-catégories munies des contraintes de commutativité c, c', c'' respectivement; $(F, \check{F}) \colon \underline{C} \to \underline{C}'$, $(F', \check{F}') \colon \underline{C}' \to \underline{C}''$ des $\otimes$-foncteurs commutatifs. Alors le foncteur composé $(F'F, \check{(F'F)})$ est aussi commutatif.*

Remark 2.147. Dans le langage de la définition 2.144, on dit que deux contraintes de commutativité c, c' sur $\underline{C}$ sont cohomologues (Définition 2.21) si et seulement s'il existe un $\otimes$-foncteur $(F, \check{F}) \colon (\underline{C}, c) \to (\underline{C}, c')$ compatible avec c, c' et tel que $F = \mathrm{id}_{\underline{C}}$

Definition 2.148. Soient $\underline{C}, \underline{C}', \underline{C}''$ des $\otimes$-catégories munies des contraintes d'unité $(\underline{1}, g, d), (\underline{1}', g', d')$ respectivement. On dit qu'un $\otimes$-foncteur $(F, \check{F}) \colon \underline{C} \to \underline{C}'$ est *compatible* avec $(\underline{1}, g, d), (\underline{1}', g', d')$ s'il existe un isomorphisme $\widehat{F} \colon \underline{1}' \to F(\underline{1})$ rendant commutatifs les diagrammes

(2.149)
$$
\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "F(g_X)"] \arrow[d, "g'_{FX}"'] & F(\underline{1} \otimes X) \\
\underline{1}' \otimes FX \arrow[r, "\widehat{F} \otimes \mathrm{id}"] & F\underline{1} \otimes FX \arrow[u, "\check{F}_{\underline{1},X}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "F(d_X)"] \arrow[d, "d'_{FX}"'] & F(X \otimes \underline{1}) \\
FX \otimes \underline{1}' \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \widehat{F}"] & FX \otimes F\underline{1}. \arrow[u, "\check{F}_{X,\underline{1}}"']
\end{tikzcd}
$$

On dit alors que $(F, \check{F})$ est un $\otimes$-*foncteur unifère.*

Remark 2.150. L'isomorphisme $\widehat{F}$ est unique. En effet, en vertu de l'existence de $\widehat{F}$, on a $F(\underline{1})$ régulier puisqu'il est isomorphe à $\underline{1}'$, qui est régulier. Donc dans (2.149), si on remplace X par $\underline{1}$, on a l'unicité de $\widehat{F}$ du fait que $F(\underline{1})$ est régulier.

Proposition 2.151. *Soient $\underline{C}, \underline{C}', \underline{C}''$ des $\otimes$-catégories munies des contraintes d'unité $(\underline{1}, g, d), (\underline{1}', g', d'), (\underline{1}'', g'', d'')$ respectivement; $(F, \check{F}) \colon \underline{C} \to \underline{C}'$, $(F', \check{F}') \colon \underline{C}' \to \underline{C}''$ des $\otimes$-foncteurs unifères. Alors le $\otimes$-foncteur composé $(F'F, \check{(F'F)})$ est aussi unifère.*

Proof. Soient $\widehat{F} \colon \underline{1}' \xrightarrow{\sim} F(\underline{1})$, $\widehat{F}' \colon \underline{1}'' \xrightarrow{\sim} F'(\underline{1}')$ venant de la compatibilité de $(F, \check{F})$, $(F', \check{F}')$ avec les unités (Définition 2.148). Définissons un isomorphisme, noté $\widehat{(F'F)}$, entre $\underline{1}''$ et $F'F(\underline{1})$ par le triangle commutatif suivant

$$
\begin{tikzcd}
 & \underline{1}'' \arrow[dl, "\widehat{F'}"'] \arrow[dr, "\widehat{(F'F)}"] & \\
F'\underline{1}' \arrow[rr, "F'(\widehat{F})"'] & & F'F\underline{1}.
\end{tikzcd}
$$

Montrons qu'on a la commutativité des carrés

$$\begin{tikzcd}
F'FX \arrow[r, "F'F(g_X)"] \arrow[d, "g''_{F'FX}"'] & F'F(\underline{1}\otimes X) \\
\underline{1}''\otimes F'FX \arrow[r, "\widehat{F'F}\otimes \mathrm{id}"] & F'F\underline{1}\otimes F'FX \arrow[u, "(\check{F'F})"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F'FX \arrow[r, "F'F(d_X)"] \arrow[d, "d''_{F'FX}"'] & F'F(X\otimes \underline{1}) \\
F'FX\otimes \underline{1}'' \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes \widehat{F'F}"] & F'FX\otimes F'F\underline{1}. \arrow[u, "(\check{F'F})"']
\end{tikzcd}$$

Nous démontrons seulement la commutativité de l'un des carrés, la démonstration pour l'autre étant analogue. Pour cela considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & F'FX \arrow[r, "F'F(g_X)"] \arrow[dl, "F'(g'_{FX})"'] \arrow[d, "g''_{F'FX}"'] & F'F(\underline{1}\otimes X) & \\
F'(\underline{1}'\otimes FX) \arrow[r, phantom, "(\mathrm{III})"] \arrow[rrr, bend right=50, "F'(\widehat{F}\otimes \mathrm{id}_{FX})"'] & \underline{1}''\otimes F'FX \arrow[r, "\widehat{F'F}\otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\widehat{F'}\otimes \mathrm{id}"'] \arrow[u, phantom, "(\mathrm{I})" near start, shift left=8ex] & F'F\underline{1}\otimes F'FX \arrow[u, "(\check{F'F})"'] \arrow[d, equal] \arrow[r, phantom, "(\mathrm{IV})"] & F'(F\underline{1}\otimes FX) \arrow[ul, "F'(\check{F})"'] \\
 & F'\underline{1}'\otimes F'FX \arrow[ul, "\check{F}'"] \arrow[r, "F'(\widehat{F})\otimes \mathrm{id}"] \arrow[u, phantom, "(\mathrm{II})", shift left=8ex] & F'F\underline{1}\otimes F'FX \arrow[ur, "\check{F}'"'] \arrow[l, phantom, "(\mathrm{V})", shift left=-4ex] &
\end{tikzcd}$$

dans lequel la commutativité de la région (II) vient de la définition de $\widehat{F'F}$; celle de (III) et du contour extérieur est le résultat de la compatibilité de $(F,\check{F}),(F',\check{F}')$ avec les unités; celle de (IV) de la définition de $(\check{F'F})$, enfin celle de (V) de la fonctorialité de $\check{F}'$. D'où la commutativité de (I). $\square$

Definition 2.152. Soient $(F,\check{F}),(G,\check{G})$ des $\otimes$-foncteurs unifères de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$ avec $\widehat{F}\colon \underline{1}'\xrightarrow{\sim} F(\underline{1})$, $\widehat{G}\colon \underline{1}'\xrightarrow{\sim} G(\underline{1})$. On dit qu'un $\otimes$-morphisme $\lambda\colon F\to G$ est *unifère* si le triangle

(2.153)
$$\begin{tikzcd}
 & F\underline{1} \arrow[dd, "\lambda_{\underline{1}}"] \\
\underline{1}' \arrow[ur, "\widehat{F}"] \arrow[dr, "\widehat{G}"'] & \\
 & G\underline{1}
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

D'où si λ est un $\otimes$-morphisme unifère, $\lambda_{\underline{1}}$ est un isomorphisme. La réciproque est aussi vraie.

Proposition 2.154. *Soient $(F,\check{F}),(G,\check{G})$ des $\otimes$-foncteurs unifères de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$ avec $\widehat{F}\colon \underline{1}' \xrightarrow{\sim} F(\underline{1})$, $\widehat{G}\colon \underline{1}' \xrightarrow{\sim} G(\underline{1})$ les isomorphismes de compatibilité. Un $\otimes$-morphisme $\lambda\colon F \to G$ tel que $\lambda_{\underline{1}}$ soit un isomorphisme est unifère.*

Proof. Considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\underline{1}'\otimes F\underline{1} \arrow[r, "\widehat{F}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & F\underline{1}\otimes F\underline{1} \arrow[r, "\lambda_{\underline{1}}\otimes\lambda_{\underline{1}}"] \arrow[d, "\check{F}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & G\underline{1}\otimes G\underline{1} \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & \underline{1}'\otimes G\underline{1} \arrow[l, "\widehat{G}\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\lambda_{\underline{1}}^{-1}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IV})"] & \underline{1}'\otimes F\underline{1} \\
F\underline{1} \arrow[u, "g'_{F\underline{1}}"] \arrow[r, "F(d)"'] \arrow[rrrr, bend right, "\mathrm{id}"'] \arrow[rrrr, phantom, bend right=15, "(\mathrm{V})"] & F(\underline{1}\otimes\underline{1}) \arrow[r, "\lambda_{\underline{1}\otimes\underline{1}}"'] & G(\underline{1}\otimes\underline{1}) \arrow[u, "\check{G}"'] & G\underline{1} \arrow[l, "G(d)"] \arrow[u, "g'_{G\underline{1}}"'] \arrow[r, "\lambda^{-1}"'] & F\underline{1} \arrow[u, "g'_{F\underline{1}}"']
\end{tikzcd}$$

dont la commutativité des régions (I), (III) résulte de la compatibilité de $(F,\check{F}),(G,\check{G})$ avec les unités; celle de (II) vient du fait que λ est un $\otimes$-morphisme (Définition 2.138); celle de (IV) découle de la naturalité de g' el celle de (V) de la naturalité de λ. D'où la commutativité du circuit extérieur, qui nous donne

$$\widehat{G}^{-1}\lambda_{\underline{1}}\widehat{F}\otimes\mathrm{id}_{F\underline{1}} = \mathrm{id}_{\underline{1}'}\otimes\mathrm{id}_{F\underline{1}}$$

ou du fait que $F\underline{1}$ est régulier

$$\widehat{G}^{-1}\lambda_{\underline{1}}\widehat{F} = \mathrm{id}_{\underline{1}'},$$

c'est à dire le diagramme (2.153) est commutatif. $\square$

Corollary 2.155. *Soient $(F,\check{F}),(G,\check{G})$ des $\otimes$-foncteurs unifères de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$ et $\lambda\colon F\to G$ on $\otimes$-isomorphisme. Alors λ est unifère.*

Proof. En effet λ_X est un isomorphisme pour tout $X \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$, en particulier pour $X=\underline{1}$. $\square$

La sous catégorie de $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\underline{C},\underline{C}')$ ayant comme objets les $\otimes$-foncteurs unifères, comme morphismes les $\otimes$-morphismes unifères, est noté $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\underline{1}}(\underline{C},\underline{C}')$ (le $\otimes$-morphisme composé de deux $\otimes$-morphismes unifères est un $\otimes$-morphisme unifère).

Soient $\underline{C},\underline{C}'$ des $\otimes$-catégories; $(F,\check{F}),(G,\check{G})$ des $\otimes$-foncteurs de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$; et $\alpha\colon F\xrightarrow{\sim} G$ un $\otimes$-isomorphisme. On a les propriétés suivantes.

Proposition 2.156. $(F,\check{F})$ *est compatible avec les contraintes d'associativité a,a' données respectivement sur $\underline{C},\underline{C}'$ si et seulement si $(G,\check{G})$ l'est.*

Proof. Considérons le diagramme suivant

$$
\begin{tikzcd}
GX \otimes (GY \otimes GZ) \arrow[rr, "\mathrm{id}\otimes\check{G}"] \arrow[ddd, "a'"'] & & GX \otimes G(Y \otimes Z) \arrow[rr, "\check{G}"] & & G(X \otimes (Y \otimes Z)) \arrow[ddd, "Ga"] \\
 & FX \otimes (FY \otimes FZ) \arrow[ul, "\alpha_X \otimes (\alpha_Y \otimes \alpha_Z)"'] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\check{F}"] \arrow[d, "a'"'] \arrow[u, phantom, "(\mathrm{I})"] \arrow[l, phantom, "(\mathrm{VI})"] & FX \otimes F(Y \otimes Z) \arrow[u, "\alpha_X \otimes \alpha_{Y\otimes Z}"'] \arrow[r, "\check{F}"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{III})"] & F(X \otimes (Y \otimes Z)) \arrow[ur, "\alpha_{X\otimes(Y\otimes Z)}"] \arrow[d, "Fa"] \arrow[u, phantom, "(\mathrm{II})"] \arrow[r, phantom, "(\mathrm{VII})"] & \\
 & (FX \otimes FY) \otimes FZ \arrow[r, "\check{F}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dl, "(\alpha_X \otimes \alpha_Y) \otimes \alpha_Z"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{IV})"] & F(X \otimes Y) \otimes FZ \arrow[r, "\check{F}"] \arrow[d, "\alpha_{X\otimes Y} \otimes \alpha_Z"] & F((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[dr, "\alpha_{(X\otimes Y)\otimes Z}"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{V})"] & \\
(GX \otimes GY) \otimes GZ \arrow[rr, "\check{G}\otimes\mathrm{id}"'] & & G(X \otimes Y) \otimes GZ \arrow[rr, "\check{G}"'] & & G((X \otimes Y) \otimes Z)
\end{tikzcd}
$$

dont la commutativité des régions (I),(II),(IV), (V) vient de ce que α est un $\otimes$-morphisme; celle de (VI) résulte de la naturalité de a' et celle de (VII) de la naturalité de α. D'où la région (III) est commutative si et seulement si le circuit extérieur l'est, ce qui démontre la proposition. □

Proposition 2.157. $(F, \check{F})$ *est compatible avec les contraintes de commutativité* c, c' *données respectivement sur* $\underline{C}, \underline{C}'$ *si et seulement si* $(G, \check{G})$ *l'est.*

Proof. Considérons le diagramme suivant

$$
\begin{tikzcd}
GX \otimes GY \arrow[rrr, "\check{G}"] \arrow[ddd, "c'_{GX,GY}"'] & & & G(X \otimes Y) \arrow[ddd, "G(c_{X,Y})"] \\
 & FX \otimes FY \arrow[ul, "\alpha_X \otimes \alpha_Y"'] \arrow[r, "\check{F}"] \arrow[d, "c'_{FX,FY}"'] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{I})"] & F(X \otimes Y) \arrow[ur, "\alpha_{X\otimes Y}"] \arrow[d, "F(c_{X,Y})"] & \\
 & FY \otimes FX \arrow[r, "\check{F}"] \arrow[dl, "\alpha_Y \otimes \alpha_X"] \arrow[l, phantom, "(\mathrm{IV})"] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{II})"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & F(Y \otimes X) \arrow[dr, "\alpha_{Y\otimes X}"'] \arrow[r, phantom, "(\mathrm{V})"] & \\
GY \otimes GX \arrow[rrr, "\check{G}"'] & & & G(Y \otimes X)
\end{tikzcd}
$$

dont la commutativité des régions (I),(III) vient du fait de ce que α est un $\otimes$-morphisme et celle des régions (IV),(V) de la naturalité de c' et α respectivement. D'où l'éqivalence de la commutativité de la région (II) et du circuit extérieur. □

Proposition 2.158. $(F, \check{F})$ *est compatible avec les unités* $(\underline{1}, g, d), (\underline{1}', g', d')$ *données respectivement sur* $\underline{C}, \underline{C}'$ *si et seulement si* $(G, \check{G})$ *l'est.*

Proof. En raison de la symétrie du problème, nous allons démontrer que si $(F,\check{F})$ est unifère, $(G,\check{G})$ l'est. Puisque $(F,\check{F})$ est unifère, il existe un isomorphisme $\widehat{F}\colon \underline{1}' \xrightarrow{\sim} F(\underline{1})$ tel que les diagrammes (2.149) soient commutatifs. Définissons $\widehat{G}\colon \underline{1}' \xrightarrow{\sim} G(\underline{1})$ par le triangle commutatif

$$\begin{tikzcd}
\underline{1}' \arrow[rr, "\widehat{F}"] \arrow[dr, "\widehat{G}"'] & & F\underline{1} \arrow[dl, "\alpha_{\underline{1}}"] \\
& G\underline{1} &
\end{tikzcd}$$

et considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
GX \arrow[rrr, "Gg_X"] \arrow[ddd, "g'_{GX}"'] & & & G(\underline{1}\otimes X) \\
& FX \arrow[ul, "\alpha_X"'] \arrow[r, "Fg_X"] \arrow[d, "g'_{FX}"] \arrow[u, phantom, "(\mathrm{I})"] \arrow[l, phantom, "(\mathrm{IV})"] & F(\underline{1}\otimes X) \arrow[ur, "\alpha_{\underline{1}\otimes X}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{V})"] & \\
& \underline{1}'\otimes FX \arrow[r, "\widehat{F}\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}\otimes\alpha_X"'] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{II})"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{III})"] & F\underline{1}\otimes FX \arrow[u, "\check{F}"'] \arrow[dr, "\alpha_{\underline{1}}\otimes\alpha_X"] & \\
\underline{1}'\otimes GX \arrow[rrr, "\widehat{G}\otimes\mathrm{id}"'] & & & G\underline{1}\otimes GX \arrow[uuu, "\check{G}"']
\end{tikzcd}$$

dans lequel la commutativité de la région (I) résulte de la naturalité de α; celle de (II) vient de l'hypothése que $(F,\check{F})$ soit unifère; celle de (III) de la définition de $\widehat{G}$; celle de (IV) de la naturalité de g'; enfin celle de (V) du fait que α es un $\otimes$-morphisme. D'où la commutativité du circuit extérieur. On a ainsi démontré la commutativité de l'un des diagrammes (2.149), la démonstration pour celle de l'autre étant analogue. $\square$

Definition 2.159. Soient $\underline{C},\underline{C}'$ des $\otimes$-catégories AU et $(F,\check{F})$ un $\otimes$-foncteur de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$. On dit que F est *compatible* avec les contraintes AU, ou encore qu'il est un $\otimes$-*foncteur* AU, s'il est un $\otimes$-foncteur associatif, unifère. On note $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\mathrm{AU}}(\underline{C},\underline{C}')$ la sous-catégorie de $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\underline{C},\underline{C}')$ ayant comme objets les $\otimes$-foncteurs AU, comme morphismes les $\otimes$-morphismes unifères.

On définit de faqn analogue quand on a affaire à des contraintes mixtes AC, CU, ACU.

Proposition 2.160. *Soient* $\underline{C},\underline{C}'$ *des* $\otimes$*-catégories* AU *munies des contraintes mixtes d'associativité-unité* $(a,(\underline{1},g,d))$ *et* $(a',(\underline{1}',g',d'))$ *resp. Soient* $(F,\check{F})\colon \underline{C}\to$

$\underline{C}'$ *un* $\otimes$*-foncteur associatif. Alors* $(F,\check{F})$ *est unifère si et seulement si* $F(\underline{1})$ *est régulier.*

Proof. Supossons $(F,\check{F})$ unifère. Alors il existe $\widehat{F}\colon \underline{1}' \xrightarrow{\sim} F\underline{1}$, donc $F\underline{1}$ est régulier. Inversement, si $F\underline{1}$ est régulier, on peut définir un isomorphisme $\widehat{F}\colon \underline{1}' \xrightarrow{\sim} F\underline{1}$ par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
F\underline{1} \arrow[r, "Fg_{\underline{1}}"] \arrow[d, "g'_{F\underline{1}}"'] & F(\underline{1}\otimes\underline{1}) \\
\underline{1}'\otimes F\underline{1} \arrow[r, "\widehat{F}\otimes\mathrm{id}"] & F\underline{1}\otimes F\underline{1}. \arrow[u, "\check{F}"']
\end{tikzcd}$$

Il nous faut maintenant démontrer que $\widehat{F}$ rend commutatifs les diagrammes (2.149). Pour cela, prouvons d'abord que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
F\underline{1} \arrow[r, "Fd_{\underline{1}}"] \arrow[d, "d'_{F\underline{1}}"'] & F(\underline{1}\otimes\underline{1}) \\
F\underline{1}\otimes\underline{1}' \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\widehat{F}"] & F\underline{1}\otimes F\underline{1}. \arrow[u, "\check{F}"']
\end{tikzcd} \tag{2.161}$$

Or le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
F(\underline{1}\otimes\underline{1}) \arrow[r, "F(\mathrm{id}\otimes g_{\underline{1}})"] \arrow[ddddd, bend right=60, "\mathrm{id}"'] & F(\underline{1}\otimes(\underline{1}\otimes\underline{1})) \arrow[ddddd, bend left=60, "Fa"] \\
F\underline{1}\otimes F\underline{1} \arrow[u, "\check{F}"] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes Fg_{\underline{1}}"] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{I})"] & F\underline{1}\otimes F(\underline{1}\otimes\underline{1}) \arrow[u, "\check{F}"'] \\
F\underline{1}\otimes(\underline{1}'\otimes F\underline{1}) \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes g'_{F\underline{1}}"] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes(\widehat{F}\otimes\mathrm{id})"] \arrow[d, "a'"'] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{II})"] & F\underline{1}\otimes(F\underline{1}\otimes F\underline{1}) \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\check{F}"'] \arrow[d, "a'"] \\
(F\underline{1}\otimes\underline{1}')\otimes F\underline{1} \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes\widehat{F})\otimes\mathrm{id}"] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{III})"] \arrow[l, phantom, "(\mathrm{VI})"] & (F\underline{1}\otimes F\underline{1})\otimes F\underline{1} \arrow[d, "\check{F}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, phantom, "(\mathrm{VII})"] \\
F\underline{1}\otimes F\underline{1} \arrow[u, "d'_{F\underline{1}}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, "Fd_{\underline{1}}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\check{F}"'] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{IV})"] & F(\underline{1}\otimes\underline{1})\otimes F\underline{1} \arrow[d, "\check{F}"] \\
F(\underline{1}\otimes\underline{1}) \arrow[r, "F(d_{\underline{1}}\otimes\mathrm{id})"] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{V})"] & F((\underline{1}\otimes\underline{1})\otimes\underline{1})
\end{tikzcd}$$

a les régions (I),(V) commutatives en vertu de la fonctorialité de $\check{F}$; la région (II) par la définition de $\widehat{F}$; la région (III) en vertu de la fonctorialité de a'; la région (VI) et le circuit extérieur en vertu de la compatibilité entre les contraintes d'associativité et d'unité; enfin la région (VII) en vertu de la compatibilité de $(F, \check{F})$ avec les contraintes d'associativité. On en conclut la commutativité de (IV), donc celle de (2.161).

Venons maintenant au diagramme

$$
\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "Fg_X"] \arrow[d, "g'_{FX}"'] & F(\underline{1} \otimes X) \\
\underline{1}' \otimes FX \arrow[r, "\widehat{F} \otimes \mathrm{id}"] & F\underline{1} \otimes FX. \arrow[u, "\check{F}"']
\end{tikzcd}
$$

Pour démontrer sa commutativité, considérons le diagramme suivant où le diagramme qui nous intéresse se retrouve en la région (V), a facteur régulier près,

$$
\begin{tikzcd}
(F\underline{1} \otimes \underline{1}') \otimes FX \arrow[r, "(\mathrm{id} \otimes \widehat{F}) \otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & (F\underline{1} \otimes F\underline{1}) \otimes FX \arrow[d, "\check{F} \otimes \mathrm{id}"'] \\
F\underline{1} \otimes FX \arrow[u, "d'_{F\underline{1}} \otimes \mathrm{id}"'] \arrow[r, "Fd_{\underline{1}} \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\check{F}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & F(\underline{1} \otimes \underline{1}) \otimes FX \arrow[d, "\check{F}"'] \\
F(\underline{1} \otimes X) \arrow[r, "F(d_{\underline{1}} \otimes \mathrm{id})"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & F((\underline{1} \otimes \underline{1}) \otimes X) \\
F(\underline{1} \otimes X) \arrow[r, "F(\mathrm{id} \otimes g_X)"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IV})"] & F(\underline{1} \otimes (\underline{1} \otimes X)) \arrow[u, "Fa"'] \\
F\underline{1} \otimes FX \arrow[u, "\check{F}"'] \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes Fg_X"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes g'_{FX}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{V})"] & F\underline{1} \otimes F(\underline{1} \otimes X) \arrow[u, "\check{F}"] \\
F\underline{1} \otimes (\underline{1}' \otimes FX) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes (\widehat{F} \otimes \mathrm{id})"] \arrow[uuuuu, bend left=60, "a'", "(\mathrm{VI})"'] & F\underline{1} \otimes (F\underline{1} \otimes FX) \arrow[u, "\mathrm{id} \otimes \check{F}"] \arrow[uuuuu, bend right=60, "a'"', "(\mathrm{VII})"]
\end{tikzcd}
$$

Dans ce diagramme la commutativité de la région (I) résulte de celle de (2.161); celle de (II),(IV) de la fonctorialité de $\check{F}$; celle de (III), (VI) de la compatibilité entre les contraintes d'associativité et d'unité; celle de (VII) de la compatibilité de $(F, \check{F})$ avec a, a'; enfin celle du circuit extérieur de la naturalité de a'. On en déduit la commutativité de (V). La démonstration de la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "Fd_X"] \arrow[d, "d'_{FX}"'] & F(X \otimes \underline{1}) \\ FX \otimes \underline{1}' \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \widehat{F}"] & FX \otimes F\underline{1} \arrow[u, "\check{F}"'] \end{tikzcd}$$

est analogue en se servant de la commutativité de (2.161). $\square$

Dans ce qui suit de ce n$^{\mathrm{o}}$, $\underline{C}, \underline{C}'$ désignent des $\otimes$-catégories ACU et $(F, \check{F})$ un $\otimes$-foncteur ACU de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$. Nous reprenons les notions de produit canonique $\underset{I}{\otimes} X_i$, d'isomorphisme $\Psi_{I_1,I_2} \colon \underset{I}{\otimes} X_i \xrightarrow{\sim} \big(\underset{I_1}{\otimes} X_i\big) \otimes \big(\underset{I_2}{\otimes} X_i\big)$, d'isomorphisme canonique $y \colon \underset{I'}{\otimes} X_i \xrightarrow{\sim} Y, \dots$ développées dans §2.3.1.

Definition 2.162. Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'objets de $\underline{C}$ (rapellons-nous que I est toujours supposé fini). Définissons un isomorphisme fonctoriel

$$f_I \colon \underset{I}{\otimes} FX_i \xrightarrow{\sim} F(\underset{I}{\otimes} X_i)$$

de la manière suivante

(1) $I = \emptyset$, alors

$$f_I = \widehat{F} \colon \underline{1}' \xrightarrow{\sim} F\underline{1}.$$

(2) $I = \{\beta\}$, alors

$$f_I = \mathrm{id}_{FX_\beta}.$$

(3) I a $p > 1$ éléments, alors f_I est défini par récurrence sur le nombre d'éléments de I par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \big(\underset{I'}{\otimes} FX_i\big) \otimes FX_\beta \arrow[r, "f_{I'} \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, equal] & F(\underset{I'}{\otimes} X_i) \otimes FX_\beta \arrow[d, "\check{F}"] \\ \big(\underset{I'}{\otimes} FX_i\big) \otimes FX_\beta \arrow[r, "f_I"] & F((\underset{I'}{\otimes} X_i) \otimes X_\beta) \end{tikzcd} \tag{2.163}$$

β étant le plus grande élément de I et I' l'ensemble des éléments $< \beta$ de I.

Proposition 2.164. *Soient* $(X_i)_{i\in I}$ *une famille d'objets de* $\underline{C}$ *et* I_1, I_2 *des sous-ensembles de* I *tels que* $I = I_1 \coprod I_2$. *Le diagramme suivant est commutatif*

$$
\begin{tikzcd}
\bigotimes\limits_I FX_i \arrow[r, "f_I"] \arrow[d, equal] & F(\bigotimes\limits_I X_i) \arrow[r, "F(\Psi_{I_1,I_2})"] & F((\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I_2} X_i)) \\
\bigotimes\limits_I FX_i \arrow[r, "\Psi'_{I_1,I_2}"] & (\bigotimes\limits_{I_1} FX_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I_2} FX_i) \arrow[r, "f_{I_1}\otimes f_{I_2}"] & F(\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes F(\bigotimes\limits_{I_2} X_i) \arrow[u, "\check{F}"']
\end{tikzcd}
\tag{2.165}
$$

Proof.

(1) $I_1 = \emptyset$, alors (2.165) est le circuit extérieur du diagramme suivant dont la commutativité de la région (I) résulte de la fonctorialité de g'; celle de (II) vient de ce que $(F, \check{F})$ est unifère; et celle de (III) est évident. D'où la commutativité du dit circuit extérieur

$$
\begin{tikzcd}
\bigotimes\limits_I FX_i \arrow[r, "f_I"] \arrow[dd, equal] \arrow[ddr, phantom, "(\mathrm{I})"] & F(\bigotimes\limits_I X_i) \arrow[rr, "F(g_{\bigotimes\limits_I X_i})"] \arrow[dr, "g'_{F(\bigotimes\limits_I X_i)}"'] & & F(\underline{1} \otimes (\bigotimes\limits_I X_i)) \\
& & \underline{1}' \otimes F(\bigotimes\limits_I X_i) \arrow[dr, "\widehat{F}\otimes \mathrm{id}"] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{II})"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{III})"] & \\
\bigotimes\limits_I FX_i \arrow[r, "g'_{\bigotimes\limits_I FX_i}"'] & \underline{1}' \otimes (\bigotimes\limits_I FX_i) \arrow[ur, "\mathrm{id}\otimes f_I"] \arrow[rr, "\widehat{F}\otimes f_I"'] & & F\underline{1} \otimes F(\bigotimes\limits_I X_i). \arrow[uu, "\check{F}"']
\end{tikzcd}
$$

(2) $I_2 = \emptyset$. Démonstration analogue.

(3) I_1, I_2 sont différents de l'ensemble vide. D'abord considérons le digramme suivant

$$
\begin{tikzcd}
\bigotimes\limits_I FX_i \arrow[r, "f_I"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(I)}"] & F(\bigotimes\limits_I X_i) \arrow[rr, "F(\Psi_{I_2,I_1})"] \arrow[d, equal] \arrow[drr, phantom, "\mathrm{(II)}"] & & F((\bigotimes\limits_{I_2} X_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I_1} X_i)) \arrow[d, equal] \\
\bigotimes\limits_I FX_i \arrow[r, "f_I"] \arrow[d, equal] \arrow[drr, phantom, "\mathrm{(III)}"] & F(\bigotimes\limits_I X_i) \arrow[r, "F(\Psi_{I_1,I_2})"] & F((\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I_2} X_i)) \arrow[r, "Fc"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(IV)}"] & F((\bigotimes\limits_{I_2} X_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I_1} X_i)) \\
\bigotimes\limits_I FX_i \arrow[r, "\Psi'_{I_1,I_2}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(V)}"] & (\bigotimes\limits_{I_1} FX_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I_2} FX_i) \arrow[r, "f_{I_1}\otimes f_{I_2}"] \arrow[d, "c'"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(VI)}"] & F(\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes F(\bigotimes\limits_{I_2} X_i) \arrow[r, "c'"] \arrow[u, "\check{F}"'] \arrow[d, "c'"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(VII)}"] & F(\bigotimes\limits_{I_2} X_i) \otimes F(\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \arrow[u, "\check{F}"'] \arrow[d, equal] \\
\bigotimes\limits_I FX_i \arrow[r, "\Psi'_{I_2,I_1}"] & (\bigotimes\limits_{I_2} FX_i) \otimes (\bigotimes\limits_{I_1} FX_i) \arrow[r, "f_{I_2}\otimes f_{I_1}"] & F(\bigotimes\limits_{I_2} X_i) \otimes F(\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \arrow[r, equal] & F(\bigotimes\limits_{I_2} X_i) \otimes F(\bigotimes\limits_{I_1} X_i)
\end{tikzcd}
$$

dont la commutativité des régions (I), (VII) est évident; celle de (II), (V) résulte de la Proposition 2.107; celle de (IV) de la compatibilité de $(F, \check{F})$ avec c, c'; celle de (VI) de la fonctorialité de c'. D'où la région (III) est commutative si et seulement si le circuit extérieur du diagramme l'est.

Revenons à la démonstration de la commutativité du diagramme (2.165). D'aprés ce que nous venons de démontrer, nous pouvons toujours supposer le plus grand élément β de I appartenient à I_2. Pour $I_2 = \{\beta\}$, le diagramme (2.165) devient

$$
\begin{tikzcd}
(\bigotimes\limits_{I_1} FX_i) \otimes FX_\beta \arrow[r, "f_I"] \arrow[d, equal] & F((\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes X_\beta) = F((\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes X_\beta) \\
(\bigotimes\limits_{I_1} FX_i) \otimes FX_\beta = (\bigotimes\limits_{I_1} FX_i) \otimes FX_\beta \arrow[r, "f_{I_1}\otimes \mathrm{id}"] & F(\bigotimes\limits_{I_1} X_i) \otimes FX_\beta \arrow[u, "\check{F}"']
\end{tikzcd}
$$

qui est commutatif par définition de f_I (Définition 2.159, diagramme (2.163)); en particulier (2.165) est commutatif pour I se composant de deux éléments. Démontrons la commutativité de (2.165) dans le cas général par récurrence sur le nombre d'éléments de I. Supposons la commutativité de (2.165) pour les ensembles I ayant $p-1 \geq 2$ éléments. Pour cela considérons le diagramme suivant (I' et I'_2 désignant respectivement les ensembles des éléments $< \beta$ de

I et I_2)

$$
\begin{tikzcd}
(\underset{I'}{\otimes} FX_i) \otimes FX_\beta \arrow[r, "f_{I'} \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & F(\underset{I'}{\otimes} X_i) \otimes FX_\beta \arrow[r, "F(\Psi_{I_1, I'_2}) \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\check{F}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & F((\underset{I_1}{\otimes} X_i) \otimes (\underset{I'_2}{\otimes} X_i)) \otimes FX_\beta \arrow[d, "\check{F}"] \\
(\underset{I'}{\otimes} FX_i) \otimes FX_\beta \arrow[r, "f_I"] \arrow[d, equal] & F((\underset{I'}{\otimes} X_i) \otimes X_\beta) \arrow[r, "F(\Psi_{I_1, I'_2} \otimes \mathrm{id})"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{III})"] & F(((\underset{I_1}{\otimes} X_i) \otimes (\underset{I'_2}{\otimes} X_i)) \otimes X_\beta) \\
(\underset{I'}{\otimes} FX_i) \otimes FX_\beta \arrow[r, "f_I"] \arrow[d, equal] & F((\underset{I'}{\otimes} X_i) \otimes X_\beta) \arrow[r, "F(\Psi_{I_1, I_2})"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{IV})"] & F((\underset{I_1}{\otimes} X_i) \otimes ((\underset{I'_2}{\otimes} X_i) \otimes X_\beta)) \arrow[u, "Fa"'] \arrow[r, phantom, "(\mathrm{VIII})"] & {} \\
(\underset{I'}{\otimes} FX_i) \otimes FX_\beta \arrow[r, "\Psi'_{I_1, I_2}"] \arrow[d, equal] & (\underset{I_1}{\otimes} FX_i) \otimes (\underset{I_2}{\otimes} FX_i) \arrow[r, "f_{I_1} \otimes f_{I_2}"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{V})"] & F(\underset{I_1}{\otimes} X_i) \otimes F((\underset{I'_2}{\otimes} X_i) \otimes X_\beta) \arrow[u, "\check{F}"'] \\
(\underset{I'}{\otimes} FX_i) \otimes FX_\beta \arrow[r, "\Psi'_{I_1, I_2}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VI})"] & (\underset{I_1}{\otimes} FX_i) \otimes ((\underset{I'_2}{\otimes} FX_i) \otimes FX_\beta) \arrow[r, "f_{I_1} \otimes (f_{I'_2} \otimes \mathrm{id})"] \arrow[d, "a'"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VII})"] & F(\underset{I_1}{\otimes} X_i) \otimes (F(\underset{I'_2}{\otimes} X_i) \otimes FX_\beta) \arrow[u, "\mathrm{id} \otimes \check{F}"'] \arrow[d, "a'"] \\
(\underset{I'}{\otimes} FX_i) \otimes FX_\beta \arrow[r, "\Psi'_{I_1, I'_2} \otimes \mathrm{id}"] & ((\underset{I_1}{\otimes} FX_i) \otimes (\underset{I'_2}{\otimes} FX_i)) \otimes FX_\beta \arrow[r, "(f_{I_1} \otimes f_{I'_2}) \otimes \mathrm{id}"] & (F(\underset{I_1}{\otimes} X_i) \otimes F(\underset{I'_2}{\otimes} X_i)) \otimes FX_\beta \arrow[uuuuu, bend right=60, "\check{F} \otimes \mathrm{id}"']
\end{tikzcd}
$$

dont la commutativité des régions (I), (V) résulte de la définition de f_I; celle de (II) de la naturalité de $\check{F}$; celle de (III), (VI) de la définition de Ψ (Définition 2.42 et diagramme (2.46)); celle de (VII) de la naturalité de a'; celle de (VIII) de la compatibilité de $(F, \check{F})$ avec a, a'; enfin celle du circuit extérieur est donneé par l'hypothèse de récurrence. D'où la commutativité de (IV).

$\square$

Corollary 2.166. *Soient $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'objets de $\underline{C}$ et I_1, I_2 des sous-ensembles de I tels que $I = I_1 \coprod I_2$, I'_1 et I'_2 les sous-ensembles respectivement de I_1 et I_2 des éléments i tels que $X_i \neq \underline{1}$, et $I' = I'_1 \coprod I'_2$. Soient Y, Z des produits*

de $(X_i)_{i\in I_1}$ *et* $(X_i)_{i\in I_2}$ *respectivement. On a la commutativité du diagramme suivant*
(2.167)

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes\limits_{I'} FX_i \arrow[r, "\Psi'_{I'_1,I'_2}"] \arrow[d, equal] & (\bigotimes\limits_{I'_1} FX_i)\otimes(\bigotimes\limits_{I'_2} FX_i) \arrow[r, "f_{I'_1}\otimes f_{I'_2}"] & F(\bigotimes\limits_{I'_1} X_i)\otimes F(\bigotimes\limits_{I'_2} X_i) \arrow[r, "Fy\otimes Fz"] & FY\otimes FZ \arrow[d, "\check{F}"] \\
\bigotimes\limits_{I'} FX_i \arrow[r, "f_{I'}"] & F(\bigotimes\limits_{I'} X_i) \arrow[r, "F(\Psi_{I'_1,I'_2})"] & F((\bigotimes\limits_{I'_1} X_i)\otimes(\bigotimes\limits_{I'_2} X_i)) \arrow[r, "F(y\otimes z)"] & F(Y\otimes Z),
\end{tikzcd}$$

y, z *étant les isomorphismes canoniques définis dans la Proposition* 2.110.

Proof. Il suffit d'appliquer la Proposition 2.164 et la fonctorialité de $\check{F}$. □

Proposition 2.168. *Soit* Y *un produit d'une famille* $(X_i)_{i\in I}$ *et soit* I' *l'ensemble des éléments* $i \in I$ *tels que* $X_i \neq \underline{1}$*. Les diagrammes suivants sont commutatifs*
(2.169)

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes\limits_{I'} FX_i \arrow[r, "f_{I'}"] \arrow[d, equal] & F(\bigotimes\limits_{I'} X_i) \arrow[r, "Fy"] & FY \arrow[d, "F(g_Y)"] \\
\bigotimes\limits_{I'} FX_i \arrow[r, "f_{I'}"] & F(\bigotimes\limits_{I'} X_i) \arrow[r, "Fy'"] & F(\underline{1}\otimes Y)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\bigotimes\limits_{I'} FX_i \arrow[r, "f_{I'}"] \arrow[d, equal] & F(\bigotimes\limits_{I'} X_i) \arrow[r, "Fy"] & FY \arrow[d, "F(d_Y)"] \\
\bigotimes\limits_{I'} FX_i \arrow[r, "f_{I'}"] & F(\bigotimes\limits_{I'} X_i) \arrow[r, "Fy''"] & F(Y\otimes\underline{1}).
\end{tikzcd}$$

Proof. La proposition résulte de la Proposition 2.113. □

Proposition 2.170. *Tout diagramme dans* $\underline{C}'$ *construit à l'aide de* $a', (a')^{-1}, c', (c')^{-1}, g', (g')^{-1}, d', (d')^{-1}, Fa, (Fa)^{-1}, Fc, (Fc)^{-1}, Fg, (Fg)^{-1}, Fd, (Fd)^{-1}, \check{F}, \check{F}^{-1}, \widehat{F}, \widehat{F}^{-1}$, *des identités et de la loi* $\otimes$*, est commutatif.*

Proof. D'abord, en vertue de la commutativité des diagrammes (2.141), (2.145) et (2.149), on peut remplacer $Fa, Fc, \widehat{F}$ par $a', c', \check{F}, Fg, g', Fd, d'$. Ensuite, au moyen des diagrammes commutatifs (2.167), (2.169), on arrive à un diagramme dans $\underline{C}'$ qui ne contient que $a', (a')^{-1}, c', (c')^{-1}, g', (g')^{-1}, d', (d')^{-1}$ et des identités. Or ce diagramme est commutatif en vertu de la Proposition 2.115, on en déduit par suite la commutativité du diagramme considéré. □

Example 2.171. Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
& ((A' \otimes \underline{1}') \otimes B') \otimes (F\underline{1} \otimes F(A \otimes B)) \arrow[dl, "\mathrm{id} \otimes \check{F}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id} \otimes (\widehat{F}^{-1} \otimes \mathrm{id})"] & \\
((A' \otimes \underline{1}') \otimes B') \otimes F(\underline{1} \otimes (A \otimes B)) \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes Fa"] & & ((A' \otimes \underline{1}') \otimes B') \otimes (\underline{1}' \otimes F(A \otimes B)) \arrow[d, "a'"'] \\
((A' \otimes \underline{1}') \otimes B') \otimes F((\underline{1} \otimes A) \otimes B) \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes F(g_A \otimes \mathrm{id})"] & & (((A' \otimes \underline{1}') \otimes B') \otimes \underline{1}') \otimes F(A \otimes B) \arrow[d, "(((d'_{A'})^{-1} \otimes \mathrm{id}) \otimes \mathrm{id}) \otimes \mathrm{id}"'] \\
((A' \otimes \underline{1}') \otimes B') \otimes F(A \otimes B) \arrow[d, "(a')^{-1} \otimes \check{F}^{-1}"] & & ((A' \otimes B') \otimes \underline{1}') \otimes F(A \otimes B) \arrow[d, "(d'_{A' \otimes B'})^{-1} \otimes Fc"'] \\
(A' \otimes (\underline{1}' \otimes B')) \otimes (FA \otimes FB) \arrow[d, "a'"] & & (A' \otimes B') \otimes F(B \otimes A) \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes (\check{F})^{-1}"'] \\
((A' \otimes (\underline{1}' \otimes B') \otimes FA) \otimes FB \arrow[d, "c' \otimes \mathrm{id}"] & & (A' \otimes B') \otimes (FB \otimes FA) \arrow[d, "a'"'] \\
(FA \otimes (A' \otimes (\underline{1}' \otimes B'))) \otimes FB \arrow[d, "(\mathrm{id} \otimes (\mathrm{id} \otimes (g'_{B'})^{-1})) \otimes \mathrm{id}"] & & ((A' \otimes B') \otimes FB) \otimes FA \arrow[d, "c'"'] \\
(FA \otimes (A' \otimes B')) \otimes FB & & FA \otimes ((A' \otimes B') \otimes FB) \arrow[ll, bend left, "a'"]
\end{tikzcd}$$

On a des propositions analogues à la Proposition 2.170 quand on a affaire à des contraintes d'associativité, commutativité, unité, ou des contraintes mixtes AC, AU, CU. Bornons-nous au cas AC, nous avons la proposition:

Proposition 2.172. *Soient* $\underline{C}, \underline{C}'$ *des* $\otimes$*-catégories* AC *et* $(F, \check{F})$ *un* $\otimes$*-foncteur* AC *de* $\underline{C}$ *dans* $\underline{C}'$. *Tout diagramme dans* $\underline{C}'$ *construit à l'aide de* $a', (a')^{-1}, c', (c')^{-1}, Fa, (Fa)^{-1}, Fc, (Fc)^{-1}, \check{F}, \check{F}^{-1}$, *des identités et de la loi* $\otimes$, *est commutatif.*

2.5. $\otimes$-**Equivalences.**

2.5.1. *Définition des* $\otimes$*-équivalences.*

Definition 2.173. Soient $\underline{C}, \underline{C}'$ des $\otimes$-catégories, $(F, \check{F})$ un $\otimes$-foncteur de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$. On dit que $(F, \check{F})$ est une $\otimes$-*équivalence* si et seulement si F est une équivalence.

Proposition 2.174. *Soient $\underline{C}, \underline{C}'$ des $\otimes$-catégories, $(F, \check{F})$ une $\otimes$-équivalence de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$. Soit $F' \colon \underline{C}' \to \underline{C}$ un foncteur quasi-inverse de F, i.e.,*

$$F'F \underset{\alpha}{\xrightarrow{\sim}} \mathrm{id}_{\underline{C}}, \qquad FF' \underset{\alpha'}{\xrightarrow{\sim}} \mathrm{id}_{\underline{C}'},$$

α et α' vérifiant les relations

$$\begin{aligned} F * \alpha &= \alpha' * F \\ F' * \alpha' &= \alpha * F'. \end{aligned} \tag{2.175}$$

Alors il existe un isomorphisme fonctoriel et un seul

$$\check{F}'_{X',Y'} \colon F'X' \otimes F'Y' \xrightarrow{\sim} F'(X' \otimes Y')$$

tel que $(F', \check{F}')$ soit un $\otimes$-foncteur et α, α' des $\otimes$-morphismes.

Proof. Suppossons que $\check{F}'$ existe. Considérons le $\otimes$-foncteur composé $(FF', (F\check{F}')) = (F, \check{F}) \circ (F', \check{F}')$. D'après la Définition 2.139, $(F\check{F}')_{X',Y'}$ est défini par le triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} FF'X' \otimes FF'Y' \arrow[rr, "\check{F}_{F'X', F'Y'}"] \arrow[dr, "(F\check{F}')_{X',Y'}"'] & & F(F'X' \otimes F'Y') \arrow[dl, "F(\check{F}'_{X',Y'})"] \\ & FF'(X' \otimes Y'). & \end{tikzcd}$$

En exprimant que α' est un $\otimes$-morphisme, $\check{F}'$ doit être tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} F(F'X' \otimes F'Y') \arrow[r, "F(\check{F}')"] & FF'(X' \otimes Y') \arrow[d, "\alpha'_{X' \otimes Y'}"] \\ FF'X' \otimes FF'Y' \arrow[u, "\check{F}"] \arrow[r, "\alpha'_{X'} \otimes \alpha'_{Y'}"'] & X' \otimes Y'. \end{tikzcd} \tag{2.176}$$

D'où l'unicité de $\check{F}'$ puisque F est pleinement fidèle. Prenons $\check{F}'$ défini par le diagramme commutatif (2.176). $\check{F}'$ est bien fonctoriel en X', Y'; et α' un $\otimes$-morphisme. Il nous reste à démontrer que α est un $\otimes$-morphisme. Or cela résulte de la proposition suivante: $\square$

Proposition 2.177. *Soient $\underline{C}, \underline{C}'$ des $\otimes$-catégories, $(F, \check{F})$ et $(F', \check{F}')$ des $\otimes$-foncteurs de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$ et de $\underline{C}'$ dans $\underline{C}$ respectivement tels que*

$$F'F \underset{\alpha}{\xrightarrow{\sim}} \mathrm{id}_{\underline{C}}, \qquad FF' \underset{\alpha'}{\xrightarrow{\sim}} \mathrm{id}_{\underline{C}'}$$

avec α, α' vérifiant les relations (2.175)*. Alors α est un $\otimes$-morphisme si et seulement si α' l'est.*

Proof. En vertu de la symétrie du problème, ils nous suffit de démontrer que si α' est un $\otimes$-morphisme, alors α est aussi un $\otimes$-morphisme, c'est à dire on doit avoir le diagramme suivant commutatif

$$
\begin{tikzcd}
F'(FX \otimes FY) \arrow[r, "F'(\check{F})"] & F'F(X \otimes Y) \arrow[d, "\alpha_{X\otimes Y}"] \\
F'FX \otimes F'FY \arrow[u, "\check{F}'"] \arrow[r, "\alpha_X \otimes \alpha_Y"'] & X \otimes Y.
\end{tikzcd}
\tag{2.178}
$$

Considérons donc le diagramme suivant

$$
\begin{tikzcd}
FX \otimes FY \arrow[r, "\check{F}"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(I)}"] & F(X \otimes Y) \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(II)}"] & FF'F(X \otimes Y) \arrow[l, "F(\alpha_X \otimes \alpha_Y)"'] \arrow[r, "\alpha'_{F(X\otimes Y)}"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(III)}"] & F(X \otimes Y) \\
FF'FX \otimes FF'FY \arrow[u, "F\alpha_X \otimes F\alpha_Y"] \arrow[r, "\check{F}"] & F(F'FX \otimes F'FY) \arrow[u, "F(\alpha_X \otimes \alpha_Y)"] \arrow[r, "F(\check{F}')"] & FF'(FX \otimes FY) \arrow[u, "FF'(\check{F})"] \arrow[r, "\alpha'_{FX\otimes FY}"] & FX \otimes FY \arrow[u, "\check{F}"]
\end{tikzcd}
$$

dont la commutativité de la région (I) résulte de la fonctorialité de $\check{F}$; celle de (III) de la fonctorialité de α'; enfin celle du circuit extérieur se déduit des relations (2.175) et de la commutativité du diagramme (2.176). D'où la commutativité de (II) qui est l'image par F de (2.178). Or F est pleinement fidele, ce qui donne la commutativité de (2.178). $\square$

En vertu de la Définition (2.173) et la Proposition 2.174, on peut énoncer la proposition

Proposition 2.179. *Soient $\underline{C}, \underline{C}'$ des $\otimes$-catégories, $(F, \check{F})$ une $\otimes$-foncteur de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$. Alors $(F, \check{F})$ est une $\otimes$-équivalence si et seulement si $(F, \check{F})$ peut être mis dans un quadruple*

$$((F, \check{F}), (F', \check{F}'), \alpha, \alpha')$$

tel que $(F', \check{F}')$ soit in $\otimes$-foncteur de $\underline{C}'$ dans $\underline{C}$, $\alpha\colon F'F \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_{\underline{C}}$, $\alpha'\colon FF' \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_{\underline{C}'}$ des $\otimes$-isomorphismes vérifiant (2.175). *$((F, \check{F}), (F', \check{F}'), \alpha, \alpha')$ est appelé quadruple de $\otimes$-équivalence entre $\underline{C}$ et $\underline{C}'$.*

Soient $\underline{C}, \underline{C}'$ des $\otimes$-catégories et $((F, \check{F}), (F', \check{F}'), \alpha, \alpha')$ un quadruple de $\otimes$-équivalence entre $\underline{C}$ et $\underline{C}'$. On a les propositions suivantes

Proposition 2.180. $(F, \check{F})$ *est compatible avec les contraintes d'associativité a, a' données respectivement sur $\underline{C}$, $\underline{C}'$ si et seulement si $(F', \check{F}')$ l'est.*

Proof. En raison de la symétrie du problème, il nous suffit de démontrer que si $(F', \check{F}')$ est compatible avec a, a', alors il en est de même de $(F, \check{F})$, i.e., le diagramme (2.141) est commutatif. Or ce diagramme se retrouve en la région (V) (à image par F' près) du diagramme suivant

$$
\begin{tikzcd}
F'FX \otimes (F'FY \otimes F'FZ) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\check{F}'"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\check{F'F}"] \arrow[ddddd, bend right=60, "a"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & F'FX \otimes F'(FY \otimes FZ) \arrow[rr, "\check{F}'"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes F'(\check{F})"] \arrow[drr, phantom, "(\mathrm{II})"] & & F'(FX \otimes (FY \otimes FZ)) \arrow[ddddd, bend left=60, "F'a'"] \\
F'FX \otimes F'F(Y \otimes Z) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\check{F'F}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & F'FX \otimes F'F(Y \otimes Z) \arrow[d, "\check{F}'"] \arrow[drr, phantom, "(\mathrm{IV})"] & & F'FX \otimes F'(FY \otimes FZ) \arrow[ll, "\mathrm{id}\otimes F'\check{F}"'] \arrow[u, "\check{F}'"'] \arrow[d, "\check{F}'"] \\
F'F(X \otimes (Y \otimes Z)) \arrow[d, "F'Fa"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{X})"'] & F'(FX \otimes F(Y \otimes Z)) \arrow[l, "F'(\check{F})"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{V})"] & & F'(FX \otimes (FY \otimes FZ)) \arrow[ll, "F'(\mathrm{id}\otimes\check{F})"'] \arrow[d, "F'a'"] \arrow[r, phantom, "(\mathrm{XI})"] & {} \\
F'F((X \otimes Y) \otimes Z) & F'(F(X \otimes Y) \otimes FZ) \arrow[l, "F'(\check{F})"'] & & F'((FX \otimes FY) \otimes FZ) \arrow[ll, "F'(\check{F}\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[d, "F'(\check{F}\otimes\mathrm{id})"] \\
F'F(X \otimes Y) \otimes F'FZ \arrow[r, equal] \arrow[u, "\check{F'F}"] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{VI})"] & F'F(X \otimes Y) \otimes F'FZ \arrow[rr, "\check{F}'"] \arrow[u, "\check{F}'"'] \arrow[urr, phantom, "(\mathrm{VII})"] & & F'(F(X \otimes Y) \otimes FZ) \\
(F'FX \otimes F'FY) \otimes F'FZ \arrow[r, "\check{F}'\otimes\mathrm{id}"] \arrow[u, "\check{F'F}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{VIII})"] & F'(FX \otimes FY) \otimes F'FZ \arrow[rr, "\check{F}'"] \arrow[u, "F'(\check{F})\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[urr, phantom, "(\mathrm{IX})"] & & F'((FX \otimes FY) \otimes FZ) \arrow[u, "F'(\check{F}\otimes\mathrm{id})"']
\end{tikzcd}
$$

dans lequel la commutativité des régions (I),(III), (VI), (VIII) résulte de la définition de $(\check{F'F})$; celle de (II), (VII), (XI) est évidente; celle de (IV),(IX) vient de la fonctorialité de $\check{F}'$; celle de (X) s'obtient en appliquant la Proposition 2.156 au $\otimes$-foncteurs $(F'F, (\check{F'F}))$ isomorphe au $\otimes$-foncteur $(\mathrm{id}_{\underline{C}}, \mathrm{id})$ compatible avec les contraintes d'associativité égales à a par le $\otimes$-isomorphisme α; enfin celle du circuit extérieur résulte de l'hypothèse. On en déduit la commutativité de la région (V), d'où celle de (2.141) puisque F' est pleinement fidèle. □

Proposition 2.181. $(F, \check{F})$ *est compatible avec les contraintes de commutativité* c, c' *données respectivement sur* $\underline{C}, \underline{C}'$ *si et seulement si* $(F', \check{F}')$ *l'est.*

Proof. De la même manière que dans la Proposition 2.180, nous considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
F'FX \otimes F'FY \arrow[r, equal] \arrow[d, "\check{F}'"'] \arrow[ddd, bend right=60, "c"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(I)}"] & F'FX \otimes F'FY \arrow[d, "(\check{F'F})"] \arrow[ddd, bend left=60, "c"] \\
F'(FX \otimes FY) \arrow[r, "F'(\check{F})"] \arrow[d, "F'c'"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(II)}"] & F'F(X \otimes Y) \arrow[d, "F'Fc"] \\
F'(FY \otimes FX) \arrow[r, "F'(\check{F})"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(III)}"] & F'F(Y \otimes X) \\
F'FY \otimes F'FX \arrow[r, equal] \arrow[u, "\check{F}'"] & F'FY \otimes F'FX \arrow[u, "(\check{F'F})"']
\end{tikzcd}$$

$$\mathrm{(IV)} \qquad \mathrm{(V)}$$

où la commutativité des régions (I), (III) résulte de la définition de $(\check{F'F})$; celle de (V) de l'application de la Proposition 2.157 au $\otimes$-isomorphisme $\alpha \colon F'F \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_{\underline{C}}$; d'où la proposition. □

Proposition 2.182. $(F, \check{F})$ *est compatible avec les unités* $(\underline{1}, g, d), (\underline{1}', g', d')$ *données respectivement sur* $\underline{C}, \underline{C}'$ *si et seulement si* $(F', \check{F}')$ *l'est.*

Proof. Toujours par raison de symétrie, nous démontrons seulement que si $(F', \check{F}')$ est compatible avec les unités considérées, il en est de même de $(F, \check{F})$. D'abord nous définissons $\widehat{F} \colon \underline{1}' \xrightarrow{\sim} F\underline{1}$ par la commutativité du diagramme

(2.183)
$$\begin{tikzcd}
\underline{1}' \arrow[r, "\widehat{F}"] & F\underline{1} \arrow[d, equal] \\
FF'\underline{1}' \arrow[u, "\alpha'_{\underline{1}'}"] & F\underline{1} \arrow[l, "F(\widehat{F'})"']
\end{tikzcd}$$

Nous devons maintenant démontrer la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "g'_{FX}"] \arrow[d, "F(g_X)"'] & \underline{1}' \otimes FX \arrow[d, "\widehat{F} \otimes \mathrm{id}"] \\
F(\underline{1} \otimes X) & F\underline{1} \otimes FX. \arrow[l, "\check{F}"']
\end{tikzcd}$$

Pour cela, considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\underline{1}\otimes X \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & F'F(\underline{1}\otimes X) \arrow[l, "\alpha_{\underline{1}\otimes X}"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & F'(F\underline{1}\otimes FX) \arrow[l, "F'(\check{F})"'] \arrow[r, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & F'(F\underline{1}\otimes FX) \arrow[r, equal] \arrow[d, "F'(F(\widehat{F'})\otimes \mathrm{id})"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IV})"] & F'(F\underline{1}\otimes FX) \arrow[d, equal] \\
X \arrow[u, "g_X"] \arrow[d, "g_X"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{V})"] & F'FX \arrow[l, "\alpha_X"'] \arrow[u, "F'F(g_X)"] \arrow[r, "F'(g'_{FX})"] \arrow[d, "g_{F'FX}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VI})"] & F'(\underline{1}'\otimes FX) \arrow[u, "F'(\widehat{F}\otimes \mathrm{id})"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VII})"] & F'(FF'\underline{1}'\otimes FX) \arrow[l, "F'(\alpha'_{\underline{1}}\otimes \mathrm{id})"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VIII})"] & F'(F\underline{1}\otimes FX) \arrow[l, "F'(F(\widehat{F'})\otimes \mathrm{id})"'] \\
\underline{1}\otimes X \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IX})"] & \underline{1}\otimes F'FX \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\alpha_X"'] \arrow[r, "\widehat{F}'\otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\alpha_X"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{X})"] & F'\underline{1}'\otimes F'FX \arrow[u, "\check{F}'"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{XI})"] & F'FF'\underline{1}'\otimes F'FX \arrow[l, "F'(\alpha'_{\underline{1}'})\otimes \mathrm{id}"'] \arrow[u, "\check{F}'"] \arrow[d, "\alpha_{F'\underline{1}'}\otimes\alpha_X"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{XII})"] & F'F\underline{1}\otimes F'FX \arrow[l, "F'F(\widehat{F'})\otimes \mathrm{id}"'] \arrow[u, "\check{F}'"'] \arrow[d, "\alpha_{\underline{1}}\otimes\alpha_X"'] \\
\underline{1}\otimes X \arrow[r, equal] & \underline{1}\otimes X \arrow[r, equal] & \underline{1}\otimes X \arrow[u, "\widehat{F'}\otimes\alpha_X^{-1}"] \arrow[r, "\widehat{F'}\otimes \mathrm{id}"] & F'\underline{1}'\otimes X & \underline{1}\otimes X \arrow[l, "\widehat{F'}\otimes \mathrm{id}"']
\end{tikzcd}$$

où nous avons immédiatement la commutativité des régions (IV), (IX), (X). Pour les autres régions, la commutativité de (I), (XII) découle de la naturalité de α; celle de (III) résulte de la définition de $\widehat{F}$ (Diag.(2.183)); celle de (VII), (VIII) de la naturalité de g; celle de (VI) de l'hypothèse; celle de (VII), (VIII) de la naturalité de $\check{F}'$; celle de (XI) de l'égalité $F'\alpha'_{\underline{1}'} = \alpha_{F'\underline{1}'}$ (For. (2.175)); enfin celle du circuit extérieur vient du fait que α est un $\otimes$-morphisme (Diag. (2.178)). D'où la commutativité de la région (II) qui est l'image par F' du diagramme dont nous voulons démontrer la commutativité. On a la proposition en tenant compte du fait que F' est pleinement fidèle, la démonstration pour d_X, d'_{FX} étant analogue. $\square$

Definition 2.184. Soit $(F, \check{F})\colon \underline{C} \to \underline{C}'$ un $\otimes$-foncteur, avec F pleinement fidèle, d'une $\otimes$-catégorie $\underline{C}$ dans une $\otimes$-catégorie $\underline{C}'$ munie d'une contrainte d'associativité a' (resp., commutativité c'). Le diagramme commutatif (2.141) (resp. le diagramme commutatif (2.145)) montre qu'il existe sur $\underline{C}$ une et une seule contrainte d'associativité (resp., commutativité) compatible avec $(F, \check{F})$ et a' (resp., c'). On l'appelle contrainte d'associativité (resp., commutativité) *induite* par $(F, \check{F})$, et on la note F^*a' (resp. F^*c').

Proposition 2.185. *Soient $(F, \check{F}), (G, \check{G})\colon \underline{C} \to \underline{C}'$ des $\otimes$-foncteurs avec F, G pleinement fidèles, et soit $\alpha\colon F \xrightarrow{\sim} G$ un $\otimes$-isomorphisme. Soit a' (resp. c') une contrainte d'associativité (resp., commutativité) sur $\underline{C}'$. Alors $F^*a' = G^*a'$ (resp. $F^*c' = G^*c'$).*

Proof. En vertu de la Définition 2.184, on a $(F, \check{F})$ compatible avec les contraintes d'associativité F^*a', a' (resp. avec les contraintes de commutativité F^*c', c'). Or $(G, \check{G})$ est aussi compatible avec les contraintes d'associativité F^*a', a' (resp. avec les contraintes de commutativité F^*c', c') en vertu de la Proposition 2.156 (resp. Proposition 2.157)). D'où $F^*a' = G^*a'$ (resp. $F^*c' = G^*c'$) en vertu de l'unicité de G^*a' (resp. G^*c'). $\square$

Proposition 2.186. *Soient $\underline{C}, \underline{C}'$ des $\otimes$-catégories, $((F,\check{F}),(F',\check{F}'),\alpha,\alpha')$ un quadruple de $\otimes$-équivalence entre $\underline{C}$ et $\underline{C}'$. Les applications*

$$\begin{array}{rcll} a' & \mapsto & F^*a' & (\textit{resp. } c' \mapsto F^*c') \\ a & \mapsto & (F')^*a & (\textit{resp. } c \mapsto (F')^*c) \end{array}$$

entre l'ensemble des contraintes d'associativité (resp. commutativité) sur $\underline{C}$ et l'ensemble des contraintes d'associativité (resp. commutativité) sur $\underline{C}'$ sont inverses l'une de l'autre.

Proof. Posons $a = F^*a'$ (resp. $c = F^*c'$). On a $(F,\check{F})$ compatible avec les contraintes d'associativité (resp. commutativité) a, a' (resp. c, c'), d'où $(F',\check{F}')$ aussi (Proposition 2.180). Par conséquent $(F')^*a = a'$ (resp. $(F')^*c = c'$). Inversement, posons $a' = (F')^*a$ (resp. $c' = (F')^*c$). On a $(F',\check{F}')$ compatible avec les contraintes d'associativité (resp. commutativité) a, a' (resp. c, c'); il en est de même donc de $(F,\check{F})$. D'où $a = F^*a'$ (resp. $c = F^*c'$). $\square$

Proposition 2.187. *Soient $\underline{C}, \underline{C}'$ des $\otimes$-catégories, $((F,\check{F}),(F',\check{F}'),\alpha,\alpha')$ un quadruple de $\otimes$-équivalence entre $\underline{C}$ et $\underline{C}'$. Soit $(\underline{1}, g, d)$ une unité pour $\underline{C}$. Alors $(\underline{1}' = F\underline{1}, g', d')$ avec g', d' définis par les diagrammes commutatifs*

(2.188)
$$\begin{tikzcd} FF'X' \arrow[r, "F(g_{F'X'})"] \arrow[d, "\alpha'_{X'}"'] & F(\underline{1} \otimes F'X') & F\underline{1} \otimes FF'X' \arrow[l, "\check{F}"'] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \alpha'_{X'}"] \\ X' \arrow[rr, "g'_{X'}"] & & F\underline{1} \otimes X' \end{tikzcd}$$

(2.189)
$$\begin{tikzcd} FF'X' \arrow[r, "F(d_{F'X'})"] \arrow[d, "\alpha'_{X'}"'] & F(F'X' \otimes \underline{1}) & FF'X' \otimes F\underline{1} \arrow[l, "\check{F}"'] \arrow[d, "\alpha'_{X'} \otimes \mathrm{id}"] \\ X' \arrow[rr, "d'_{X'}"] & & X' \otimes F\underline{1} \end{tikzcd}$$

est une unité pour $\underline{C}'$, et $(F,\check{F})$ est compatible avec $(\underline{1}, g, d)$, $(\underline{1}', g', d')$.

Proof. Nous allons d'abord démontrer $g'_{\underline{1}} = d'_{\underline{1}}$. Pur cela, considérons d'abord le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \underline{1} \arrow[d, "d_{\underline{1}}"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & F'F\underline{1} \arrow[l, "\alpha_{\underline{1}}"'] \arrow[r, "g_{F'F\underline{1}}"] \arrow[d, "d_{F'F\underline{1}}"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})\quad(\mathrm{III})"] & \underline{1} \otimes F'F\underline{1} \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \alpha_{\underline{1}}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IV})"] & F'F\underline{1} \arrow[l, "g_{F'F\underline{1}}"'] \arrow[d, "\alpha_{\underline{1}}"] \\ \underline{1} \otimes \underline{1} & F'F\underline{1} \otimes \underline{1} \arrow[l, "\alpha_{\underline{1}} \otimes \mathrm{id}"'] \arrow[r, "\alpha_{\underline{1}} \otimes \mathrm{id}"] \arrow[ur, "\alpha_{\underline{1}} \otimes \alpha_{\underline{1}}^{-1}"] & \underline{1} \otimes \underline{1} & \underline{1} \arrow[l, "g_{\underline{1}}"'] \end{tikzcd}$$

dont la commutativité des régions (I), (IV) résulte de la naturalité de d, g respectivement; celle de (III) est évidente; enfin celle du circuit extérieur découle de la relation $d_{\underline{1}} = g_{\underline{1}}$. D'où la commutativité de (II). Ensuite considérons le diagramme suivant

$$
\begin{tikzcd}
FF'F\underline{1} \arrow[r, "F(g_{F'F\underline{1}})"] \arrow[d, "F(d_{F'F\underline{1}})"'] \arrow[d, phantom, shift left=8ex, "\text{(I)}"] & F(\underline{1} \otimes F'F\underline{1}) \arrow[d, phantom, shift left=2ex, "\text{(II)}"] & F\underline{1} \otimes FF'F\underline{1} \arrow[l, "\check{F}"'] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \alpha'_{F\underline{1}}"] \arrow[d, phantom, shift right=8ex, "\text{(III)}"] \\
F(F'F\underline{1} \otimes \underline{1}) \arrow[ur, "F(\alpha_{\underline{1}} \otimes \alpha_{\underline{1}}^{-1})"'] & FF'F\underline{1} \otimes F\underline{1} \arrow[l, "\check{F}"] \arrow[r, "\alpha'_{F\underline{1}} \otimes \mathrm{id}"] \arrow[ur, "F\alpha_{\underline{1}} \otimes F\alpha_{\underline{1}}^{-1}"] & F\underline{1} \otimes F\underline{1}
\end{tikzcd}
$$

dans lequel la commutativité de la région (I) est établie ci-dessus; celle de (II) résulte de la fonctorialité de $\check{F}$ et celle de (III) des relations (2.175). On en déduit la commutativité du circuit extérieur qui, d'après la définition de g', d' par les diagrammes commutatifs (2.188) et (2.189), nous donne $g'_{\underline{1}} = d'_{\underline{1}}$.

Démontrons maintenant que $(F, \check{F})$ est compatible avec $(\underline{1}, g, d)$, $(\underline{1}', g', d')$. Nous démontrons seulement la commutativité du diagramme

$$
\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "F(g_X)"] \arrow[d, "g'_{FX}"'] & F(\underline{1} \otimes X) \\
\underline{1}' \otimes FX \arrow[r, "\widehat{F} \otimes \mathrm{id}"] & F\underline{1} \otimes FX \arrow[u, "\check{F}"']
\end{tikzcd}
$$

où $\widehat{F} = \mathrm{id}_{F\underline{1}}$, la démonstration pour d_X, d'_{FX} étant semblables. Pour cela, considérons le diagramme suivant

$$
\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "F(g_X)"] \arrow[d, "(\alpha'_{FX})^{-1}"] \arrow[dddd, bend right=60, "g'_{FX}"'] & F(\underline{1} \otimes X) \arrow[d, "F(\mathrm{id} \otimes \alpha_X^{-1})"'] \\
FF'FX \arrow[r, "F(g_{F'FX})"] \arrow[d, "F(g_{F'FX})"] \arrow[ur, phantom, "\text{(I)}"] & F(\underline{1} \otimes F'FX) \arrow[d, equal] \\
F(\underline{1} \otimes F'FX) \arrow[r, equal] \arrow[ur, phantom, "\text{(II)}"] \arrow[l, phantom, "\text{(V)}"] & F(\underline{1} \otimes F'FX) \arrow[r, phantom, "\text{(VI)}"] & {} \\
F\underline{1} \otimes FF'FX \arrow[r, equal] \arrow[u, "\check{F}"'] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \alpha'_{FX}"] \arrow[ur, phantom, "\text{(III)}"] & F\underline{1} \otimes FF'FX \arrow[u, "\check{F}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes F\alpha_X"'] \\
F\underline{1} \otimes FX \arrow[r, equal] \arrow[ur, phantom, "\text{(IV)}"] & F\underline{1} \otimes FX \arrow[uuuu, bend right=60, "\check{F}"']
\end{tikzcd}
$$

dont la commutativité de la région (I) résulte des relations (2.175) et de la naturalité de g; celle de (II), (III) est évidente; celle de (IV) découle de (2.175); celle de (V) de la définition de g' par le diagramme commutatif (2.188); celle de (VI) de la fonctorialité de $\check{F}$. D'où la commutativité du circuit extérieur qui est celle voulue. $\square$

2.5.2. *Transport de structures.*

Definition 2.190. Soient $F\colon \underline{C} \to \underline{C}'$ une équivalence de catégories et $F'\colon \underline{C}' \to \underline{C}$ un quasi-inverse de F. On a $F'F \underset{\alpha}{\xrightarrow{\sim}} \mathrm{id}_{\underline{C}}$, $FF' \underset{\alpha'}{\xrightarrow{\sim}} \mathrm{id}_{\underline{C}'}$ avec α, α' vérifiant les relations (2.175). Supposons que $\underline{C}$ soit munie d'une structure $\otimes$. Définissons une loi $\otimes$ sur $\underline{C}'$ en posant

$$\begin{array}{rcl} X' \otimes Y' & = & F(F'X' \otimes F'Y') \\ u' \otimes v' & = & F(F'u' \otimes F'v') \end{array} \tag{2.191}$$

pour $X', Y' \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}'$ et $u', v' \in \mathrm{Fl}\,\underline{C}'$. On dit que la loi $\otimes$ définie par la formule (2.191) est obtenue par *transport* de la loi $\otimes$ dans $\underline{C}$ au moyen de (F, F', α, α').

Proposition 2.192. *Les hypothèses étant celles de la Définition* 2.190 *et la loi* $\otimes$ *sur* $\underline{C}'$ *celle par transport au moyen de* (F, F', α, α')*, il existe des isomorphismes fonctoriels*

$$\begin{array}{rcl} FX \otimes FY & \xrightarrow{\check{F}} & F(X \otimes Y) \\ F'X' \otimes F'Y' & \xrightarrow{\check{F}'} & F'(X' \otimes Y') \end{array}$$

tels que α, α' *soient des* $\otimes$*-morphismes.*

Proof. Supposons qu'il existe $\check{F}$ et $\check{F}'$ tels que α, α' soient des $\otimes$-morphismes. Nous devons donc avoir la commutativité du diagramme (2.176) qui exprime que α' est un $\otimes$-morphisme. En vertu de (2.191) nous avons $F'(X' \otimes Y') = F'F(F'X' \otimes F'Y')$. Pour cette raison, possons

$$\check{F}'_{X',Y'} = \alpha^{-1}_{F'X' \otimes F'Y'} \colon F'X' \otimes F'Y' \to F'(X' \otimes Y')$$

ce qui donne, compte tenu des relations (2.175) et (2.191),

$$F(\check{F}'_{X',Y'}) = F(\alpha^{-1}_{F'X' \otimes F'Y'}) = (\alpha'_{F(F'X' \otimes F'Y')})^{-1} = (\alpha'_{X' \otimes Y'})^{-1}.$$

Par suite, pour avoir le diagramme (2.176) commutatif, nous devons poser

$$\check{F}'_{F'X',F'Y'} = \alpha'_{X'} \otimes \alpha'_{Y'}$$

ou

$$\check{F}'_{F'X',F'Y'} = F(F'\alpha'_{X'} \otimes F'\alpha'_{Y'})$$

compte tenu de (2.191). Ils nous reste à définir $\breve{F}_{X,Y}$, pour $X, Y \in \operatorname{Ob}\underline{C}$, par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} FF'FX \otimes FF'FY \arrow[r, "F\alpha_X \otimes F\alpha_Y"] \arrow[d, "\breve{F}_{F'FX,F'FY}"'] & FX \otimes FY \arrow[d, "\breve{F}_{X,Y}"] \\ F(F'FX \otimes F'FY) \arrow[r, "F(\alpha_X \otimes \alpha_Y)"] & F(X \otimes Y) \end{tikzcd}$$

ce qui donne

$$\breve{F}_{X,Y} = F(\alpha_X \otimes \alpha_Y)(\alpha'_{FX} \otimes \alpha'_{FY})(F\alpha_X^{-1} \otimes F\alpha_Y^{-1})$$

ou, compte tenu de (2.175)

$$\breve{F}_{X,Y} = F(\alpha_X \otimes \alpha_Y).$$

Donc, en appliquant la Proposition 2.177, on peut conclure qu'avec

$$\breve{F}_{X,Y} = F(\alpha_X \otimes \alpha_Y), \breve{F}'_{X',Y'} = \alpha^{-1}_{F'X' \otimes F'Y'} \tag{2.193}$$

α, α' sont des $\otimes$-morphismes, ce qui acheve la demonstration. □

3. Chapitre II
Gr-catégories et Pic-catégories

3.1. Gr-**catégories.**

3.1.1. *Définition des* Gr-*catégories.*

Definition 3.1. Une Gr-*catégorie* $\underline{P}$ est une $\otimes$-catégorie AU (Définition 2.68) dont tous les objets sont inversibles (Définition 2.117), et dont la catégorie sous-jacente est un grupoïde, i.e., toutes les flèches sont des isomorphismes. Il résulte de la définition que tous les objets de $\underline{P}$ sont réguliers (Définition 2.2).

Proposition 3.2. *Soient $\underline{P}$ et $\underline{P}'$ des* Gr-*catégories et $(F, \breve{F})\colon \underline{P} \to \underline{P}'$ un $\otimes$-foncteur associatif. Alors $(F, \breve{F})$ est unifère.*

Proof. On a aussitôt la proposition en remarquant que $F(\underline{1})$ est régulier, $\underline{1}$ étant l'objet unité de $\underline{P}$, et en appliquant la Proposition 2.172. □

Proposition 3.3. *Soient $\underline{P}$ une* Gr-*catégorie, $\underline{P}'$ une $\otimes$-catégorie* AU*, $\underline{1}$ et $\underline{1}'$ les objets unités de $\underline{P}$ et $\underline{P}'$ respectivement. Soit $(F, \breve{F})\colon \underline{P} \to \underline{P}'$ une $\otimes$-équivalence telle qu'on ait $F\underline{1} \simeq \underline{1}'$. Alors $\underline{P}'$ est une* Gr-*catégorie.*

Proof. D'abord, toutes les flèches de $\underline{P}'$ sont des isomorphismes en vertu du fait que toutes les flèches de $\underline{P}$ sont des isomorphismes et F est une équivalence.

Montrons maintenant que tous les objets de $\underline{P}'$ sont inversibles. Soit Y un objet de $\underline{P}'$. Puisque F es une équivalence, il existe $X \in \operatorname{Ob} \underline{P}$ tel que $Y \simeq FX$. Comme $\underline{P}$ est une Gr-catégorie, ses objets sont donc inversibles, par conséquent il existe $X' \in \operatorname{Ob} \underline{P}$ tel que $X' \otimes X \simeq X \otimes X' \simeq \underline{1}$ (Corollarie 2.119). Nous avons

$$\begin{array}{rcl} FX' \otimes Y & \simeq & FX' \otimes FX \underset{\breve{F}}{\simeq} F(X' \otimes X) \simeq F\underline{1} \simeq \underline{1}' \\ Y \otimes FX' & \simeq & FX \otimes FX' \underset{\breve{F}}{\simeq} F(X \otimes X') \simeq F\underline{1} \simeq \underline{1}'. \end{array}$$

Ce qui prouve bien que Y est inversible. □

3.1.2. *Premiers invariants d'une* Gr-*catégorie.*

Definition 3.4. Sea $\underline{P}$ une Gr-catégorie. Nous poserons par la suite:

$$\begin{array}{rcl} \pi_0(\underline{P}) & = & \text{ensemble des classes à isomorphisme près d'objets de } \underline{P} \\ \pi_1(\underline{P}) & = & \operatorname{Aut}(\underline{1}). \end{array}$$

$\pi_0(\underline{P})$ muni de la loi de composition (qu'on note multiplicativement) induite par l'operation $\otimes$ est un groupe, l'élément unité $\underline{1}$ étant la classe des objets isomorphes à $\underline{1}$. Ainsi, on vient d'attacher à une Gr-catégorie $\underline{P}$ des groupes $\pi_0(\underline{P}), \pi_1(\underline{P})$, oú $\pi_1(\underline{P})$ est commutatif (Proposition 2.29). La loi de composition de $\pi_1(\underline{P})$ est noteé désormais additivement.

Examples 3.5. Soit $\mathcal{G}$ un grupoïde et posons $\underline{P} = \underline{\operatorname{Aut}}(\mathcal{G})$. Alors $\underline{P}$ est de façon naturelle une Gr-catégorie, la loi $\otimes$ étant donnée par la composition des foncteurs. On pourrait appeler $\pi_0(\underline{P})$ le groupe des *automorphismes extérieurs* de $\mathcal{G}$, et $\pi_1(\underline{P})$ le centre de $\mathcal{G}$.

On a les propositions suivantes pour une Gr-catégorie $\underline{P}$.

Proposition 3.6. *Les homomorphismes γ_X et δ_X définis dans la Proposition* 2.31 *sont des isomorphismes.*

Proof. Résultat immédiat de ce que X est régulier. □

Proposition 3.7. *Soit $\underline{Q}$ une composante connexe de $\underline{P}$. Les applications*

$$\operatorname{Aut}(\underline{1}) \to \operatorname{Aut}(\mathrm{id}_{\underline{Q}}), u \mapsto (\gamma_X u)_{X \in \operatorname{Ob} \underline{Q}}, \tag{3.8}$$

et

$$\operatorname{Aut}(\underline{1}) \to \operatorname{Aut}(\mathrm{id}_{\underline{Q}}), u \mapsto (\delta_X u)_{X \in \operatorname{Ob} \underline{Q}}, \tag{3.9}$$

sont des isomorphismes.

Proof. En vertu de les Propositions 2.35 et 3.6, les applications (3.8) et (3.9) sont des homomorphismes injectifs. Démontrons que (3.8) est aussi surjectif, l'assertion analogue pour (3.9) étant démontrée de façon semblable. Soit $r = (r_X)_{X \in \mathrm{Ob}\,\underline{Q}}$ un élément de $\mathrm{Aut}(\mathrm{id}_{\underline{Q}})$ et soit $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\underline{Q}$. Puisque $\underline{Q}$ est connexe, il existe une fléche $f\colon X \to Y$. Considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{1}\otimes X \arrow[r, "\gamma_X^{-1}(r_X)\otimes \mathrm{id}"] \arrow[dddd, bend right=60, "\mathrm{id}"'] & \underline{1}\otimes X \arrow[dddd, bend left=60, "\mathrm{id}"] & \\
 & X \arrow[u, "g_X"] \arrow[r, "r_X"] \arrow[d, "f"'] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{I})"] & X \arrow[u, "g_X"'] \arrow[d, "f"] & \\
 & Y \arrow[r, "t_Y"] \arrow[d, "g_Y"'] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{II})"] \arrow[l, phantom, "(\mathrm{V})"] & Y \arrow[d, "g_Y"] \arrow[r, phantom, "(\mathrm{VI})"] & \\
 & \underline{1}\otimes Y \arrow[r, "\gamma_Y^{-1}(r_Y)\otimes \mathrm{id}"] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{III})"] & \underline{1}\otimes Y & \\
 & \underline{1}\otimes X \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes f"] \arrow[r, "\gamma_Y^{-1}(r_Y)\otimes \mathrm{id}"] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{IV})"] & \underline{1}\otimes X \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes f"'] &
\end{tikzcd}$$

dont la commutativité des régions (I) et (II) résulte de la définition de γ; celle de (II) de la fonctorialité de r: celle de (V) et (VI) de la naturalité de g; enfin celle de (IV) est évidente. D'où la commutativité du circuit extérieur qui donne

$$\gamma_X^{-1}(r_X) = \gamma_Y^{-1}(r_Y) \tag{3.10}$$

en vertu du fait que X est régulier. Posons $u = \gamma_X^{-1}(r_X) = \gamma_Y^{-1}(r_Y)$, nous avons bien $r = (\gamma_X(u))_{X \in \mathrm{Ob}\,\underline{Q}}$, ce qui montre que l'application (3.8) est surjective. Par le même raisonnement, on obtient

$$\delta_X^{-1}(r_X) = \delta_Y^{-1}(r_Y), \tag{3.11}$$

ce qui donne (3.9) surjective. $\square$

Corollary 3.12. *Soient $X, Y \in S$ avec $S \in \pi_0(\underline{P})$. On a*

$$\gamma_X^{-1}\delta_X(u) = \gamma_Y^{-1}\delta_Y(u) \tag{3.13}$$

$$\delta_X^{-1}\gamma_X(u) = \delta_Y^{-1}\gamma_Y(u) \tag{3.14}$$

pour tout $u \in \mathrm{Aut}(\underline{1}) = \pi_1(\underline{P})$.

Proof. Posons

$$(r_X)_{X\in S} = (\delta_X u)_{X\in S} \quad (\text{resp. } (r_X)_{X\in S} = (\gamma_X u)_{X\in S})$$

et appliquons la formule (3.10) (resp. (3.11)). On obtient (3.13) (resp. (3.14)). □

Proposition 3.15. *L'action de $\pi_0(\underline{P})$ sur $\pi_1(\underline{P})$ définie par la relation*

$$Su = \gamma_X^{-1}\delta_X(u)\,;\; X \in S, S \in \pi_0(\underline{P}), u \in \pi_1(\underline{P}), \tag{3.16}$$

possède les propriétés suivantes:

(i) $S(u_1 + u_2) = Su_1 + Su_2$,
(ii) $(SS')u = S(S'u)$,
(iii) $1u = u$;

i.e., le groupe abélien $\pi_1(\underline{P})$ muni de l'action (3.16) *est un $\pi_0(\underline{P})$-module à gauche.*

Proof.

(i) Nous avons

$$\begin{aligned} S(u_1+u_2) &= \gamma_X^{-1}\delta_X(u_1+u_2) = \gamma_X^{-1}(\delta_X(u_1)+\delta_X(u_2)) \\ &= \gamma_X^{-1}\delta_X(u_1) + \gamma_X^{-1}\delta_X(u_2) = Su_1 + Su_2, \end{aligned}$$

en appliquant la formule (3.16) et la Proposition 3.6.

(ii) Soient $X \in S, X' \in S'$, d'où $X \otimes X' \in SS'$. Par suite en appliquant la formule (3.16) et les formules (2.96)-(2.98), nous obtenons

$$\begin{aligned} (SS')u &= \gamma_{X\otimes X'}^{-1}\delta_{X\otimes X'}(u) = \gamma_{X\otimes X'}^{-1}(\mathrm{id}_X \otimes \delta_{X'}u) = \gamma_{X\otimes X'}^{-1}(\mathrm{id}_X \otimes \gamma_{X'}\gamma_{X'}^{-1}\delta_{X'}u) \\ &= \gamma_{X\otimes X'}^{-1}(\mathrm{id}_X \otimes \gamma_{X'}(S'u)) = \gamma_{X\otimes X'}^{-1}(\delta_X(S'u) \otimes \mathrm{id}_{X'}) \\ &= \gamma_{X\otimes X'}^{-1}(\gamma_X\gamma_X^{-1}\delta_X(S'u) \otimes \mathrm{id}_{X'}) = \gamma_{X\otimes X'}^{-1}(\gamma_X(S(S'u)) \otimes \mathrm{id}_{X'}) \\ &= \gamma_{X\otimes X'}^{-1}\gamma_{X\otimes X'}(S(S'u)) = S(S'u). \end{aligned}$$

(iii) Compte tenu de la rélation (2.33), nous avons

$$1u = \gamma_{\underline{1}}^{-1}\delta_{\underline{1}}(u) = u.$$

□

Par une démonstration analogue nous obtenons:

Proposition 3.17. *L'action de $\pi_0(\underline{P})$ sur $\pi_1(\underline{P})$ définie par la relation*

$$uS = \delta_X^{-1}\gamma_X(u)\,;\; X \in S, S \in \pi_0(\underline{P}), u \in \pi_1(\underline{P}), \tag{3.18}$$

possède les propriétés suivantes:

(i) $(u_1 + u_2)S = u_1S + u_2S$,

(ii) $u(SS') = (uS)S'$,
(iii) $u1 = u$;

i.e., $\pi_1(\underline{P})$ *muni de l'action* (3.18) *est un* $\pi_0(\underline{P})$*-module à droite.*

Remark 3.19. Soit $\underline{P}_0$ la composante connexe de $1 \in \pi_0(\underline{P})$, i.e., la sous-catégorie pleine du $\underline{P}$ des objets isomorphes à $\underline{1}$: on voit alors que $\underline{P}_0$ est un grupoïde connexe *commutatif*, donc les groupes $\mathrm{Aut}(X), X \in \underline{P}_0$, sont canoniquement isomorphes entre eux, ou encore canoniquement isomorphes au groupe $\pi_1(\underline{P}) = \mathrm{Aut}(\underline{1})$. Ces isomorphismes

$$\mathrm{Aut}(\underline{1}) \to \mathrm{Aut}(X), u \mapsto fuf^{-1},$$

où $X \in \mathrm{Ob}\,\underline{P}_0$ et $f\colon \underline{1} \to X$ une flèche quelconque, coïncident avec les isomorphismes γ_X, δ_X. En effet, en vertu de la relation (2.33), nous avons

$$\gamma_{\underline{1}}(u) = \delta_{\underline{1}}(u) = u$$

pour tout $u \in \mathrm{Aut}(\underline{1})$. Puisque $(\gamma_X u)_{X \in \mathrm{Ob}\,\underline{P}_0}$ et $(\delta_X u)_{X \in \mathrm{Ob}\,\underline{P}_0}$ sont [fonctoriels?] [on a la?] commutativité des diagrammes suivantes

$$\begin{tikzcd} \underline{1} \arrow[r, "\gamma_{\underline{1}}(u)=u"] \arrow[d, "f"'] & \underline{1} \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "\gamma_X(u)"] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \underline{1} \arrow[r, "\delta_{\underline{1}}(u)=u"] \arrow[d, "f"'] & \underline{1} \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "\delta_X(u)"] & X \end{tikzcd}$$

pour toute flèche $f\colon \underline{1} \to X$, ce qui montre que γ_X, δ_X coïncident avec les isomorphismes $u \mapsto fuf^{-1}$.

3.1.3. *Structure des* Gr*-catégories.*

Definition 3.20. Soient $\underline{P}$ une Gr-catégorie, $(a, (\underline{1}, g, d))$ la contrainte AU de $\underline{P}$, $\pi_0(\underline{P})$ et $\pi_1(\underline{P})$ les groupes attachés à $\underline{P}$ dans la Définition 3.4. On construit une catégorie $\underline{S}$ dont les objets sont les éléments de $\pi_0(\underline{P})$, les morphismes sont des automorphismes. On pose pour chaque $s \in \pi_0(\underline{P})$

$$\mathrm{Aut}_{\underline{S}}(s) = \{s\} \times \pi_1(\underline{P})$$

la composition des flèches étant l'addition de $\pi_1(\underline{P})$. Pour chaque classe $s = \mathrm{cl}\,X \in \pi_0(\underline{P})$, on choisit un représentant noté X_s; et pour chaque $X \in s$, on choisit un isomorphisme $i_X\colon X_s \xrightarrow{\sim} X$, tel que

$$i_{X_s} = \mathrm{id}_{X_s}. \tag{3.21}$$

Proposition 3.22. *Le foncteur $G\colon \underline{P} \to \underline{S}$ défini par*

$$\begin{cases} G(X) = s \\ G(f) = (s, \gamma_{X_s}^{-1}(i_Y^{-1} f\, i_X)) \end{cases} \tag{3.23}$$

pour $X, Y \in s$ et $f\colon X \to Y$, est une équivalence.

Proof. D'abord, on a

$$G(\mathrm{id}_X) = (s, \gamma_{X_s}^{-1}(\mathrm{id}_{X_s})) = (s, 0)$$

et pour $h\colon Y \to Z$,

$$\begin{aligned} G(hf) &= (s, \gamma_{X_s}^{-1}(i_Z^{-1} hf i_X)) = (s, \gamma_{X_s}^{-1}(i_Z^{-1} h i_Y i_Y^{-1} f i_X)) \\ &= (s, \gamma_{X_s}^{-1}(i_Z^{-1} h i_Y) + \gamma_{X_s}^{-1}(i_Y^{-1} f i_X)) \\ &= (s, \gamma_{X_s}^{-1}(i_Z^{-1} h i_Y)) \circ (s, \gamma_{X_s}^{-1}(i_Y^{-1} f i_X)) = G(h)G(f), \end{aligned}$$

ce qui montre que G est un foncteur. Construisons un foncteur $H\colon \underline{S} \to \underline{P}$ de la manière suivante:

$$\begin{cases} H(s) = X_s \\ H(s, u) = \gamma_{X_s}^{-1}(u). \end{cases} \tag{3.24}$$

H est bien un foncteur. Par la définition de G, H; pour $X, Y \in s$ et $f\colon X \to Y$, on a

$$\begin{aligned} HG(X) &= HG(Y) = X_s \\ HG(f) &= i_Y^{-1} f i_X \\ GH(s) &= s \\ GH(s, u) &= (s, u) \end{aligned}$$

ce qui donne les isomorphismes fonctoriels

$$\begin{aligned} HG(X) &\underset{i_X}{\xrightarrow{\sim}} X \\ GH(s) &\underset{\mathrm{id}_s}{=} s \end{aligned}$$

qui, compte tenu de (3.21), vérifient bien les relations (2.175). Par conséquent G est bien une équivalence. □

Definition 3.25. Définissons une loi $\otimes$ dans la catégorie $\underline{S}$ par transport au moyen du quadruple (G, H, i, id) défini dans la Proposition 3.22, ou $G\colon \underline{P} \to \underline{S}, H\colon \underline{S} \to \underline{P}$, $HG \underset{i}{\xrightarrow{\sim}} \mathrm{id}_{\underline{P}}$, $GH \overset{\mathrm{id}}{=} \mathrm{id}_{\underline{S}}$. En vertu de la Définition 2.190, nous avons

$$s \otimes t = G(Hs \otimes Ht) = G(X_s \otimes X_t) = st. \tag{3.26}$$

Pour $(s, u)\colon s \to s, (t, v)\colon t \to t$,

$$\begin{aligned} (s, u) \otimes (t, v) &= G(H(s, u) \otimes H(t, v)) = G(\gamma_{X_s}(u) \otimes \gamma_{X_t}(v)) \\ &= (st, \gamma_{X_{st}}^{-1}(i_{X_s \otimes X_t}^{-1}(\gamma_{X_s}(u) \otimes \gamma_{X_t}(v)) i_{X_s \otimes X_t})). \end{aligned}$$

Or nous avons, d'après (2.96), (2.98) et (3.16),

$$\begin{aligned}\gamma_{X_s}(u)\otimes \mathrm{id}_{X_t} &= \gamma_{X_s\otimes X_t}(u);\\ \mathrm{id}_{X_s}\otimes \gamma_{X_t}(v) &= \delta_{X_{st}}(v)\otimes \mathrm{id}_{X_t} = \gamma_{X_s}\gamma^{-1}_{X_s}\delta_{X_s}(v)\otimes \mathrm{id}_{X_t}\\ &= \gamma_{X_s\otimes X_t}(\gamma^{-1}_{X_s}\delta_{X_s}(v)) = \gamma_{X_s\otimes X_t}(sv).\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\gamma_{X_s}(u)\otimes \gamma_{X_t}(v) &= (\gamma_{X_s}(u)\otimes \mathrm{id}_{X_t})(\mathrm{id}_{X_s}\otimes \gamma_{X_t}(v))\\ &= \gamma_{X_s\otimes X_t}(u)\gamma_{X_s\otimes X_t}(sv) = \gamma_{X_s\otimes X_t}(u+sv).\end{aligned}$$

Ce qui donne, compte tenu de la fonctorialité de $\gamma(u)$,

$$i^{-1}_{X_s\otimes X_t}(\gamma_{X_s\otimes X_t}(u+sv))i_{X_s\otimes X_t} = \gamma_{X_{st}}(u+sv).$$

D'où la formule

$$(s,u)\otimes(t,v) = (st, u+sv). \tag{3.27}$$

On voit aussitot que la loi $\otimes$ définie dans $\underline{S}$ par les formules (3.26) et (3.27) est indépendante du choix de X_s et i_X, et analogue à celle définie dans la catégorie $\underline{C}$ construite au moyen d'un groupe M et d'un M-module abélien N à gauche (Exemple 2.24). La $\otimes$-catégorie $\underline{S}$ est appelée la *$\otimes$-catégorie réduite* de la Gr-catégorie $\underline{P}$.

En vertu de la formule (2.193) posons:

$$\breve{G}_{X,Y} = G(i_X\otimes i_Y), \quad \breve{H}_{s,t} = i^{-1}_{X_s\otimes X_t} \tag{3.28}$$

ce qui fait que $((G,\breve{G}),(H,\breve{H}),i,\mathrm{id})$ est un quadruple de $\otimes$-équivalence entre $\underline{P}$ et $\underline{S}$ (Définition 2.190)

Nous avons vu que la choix de X_s pour chaque $s\in\pi_0(\underline{P})$ et de $i_X\colon X_s \xrightarrow{\sim} X$ pour chaque $X\in s$ détermine les $\otimes$-équivalences:

$$(G,\breve{G})\colon \underline{P}\to\underline{S}, (H,\breve{H})\colon \underline{S}\to\underline{P}, \quad (\text{formules } (3.23), (3.24), (3.28))$$

ce qui conduit à la définition suivante:

Definition 3.29. Soit $\underline{P}$ une Gr-catégorie. On dit qu'on a donné un *épinglage* dans $\underline{P}$ si, pour chaque classe $s\in\pi_0(\underline{P})$, on a choisi un répresentant noté X_s, et pour chaque $X\in s$, on a choisi un isomorphisme $i_X\colon X_s\xrightarrow{\sim} X$, tels que

$$X_s = \underline{1} \text{ pour } s = 1 = \mathrm{cl}(\underline{1}), i_{X_s} = \mathrm{id}_{X_s}, i_{\underline{1}\otimes X_s} = g_{X_s}, i_{X_s\otimes\underline{1}} = d_{X_s}. \tag{3.30}$$

Les $\otimes$-équivalences $(G,\breve{G})\colon \underline{P}\to\underline{S}$, $(H,\breve{H})\colon \underline{S}\to\underline{P}$ determineés par un épinglage sont appeleés des *$\otimes$-équivalences canoniques*.

Pour formuler les propositions qui suivent, nous introduisons les groupes $H^n(\pi_0(\underline{P}), \pi_1(\underline{P}))$ au sens de la cohomologie des groupes [12], i.e., les groupes de cohomologie du complexe de cochaînes

$$\dots \xrightarrow{\partial} C^n(\pi_0(\underline{P}), \pi_1(\underline{P})) \xrightarrow{\partial} C^{n+1}(\pi_0(\underline{P}), \pi_1(\underline{P})) \to \dots, \tag{3.31}$$

où le groupe $C^n(\pi_0(\underline{P}), \pi_1(\underline{P}))$ de n-cochaînes est le groupe des fonctions f de n variables s_i dans $\pi_0(\underline{P})$, et à valeurs dans $\pi_1(\underline{P})$, satisfaisant les conditions de normalisation

$$f(s_1, \dots, s_{i-1}, 1, s_{i+1}, \dots, s_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{3.32}$$

La somme de deux cochaînes f_1 et f_2 est donnée par l'addition des valeurs

$$(f_1 + f_2)(s_1, \dots, s_n) = f_1(s_1, \dots, s_n) + f_2(s_1, \dots, s_n).$$

L'homomorphisme de cobord $\partial\colon C^n(\pi_0(\underline{P}), \pi_1(\underline{P})) \xrightarrow{\partial} C^{n+1}(\pi_0(\underline{P}), \pi_1(\underline{P}))$ est définie par

$$\begin{cases} \partial f(s_1, \dots, s_{n+1}) = (-1)^{n+1}[s_1 f(s_2, \dots, s_{n+1}) + \dots \\ + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(s_1, \dots, s_i s_{i+1}, \dots, s_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(s_1, \dots, s_n)] \end{cases} \tag{3.33}$$

Nous notons $Z^n(\pi_0(\underline{P}), \pi_1(\underline{P}))$ le groupe de n-cocycles et $B^n(\pi_0(\underline{P}), \pi_1(\underline{P}))$ le groupe des n-cobords. Enfin la valeur prise par une n-cochaîne f en $(s_1, \dots, s_n)$ est notée soit $f(s_1, \dots, s_n)$, soit $f_{s_1,\dots,s_n}$.

Revenons à la $\otimes$-catégorie réduite $\underline{S}$ de la Gr-catégorie $\underline{P}$. Pour des raisons de commodité, nous notons des fois les flèches $(s, u)\colon s \to s$ de $\underline{S}$ par u simplement si aucune confusion n'est à craindre.

Proposition 3.34. *Soient $\underline{P}$ une* Gr-*catégorie, a sa contrainte d'associativité, $\underline{S}$ sa $\otimes$-catégorie réduite, (X_s, i_X) un épinglage dans $\underline{P}$, $(H, \check{H})\colon \underline{S} \to \underline{P}$ la $\otimes$-équivalence canonique correspondante. Alors la contrainte d'associativité ξ pour $\underline{S}$ défini par le diagramme commutatif suivant*

$$\begin{tikzcd} X_r \otimes (X_s \otimes X_t) \arrow[d, "a_{X_r,X_s,X_t}"'] & X_r \otimes X_{st} \arrow[l, "\mathrm{id} \otimes i_{X_s \otimes X_t}"'] & X_{rst} \arrow[l, "i_{X_r \otimes X_{st}}"'] \arrow[d, "H(\xi_{r,s,t}) = \gamma_{X_{rst}}(\xi_{r,s,t})"] \\ (X_r \otimes X_s) \otimes X_t & X_{rs} \otimes X_t \arrow[l, "i_{X_r \otimes X_s} \otimes \mathrm{id}"'] & X_{rst} \arrow[l, "i_{X_{rs} \otimes X_t}"'] \end{tikzcd} \tag{3.35}$$

est un 3-*cocycle normalisé de $\pi_0(\underline{P})$ à valeurs dans le $\pi_0(\underline{P})$-module $\pi_1(\underline{P})$, i.e., $\xi \in Z^3(\pi_0(\underline{P}), \pi_1(\underline{P}))$.*

Proof. Remarquons tout d'abord que ξ déterminé par (3.35) n'est autre que la contrainte d'associativité $H^*(a)$ induite par $(H, \check{H})$ (Définition 2.184), en tenant compte de la formule (3.28) donnant les valeurs de $\check{H}$. ξ étant une contrainte d'associativité pour $\underline{S}$, on peut donc le considérer comme un 3-cocycle de $\pi_0(\underline{P})$ à valeurs dans le $\pi_0(\underline{P})$-module $\pi_1(\underline{P})$ (Exemple 2.24). Montrons que ξ est normalisé.

D'abord pour $r = 1$, nous considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\underline{1} \otimes (X_s \otimes X_t) \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\text{(I)}"] & \underline{1} \otimes X_{st} \arrow[l, "\mathrm{id} \otimes i_{X_s \otimes X_t}"'] \arrow[d, phantom, "\text{(II)}"] & X_{st} \arrow[l, "g_{X_{st}}"'] \arrow[d, "\gamma_{X_{st}}(\xi_{1,s,t})"] \arrow[dl, phantom, "\text{(III)}"] \\
(\underline{1} \otimes X_s) \otimes X_t & X_s \otimes X_t \arrow[l, "g_{X_s} \otimes \mathrm{id}"'] \arrow[ul, "g_{X_s \otimes X_t}"'] & X_{st} \arrow[l, "i_{X_s \otimes X_t}"'] \arrow[ul, "g_{X_{st}}"']
\end{tikzcd}$$

dont le circuit extérieur n'est autre que le diagramme commutatif (3.35) avec $r = 1$, et dont la région (I) est commutative en vertu de la compatibilité entre a et $(\underline{1}, g, d)$ (Définition 2.68), et la région (II) en vertu de la fonctorialité de g. On en déduit la commutativité de (III), ce qui donne $\xi_{1,s,t} = 0$.

Pour $s = 1$ et $t = 1$, nous avons respectivement les diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{tikzcd}
X_r \otimes (\underline{1} \otimes X_t) \arrow[d, "a"'] & X_r \otimes X_t \arrow[l, "\mathrm{id} \otimes g_{X_t}"'] \arrow[d, equal] & X_{rt} \arrow[l, "i_{X_r \otimes X_t}"'] \arrow[d, "\gamma_{X_{rt}}(\xi_{r,1,t})"] \\
(X_r \otimes \underline{1}) \otimes X_t & X_r \otimes X_t \arrow[l, "d_{X_r} \otimes \mathrm{id}"'] & X_{rt} \arrow[l, "i_{X_r \otimes X_t}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X_r \otimes (X_s \otimes \underline{1}) \arrow[d, "a"'] & X_r \otimes X_s \arrow[l, "\mathrm{id} \otimes d_{X_s}"'] \arrow[dl, "d_{X_r \otimes X_s}"'] & X_{rs} \arrow[l, "i_{X_r \otimes X_s}"'] \arrow[dl, "d_{X_{rs}}"'] \arrow[d, "\gamma_{X_{rs}}(\xi_{r,s,1})"] \\
(X_r \otimes X_s) \otimes \underline{1} & X_{rs} \otimes \underline{1} \arrow[l, "i_{X_r \otimes X_s} \otimes \mathrm{id}"'] & X_{rs}, \arrow[l, "d_{X_{rs}}"']
\end{tikzcd}$$

qui nous donnent $\xi_{r,1,t} = \xi_{r,s,1} = 0$. $\square$

Proposition 3.36. *Les hypothèses étant celles de la Proposition* 3.34*, on considère en plus la $\otimes$-équivalence canonique $(G, \check{G})\colon \underline{P} \to \underline{S}$. Alors la $\otimes$-catégorie $\underline{S}$ munie de la contrainte d'associativité ξ défini dans la Proposition* 3.34 *et de la contrainte d'unité* $(\underline{1}, \mathrm{id}, \mathrm{id})$ *est une* Gr*-catégorie; et les $\otimes$-foncteurs $(G, \check{G}), (H, \check{H})$ sont des $\otimes$-foncteurs compatibles avec les contraintes d'associativité a, ξ et les contraintes d'unité $(\underline{1}, g, d), (\underline{1}, \mathrm{id}, \mathrm{id})$.*

Proof. Comme on a remarqué dans la démonstration de la Proposition 3.34, ξ n'est autre que la contrainte d'associativité $H^*(a)$ induite par $(H, \check{H})$. Donc $(H, \check{H})$ est compatible avec a, ξ; et par conséquent il en est de même de $(G, \check{G})$ (Proposition 2.180). Quant à la contrainte d'unité $(\underline{1}, \mathrm{id}, \mathrm{id})$, elle est celle définie par la quadruple de $\otimes$-équivalence $((G,\breve{G}),(H,\breve{H}),i,\mathrm{id})$ (Proposition 2.187), compte tenu des formules (3.23), (3.24), (3.28), (3.30). Donc $(G,\breve{G})$ est compatible avec $(\underline{1},g,d),(\underline{1},\mathrm{id},\mathrm{id})$ (Proposition 2.187) et il en est de même de $(H,\breve{H})$ (Proposition 2.182). $(\xi,(\underline{1},\mathrm{id},\mathrm{id}))$ est bien une contrainte AU pour la $\otimes$-catégorie $\underline{S}$ en remarquant que ξ est normalisé et en se rappellant la condition de compatibilité donnée dans la formule (2.92) au cas où ξ est normalisé. Enfin la $\otimes$-catégorie AU $\underline{S}$ est une Gr-catégorie, soit en remarquant que $\pi_0(\underline{P})$ et le produit semi-direct $\pi_0(\underline{P}).\pi_1(\underline{P})$ sont des groupes, soit en appliquant la Proposition 3.3. $\square$

D'après la proposition 3.34, la contrainte d'associativité ξ définie par le diagramme commutatif (3.35) pour la $\otimes$-catégorie $\underline{S}$ est un 3-cocycle. Regardons maintenant ce que devient ξ pour un changement d'épinglage.

Proposition 3.37. *Par un changement d'épinglage de $\underline{P}$, le 3-cocycle ξ est changé en un 3-cocycle ξ', différent de ξ par un cobord $\partial\beta$, $\beta \in C^2(\pi_0(\underline{P}),\pi_1(\underline{P}))$.*

Proof. Soient $(X_s,i_X),(X'_s,i'_X)$ deux épinglagles de $\underline{P}$ et soient $(G,\breve{G}),(H,\breve{H}),\xi$, $(G',\breve{G}'),(H',\breve{H}'),\xi'$ les $\otimes$-équivalences canoniques et les contraintes d'associativité correspondantes. D'après la Proposition 3.36, $(G,\breve{G})$ et $(H,\breve{H})$ sont compatibles avec les contraintes d'associativité a et ξ; $(G',\breve{G}')$ et $(H',\breve{H}')$ sont compatibles avec les contraintes d'associativité a et ξ'. En vertu des formules (3.23), (3.24) et de la fonctorialité de $\gamma_X(u)$ en X, nous avons

$$(G',\breve{G}')\circ(H,\breve{H}) = (\mathrm{id}_{\underline{S}},(\breve{G'H}))\colon \underline{S}\to\underline{S}.$$

D'autre part, en vertu de Proposition 2.142, le $\otimes$-foncteur composé

$$(\mathrm{id}_{\underline{S}},(\breve{G'H}))\colon (\underline{S},\xi)\to(\underline{S},\xi')$$

est compatible avec les contraintes d'associativité ξ,ξ'; d'où $\xi' = \xi + \partial\beta$, avec $\beta = (\breve{G'H})$. On vérifie aussitôt que β est une 2-cochaîne normalisé à l'aide des formules (3.28), (3.30) et de la fonctorialité de g et d. $\square$

Pour un épinglage donné (X_s,i_X) de $\underline{P}$, nous avons construit les foncteurs G et H au moyen des isomorphismes γ_X. On peut aussi bien le faire avec les isomorphismes δ_X. On obtient des résultats analogues, à savoir

Proposition 3.38. *Les foncteurs $D\colon \underline{P}\to\underline{S}$ et $K\colon\underline{S}\to\underline{P}$ définis par*

$$\begin{cases} D(X) = s \\ D(f) = (s,\delta_{X_s}^{-1}(i_Y^{-1}\,f\,i_X)) \end{cases} \tag{3.39}$$

pour $X, Y \in s, f\colon X \to Y$, *et*

$$\begin{cases} K(s) = X_s \\ K((s,u)) = \delta_{X_s}(u) \end{cases} \tag{3.40}$$

vérifient

$$\begin{array}{rcl} KD(X) & \underset{i_X}{\overset{\sim}{\to}} & X \\ DK(s) & \underset{\mathrm{id}_S}{=} & s. \end{array}$$

Definition 3.41. Munissons $\underline{S}$ de la loi $\otimes$ obtenu par transport de la loi $\otimes$ dans $\underline{P}$ au moyen de (D, K, i, id). En vertu de la formule (2.191) nous avons

$$\begin{array}{rcl} s \otimes t & = & D(Ks \otimes Kt) = D(X_s \otimes X_t) = st \\ (s,u) \otimes (t,v) & = & D(K(s,u) \otimes K(t,v)) = D(\delta_{X_s}(u) \otimes \delta_{X_t}(v)) \\ & = & (st, \delta^{-1}_{X_{st}}(i^{-1}_{X_s \otimes X_t}(\delta_{X_s}(u) \otimes \delta_{X_t}(v))\, i_{X_s \otimes X_t})). \end{array}$$

Or, d'après les formules (2.97), (2.98) et (3.18),

$$\begin{array}{rcl} \delta_{X_s}(u) \otimes \mathrm{id}_{X_t} & = & \mathrm{id}_{X_s} \otimes \gamma_{X_t}(u) = \mathrm{id}_{X_s} \otimes \delta_{X_t}\delta^{-1}_{X_t}\gamma_{X_t}(u) \\ & = & \delta_{X_s \otimes X_t}(\delta^{-1}_{X_s}\gamma_{X_t}(u)) = \delta_{X_s \otimes X_t}(ut) \end{array}$$

et

$$\mathrm{id}_{X_s} \otimes \delta_{X_t}(v) = \delta_{X_s \otimes X_t}(v).$$

Par conséquent

$$\begin{array}{rcl} \delta_{X_s}(u) \otimes \delta_{X_t}(v) = (\delta_{X_s}(u) \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \delta_{X_t}(v)) & = & \delta_{X_s \otimes X_t}(ut)\delta_{X_s \otimes X_t}(v) \\ & = & \delta_{X_s \otimes X_t}(ut + v). \end{array}$$

Donc

$$(s,u) \otimes (t,v) = (st, ut + v). \tag{3.42}$$

On peut dire ici que le produit tensoriel des flèches dans $\underline{S}$ est le produit du produit semi-direct $\pi_0(\underline{P}).\pi_1(\underline{P})$, où $\pi_1(\underline{P})$ est un $\pi_0(\underline{P})$-module à droite. On peut munir la $\otimes$-catégorie $\underline{S}$ ainsi définie de la contrainte $H^*(a)$ induite par $(H, \check{H})$, mais $H^*(a)$ n'est pas un 3-cocycle au sens de la cohomologie des groupes habituelle comme on peut vérifier aussitôt avec la formule (3.42). C'est pour cette raison que désormais les foncteurs G et H son construits au moyen des isomorphismes γ_X, et quand on parle du $\pi_0(\underline{P})$-module $\pi_1(\underline{P})$, c'est du $\pi_0(\underline{P})$-module à gauche dont l'action est définie par la formule (3.16)

Proposition 3.43. *Soient* $\underline{P}, \underline{P}'$ *deux* Gr*-catégories,* $(\underline{1}, g, d), (\underline{1}', g', d')$ *les contraintes d'unité pour* $\underline{P}, \underline{P}'$ *respectivement. Soit* $(F, \check{F})$ *un* $\otimes$*-foncteur associatif de*

$\underline{P}$ dans $\underline{P}'$. Alors le $\otimes$-foncteur $(F, \breve{F})$ détermine des homomorphismes, appelés homomorphismes induits *par $(F, \breve{F})$:*

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{F} & : & \mathrm{cl}\, X \mapsto \mathrm{cl}\, FX \\ \mathring{F} & : & u \mapsto \gamma_{F\underline{1}}^{-1}(Fu), \end{array}$$

de $\pi_0(\underline{P})$ dans $\pi_0(\underline{P}')$ et de $\pi_1(\underline{P})$ dans $\pi_1(\underline{P}')$ respectivement, ces homomorphismes respectant les actions de $\pi_0(\underline{P})$ sur $\pi_1(\underline{P})$ et de $\pi_0(\underline{P}')$ sur $\pi_1(\underline{P}')$, c'est à dire

$$\mathring{F}(su) = \widetilde{F}(s)\mathring{F}(u). \tag{3.44}$$

En plus, F est une équivalence si et seulement si $\widetilde{F}$ et $\mathring{F}$ sont des isomorphismes.

Proof. D'abord on a

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{F}(\mathrm{cl}\, X \otimes \mathrm{cl}\, Y) & = & \widetilde{F}(\mathrm{cl}\,(X \otimes Y)) = \mathrm{cl}\, F(X \otimes Y) = \mathrm{cl}\,(FX \otimes FY) \\ & = & \mathrm{cl}\, FX \otimes \mathrm{cl}\, FY = \widetilde{F}(\mathrm{cl}\, X) \otimes \widetilde{F}(\mathrm{cl}\, Y), \end{array}$$

ce qui montre que $\widetilde{F}$ est un homomorphisme. On vérifie aussitôt que $\mathring{F}$ est un homomorphisme en vertu du fait que F est un foncteur et $\gamma_{F\underline{1}}$ un isomorphisme.

Pour démontrer (3.44), remarquons qu'on a une flèche $\widehat{F}\colon \underline{1} \to F\underline{1}$ venant du fait que $(F, \breve{F})$ est aussi compatible avec les unités (Proposition 3.2). Ensuite considérons les diagrammes suivants

$$\begin{tikzcd}
\underline{1}' \otimes FX \arrow[r, "\gamma_{FX}^{-1}(F\delta_X u)\otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & \underline{1}' \otimes FX \arrow[d, equal] \\
\underline{1}' \otimes FX \arrow[r, "\gamma_{F\underline{1}}^{-1}(F\gamma_X^{-1}\delta_X u)\otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\widehat{F}\otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & \underline{1}' \otimes FX \arrow[d, "\widehat{F}\otimes \mathrm{id}"'] \\
F\underline{1} \otimes FX \arrow[r, "F\gamma_X^{-1}\delta_X u \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\breve{F}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & F\underline{1} \otimes FX \arrow[d, "\breve{F}"'] \\
F(\underline{1} \otimes X) \arrow[r, "F(\gamma_X^{-1}\delta_X u \otimes \mathrm{id})"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IV})"] & F(\underline{1} \otimes X) \\
FX \arrow[r, "F(\delta_X u)"] \arrow[u, "Fg_X"] \arrow[uuuu, bend left=60, "g'_{FX}"] \arrow[uuuu, phantom, bend left=30, "(\mathrm{V})"] & FX \arrow[u, "Fg_X"'] \arrow[uuuu, bend right=60, "g'_{FX}"'] \arrow[uuuu, phantom, bend right=30, "(\mathrm{VI})"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[rr, "\delta_{FX}(\gamma_{F\underline{1}}^{-1}Fu)"] \arrow[d, equal] & & FX \arrow[d, equal] \\
FX \arrow[rr, "F(\delta_X u)"] \arrow[d, "Fd_X"] \arrow[urr, phantom, "(\mathrm{VII})"] & & FX \arrow[d, "Fd_X"'] \\
F(X\otimes\underline{1}) \arrow[rr, "F(\mathrm{id}\otimes u)"] \arrow[urr, phantom, "(\mathrm{VIII})"] & & F(X\otimes\underline{1}) \\
FX\otimes F\underline{1} \arrow[rr, "\mathrm{id}\ \otimes Fu"] \arrow[u, "\check{F}"'] \arrow[urr, phantom, "(\mathrm{IX})"] & & FX\otimes F\underline{1} \arrow[u, "\check{F}"] \\
FX\otimes\underline{1}' \arrow[rr, "\mathrm{id}\otimes\gamma_{F\underline{1}}^{-1}(Fu)"] \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\widehat{F}"'] \arrow[uuuu, bend left=60, "d'_{FX}"] \arrow[urr, phantom, "(\mathrm{X})"] & & FX\otimes\underline{1}' \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\widehat{F}"] \arrow[uuuu, bend right=60, "d'_{FX}"']
\end{tikzcd}$$

$$(\mathrm{XI}) \qquad (\mathrm{XII})$$

dont la commutativité des régions (II) et (X) résulte de la relation $\gamma_{\underline{1}}(u) = u$ et de la fonctorialité de γ; celle de (III) et (IX) de la fonctorialité de $\check{F}$; celle de (IV), (VIII) et des deux circuits extérieurs de la définition de γ et δ (diagramme (2.32)); celle de (V), (VI), (XI), (XII) de la compatibilité de $(F, \check{F})$ avec les unités $(\underline{1}, g, d), (\underline{1}', g', d')$. On en déduit la commutativité de (I) et (VII), qui donne, compte tenu du fait que FX est régulier,

$$\begin{aligned}
\gamma_{F\underline{1}}^{-1}(F\gamma_X^{-1}\delta_X u) &= \gamma_{FX}^{-1}(F\delta_X u) \\
F(\delta_X u) &= \delta_{FX}(\gamma_{F\underline{1}}^{-1}Fu).
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\gamma_{F\underline{1}}^{-1}(F\gamma_X^{-1}\delta_X u) = \gamma_{FX}^{-1}\delta_{FX}(\gamma_{F\underline{1}}^{-1}Fu)$$

ou, en posant

$$s = \mathrm{cl}\, X, \quad s' = \mathrm{cl}\, FX = \widetilde{F}(s)$$

et en tenant compte de la relation $\gamma_X^{-1}\delta_X(u) = su$, on obtient (3.44). On vérifie aussitôt que $\widetilde{F}$ et $\mathring{F}$ sont des isomorphismes si et seulement si le foncteur F est une équivalence. $\square$

Nous allons maintenant considérer les Gr-catégories ayant le même type, plus précisément:

Definition 3.45. Soit M un groupe, N un M-module abélien à gauche. Un *préépinglage de type* (M, N) pour une Gr-catégorie $\underline{P}$ es une couple $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ d'isomorphismes

$$\varepsilon_0 \colon M \xrightarrow{\sim} \pi_0(\underline{P}); \quad \varepsilon_1 \colon N \xrightarrow{\sim} \pi_1(\underline{P})$$

compatibles avec les actions de M dans N et de $\pi_0(\underline{P})$ sur $\pi_1(\underline{P})$, i.e., $\varepsilon_1(su) = \varepsilon_0(s)\varepsilon_1(u)$. Une Gr-catégorie préépinglée de type (M,N) est une Gr-catégorie $\underline{P}$ munie d'un préépinglage. Un *morphisme* de Gr-catégories préépinglées de type (M,N), $(\underline{P},\varepsilon) \to (\underline{P}',\varepsilon')$, est un $\otimes$-foncteur associatif $(F,\check{F})\colon \underline{P} \to \underline{P}'$ tel que les triangles

$$\begin{tikzcd} \pi_0(\underline{P}) \arrow[rr, "\widetilde{F}"] & & \pi_0(\underline{P}') \\ & M \arrow[ul, "\varepsilon_0"] \arrow[ur, "\varepsilon_0'"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi_1(\underline{P}) \arrow[rr, "\mathring{F}"] & & \pi_1(\underline{P}') \\ & N \arrow[ul, "\varepsilon_1"] \arrow[ur, "\varepsilon_1'"'] & \end{tikzcd} \tag{3.46}$$

soient commutatifs, $\widetilde{F}$ et $\mathring{F}$ étant les homomorphismes induits par F. On en déduit que tout tel morphisme est une $\otimes$-équivalence (Proposition 3.43), donc l'ensemble des classes d'équivalence de Gr-catégories préépinglées de type (M,N) est égal à l'ensemble des composantes connexes de la catégorie des Gr-catégories préépinglées de type (M,N).

Proposition 3.47. *Il y a une bijection canonique entre l'ensemble des classes d'équi-valence de* Gr-*catégories préépinglées de type* (M,N) *et l'ensemble* $H^3(M,N)$ *des* 3-*cocycles normalisés de* M *à valeurs dans* N *modulo cobord.*

Proof. Soient $(\underline{P},\varepsilon)$ une Gr-catégorie préépinglée de type (M,N) et (X_s,i_X) un épinglage de $\underline{P}$. Soient $\underline{S}$ la $\otimes$-catégorie réduite de $\underline{P}$, $(G,\check{G})\colon \underline{P} \to \underline{S}$, $(H,\check{H})\colon \underline{S} \to \underline{P}$ les $\otimes$-équivalences canoniques déterminées par l'épinglage (X_s,i_X). Soit ξ la contrainte d'associativité induite par $(H,\check{H})$ pour la $\otimes$-catégorie $\underline{S}$. Enfin soit $\underline{T}$ la $\otimes$-catégorie construite à partir du groupe M et du M-module N (Example 2.3(5)). Le couple d'isomorphismes $\varepsilon = (\varepsilon_0,\varepsilon_1)$ donne les applications

$$\begin{aligned} \operatorname{Ob}\underline{T} &\to \operatorname{Ob}\underline{S},\ s \mapsto \varepsilon_0 s \\ \operatorname{Fl}\underline{T} &\to \operatorname{Fl}\underline{S},\ (s,u) \mapsto (\varepsilon_0 s, \varepsilon_1 u), \end{aligned}$$

qui détermine un foncteur noté aussi ε de la catégorie $\underline{T}$ dans la catégorie $\underline{S}$. Ce foncteur est un isomorphisme puisque les applications $\varepsilon_0,\varepsilon_1$ sont des bijections. En outre le couple $(\varepsilon,\breve{\varepsilon} = \mathrm{id})$ constitue un $\otimes$-foncteur de la $\otimes$-catégorie $\underline{S}$ en vertu du fait que les isomorphismes $\varepsilon_0,\varepsilon_1$ sont compatibles avec les actions de M sur N et de $\pi_0(\underline{P})$ sur $\pi_1(\underline{P})$. Le $\otimes$-foncteur $(\varepsilon,\mathrm{id})$ induit les contraintes d'associativité $\alpha = \varepsilon_1^{-1}(\xi)$ et d'unité $(\underline{1},\mathrm{id},\mathrm{id})$ sur $\underline{T}$, qui sont compatibles (Example 2.91(2)). $\underline{T}$ devient une Gr-catégorie et $(\varepsilon,\mathrm{id})$ un $\otimes$-foncteur associatif dont l'inverse est le $\otimes$-foncteur associatif $(\varepsilon^{-1},\mathrm{id})$, où ε^{-1} est déterminé par les isomorphismes $\varepsilon_0^{-1},\varepsilon_1^{-1}$.

Donc à chaque Gr-catégorie préépinglée $(\underline{P},\varepsilon)$ de type (M,N) nous avons fait correspondre un 3-cocycle $\alpha \in Z^3(M,N)$. Un changement d'épinglage de $\underline{P}$ fait varier α d'un cobord, i.e., α est changé en $\alpha + \partial\beta$, ou $\beta \in C^2(M,N)$.

Soit $(\underline{P}', \varepsilon')$ une autre Gr-catégorie préépinglée de type (M, N) et soit α' le 3-cocycle correspondant. Démontrons que α et α' sont cohomologues si et seulement s'il existe un morphisme $(F, \breve{F})\colon (\underline{P}, \varepsilon) \to (\underline{P}', \varepsilon')$ de Gr-catégories préépinglées de type (M, N). Supposons qu'il existe $(F, \breve{F})\colon (\underline{P}, \varepsilon) \to (\underline{P}', \varepsilon')$. Soit $\underline{S}'$ la $\otimes$-catégorie réduite de $\underline{P}'$. Considérons un épinglage de $\underline{P}'$ qui détermine les $\otimes$-équivalences canoniques $(G', \breve{G}')\colon \underline{P}' \to \underline{S}', (H', \breve{H}')\colon \underline{S}' \to \underline{P}'$ et les contraintes d'associativité ξ', $\alpha' = (\varepsilon_1')^{-1}(\xi')$ pour $\underline{S}'$ et $\underline{T}'$ respectivement. Alors le couple d'isomorphismes $(\widetilde{F}, \mathring{F})$ induits par $(F, \breve{F})$ (Proposition 3.43) détermine un foncteur $\mathcal{F}\colon \underline{S} \to \underline{S}'$ qui est manifestement un isomorphisme. Considérons le $\otimes$-foncteur composé

$$(G', \breve{G}') \circ (F, \breve{F}) \circ (H, \breve{H}) = (G'FH, (G'\breve{F}H))\colon \underline{S} \to \underline{S}'.$$

En vertu de la Proposition 2.142, $(G'FH, (G'\breve{F}H))$ est un $\otimes$-foncteur compatible avec les contraintes d'associativité ξ, ξ' de $\underline{S}$ et $\underline{S}'$ respectivement. En outre, on vérifie aussitôt que le foncteur $G'FH$ n'est autre que le foncteur $\mathcal{F}$. Posons $\breve{\mathcal{F}} = (G'\breve{F}H)$. D'autre part

$$(\mathcal{G}, \breve{\mathcal{G}}) = ((\varepsilon')^{-1}, \mathrm{id}) \circ (\mathcal{F}, \breve{\mathcal{F}}) \circ (\varepsilon, \mathrm{id})\colon (\underline{T}, \alpha) \to (\underline{T}, \alpha')$$

est aussi un $\otimes$-foncteur compatible avec les contraintes d'associativité α, α'. Or d'après la Définition 3.45, $\mathcal{G} = \mathrm{id}_{\underline{T}}$, donc on peut écrire

$$\alpha' = \alpha + \partial\breve{\mathcal{G}},$$

$\breve{\mathcal{G}}$ étant considérée comme une 2-cochaîne de M à valeurs dans N. Pour avoir $\breve{\mathcal{G}}$ normalisée, il suffit de prendre un épinglage (X_s', i_X') de $\underline{P}'$ tel que $i'_{F\underline{1}} = \widehat{F}\colon \underline{1}' \to F\underline{1}$, $\widehat{F}$ étant défini par le diagramme commutatif (2.161). Inversement supposons α et α' cohomologues. Ceci veut dire (Remarque 2.143) qu'il existe un $\otimes$-foncteur

$$(\mathcal{G}, \breve{\mathcal{G}})\colon (\underline{T}, \alpha) \to (\underline{T}, \alpha') \qquad \text{avec } \mathcal{G} = \mathrm{id}_{\underline{T}}$$

compatible avec les contraintes d'associativité α, α'. Posons

$$(\mathcal{F}, \breve{\mathcal{F}}) = (\varepsilon', \mathrm{id}) \circ (\mathcal{G}, \breve{\mathcal{G}}) \circ (\varepsilon^{-1}, \mathrm{id})\colon \underline{S} \to \underline{S}'. \tag{3.48}$$

$(\mathcal{F}, \breve{\mathcal{F}})$ est bien un $\otimes$-foncteur associatif et de plus $\mathcal{F}$ est un isomorphisme. Nous obtenons une $\otimes$-équivalence $(F, \breve{F})\colon \underline{P} \to \underline{P}'$ compatible avec les contraintes d'associativité de $\underline{P}$ et $\underline{P}'$ en posant

$$(F, \breve{F}) = (H', \breve{H}') \circ (\mathcal{F}, \breve{\mathcal{F}}) \circ (G, \breve{G}).$$

Montrons que $(F, \breve{F})$ est un morphisme de Gr-catégories préépinglées de type (M, N). D'après la définition ci-dessus de $(F, \breve{F})$, on peut écrire

$$(G', \breve{G}') \circ (F, \breve{F}) \circ (H', \breve{H}') = (G', \breve{G}') \circ (H', \breve{H}') \circ (\mathcal{F}, \breve{\mathcal{F}}) \circ (G, \breve{G}) \circ (H, \breve{H})$$

ce qui donne

$$G'FH = G'H'\mathcal{F}GH$$

ou en remarquant que $GH = \mathrm{id}_{\underline{S}}$, $G'H' = \mathrm{id}_{\underline{S'}}$,

$$G'FH = \mathcal{F}$$

ce qui permet de conclure que le couple d'isomorphismes $(\widetilde{F}, \mathring{F})$

$$\widetilde{F} \colon \pi_0(\underline{P}) \to \pi_0(\underline{P'}), \qquad \mathring{F} \colon \pi_1(\underline{P}) \to \pi_1(\underline{P'})$$

induits par F constitue le foncteur $\mathcal{F}$. Enfin on a bien les triangles commutatifs (3.46), en vertu de la relation (3.48).

Nous avons donc démontré qu'il y a une injection entre l'ensembles des classes d'équivalence de Gr-catégories préépinglées de type (M, N) et l'ensemble $H^3(M, N)$. Montrons que cette injection est en plus surjective. Soit $\alpha \in Z^3(M, N)$. La $\otimes$-catégorie $\underline{T}$ munie de la contrainte d'associativité α, de la contrainte d'unité $(\underline{1}, \mathrm{id}, \mathrm{id})$ et du préépinglage $\varepsilon = (\mathrm{id}_M, \mathrm{id}_N)$ est en effet une Gr-catégorie préépinglée de type (M, N) dont le 3-cocycle correspondant est bien α, ce qui achève la démonstration.

□

L'élément de $H^3(M, N)$ qui correspond à la catégorie $(\underline{P}, \varepsilon)$ est noté $\zeta_{(\underline{P},\varepsilon)}$.

Example 3.49. Soit $\underline{P}$ la $\otimes$-catégorie définie dans Exemple 2.3(3). $\underline{P}$ est une Gr-catégorie et on a $\pi_0(\underline{P}) = \pi_1(X, x_0), \pi_1(\underline{P}) = \pi_2(X, x_0)$. L'action de $\pi_0(\underline{P})$ dans $\pi_1(\underline{P})$ est l'action usuelle de $\pi_1(X)$ dans $\pi_2(X)$, et l'invariant $\zeta_{(\underline{P},\mathrm{id})} \in H^3(\pi_0(\underline{P}), \pi_1(\underline{P}))$ n'est autre que l'invariant du Postnikov, où id signifie le couple d'isomorphismes $(\mathrm{id}_{\pi_0(\underline{P})}, \mathrm{id}_{\pi_1(\underline{P})})$.

3.2. Pic-**catégories.**

3.2.1. *Définition des* Pic-*catégories.*

Definition 3.50. Une Pic-*catégorie* est une Gr-catégorie munie d'une contrainte de commutativité compatible avec sa contrainte d'associativité. Une Pic-catégorie est dite *stricte* si sa contrainte de commutativité est stricte (Définition 2.23).

Examples 3.51.

(1) Soient A un anneau commutatif unitaire, $\underline{P}$ une catégorie dont les objets sont les A-modules projectifs de rang un et dont les flèches entre ces objets sont les isomorphismes de A-modules. La catégorie $\underline{P}$ munie du produit tensoriel de A-modules est une $\otimes$-catégorie. On vérifie aussitôt que $\underline{P}$ est

une Pic-catégorie, les contraintes d'associativité, commutativité, unités étant les contraintes usuelles.

(2) Reprenons l'Exemple 2.3(4). Soient $\underline{C}$ une catégorie additive, $\underline{E}$ une catégorie cofibrée sur $\underline{C}$. Pour tout objet A de $\underline{C}$, la fibre de $\underline{E}$ en A est noté $\underline{E}(A)$. L'homomorphisme somme

$$A \times A \to A$$

dans $\underline{C}$ donne naissance à un foncteur

$$\underline{E}(A) \times \underline{E}(A) \to \underline{E}(A)$$

qui fait de $\underline{E}(A)$ une $\otimes$-catégorie. Le foncteur $\underline{E}(0) \to \underline{E}(A)$, déduit de l'unique morphisme $0 \to A$, définit dans $\underline{E}(A)$ un objet θ_A, unique à isomorphisme unique près, comme image d'un élément arbitraire de la catégorie $\underline{E}(0)$ équivalente à une catégorie ponctuelle. Les propriétés d'associativité et de commutativité connues pour l'homomorphisme somme $A \times A \to A$, et celles de l'objet nul vis à vis de cet homomorphisme, permettent alors de définir des isomorphismes canoniques de foncteurs

$$\begin{cases} X \otimes (Y \otimes Z) & \simeq & (X \otimes Y) \otimes Z \\ X \otimes Y & \simeq & Y \otimes X \\ X \otimes \theta_A & \simeq & \theta_A \otimes X \simeq X \end{cases}$$

pour $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}\,\underline{E}(A)$. On peut vérifier que ces isomorphismes fonctoriels constituent une contrainte ACU pour la $\otimes$-catégorie $\underline{E}(A)$ et que la catégorie $\underline{E}(A)$ est un grupoïde. Enfin le foncteur

$$X \mapsto X^{-1} \colon \underline{E}(A) \to \underline{E}(A)$$

déduit par changement de base de l'homomorphisme

$$\mathrm{id}_A \colon A \to A$$

donne lieu à l'isomorphisme canonique

$$X \otimes X^{-1} \simeq \theta_A$$

qui montre que tous les objets de $\underline{E}(A)$ sond inversibles. Les fibres $\underline{E}(A)$ sont donc des Pic-catégories. Pour une fléche $u \colon A \to B$ de $\underline{C}$, le foncteur $u_* \colon \underline{E}(A) \to \underline{E}(B)$ avec l'isomorphisme canonique de bifoncteurs

$$u_*(X) \otimes u_*(Y) \simeq u_*(X \otimes Y)$$

constitue un $\otimes$-foncteur compatible avec les contraintes d'associativité et de commutativité.

Proposition 3.52. *Soit* $\underline{P}$ *une* Pic-*catégorie et soient* $\pi_0(\underline{P}), \pi_1(\underline{P})$ *le groupe et le* $\pi_0(\underline{P})$*-module respectivement attachés à* $\underline{P}$*, considéré comme une* Gr-*catégorie (Définition* 3.4 *et Proposition* 3.17*). Alors le groupe* $\pi_0(\underline{P})$ *est commutatif et agit trivialment sur* $\pi_1(\underline{P})$*.*

Proof. Nous avons, en vertu de la contrainte de commutativité,

$$\operatorname{cl} X \otimes \operatorname{cl} Y = \operatorname{cl}(X \otimes Y) = \operatorname{cl}(Y \otimes X) = \operatorname{cl} Y \otimes \operatorname{cl} X$$

pour tous les objets X, Y de $\underline{P}$, d'où la commutativité du groupe $\pi_0(\underline{P})$. Enfin l'égalité $\gamma_X = \delta_X$ pour tout $X \in \operatorname{Ob} \underline{P}$ (2.104) montre que $\pi_0(\underline{P})$ agit trivialement sur $\pi_1(\underline{P})$ (Proposition 3.17).

En vertu de la commutativité du groupe $\pi_0(\underline{P})$, la loi de composition de $\pi_0(\underline{P})$ est donc noté additivement avec $0 = \operatorname{cl} \underline{1}$. Soit $\underline{S}$ la $\otimes$-catégorie réduite de $\underline{P}$ considéré comme une Gr-catégorie (Définition 3.25). La loi $\otimes$ défini dans $\underline{S}$ (Définition 3.25) s'exprime ici par

$$\begin{cases} s \otimes t &= s + t \\ (s,u) \otimes (t,v) &= (s+t, u+v) \end{cases} \tag{3.53}$$

□

Proposition 3.54. *Soient* $\underline{P}$ *une* Pic-*catégorie,* $(a, c, (\underline{1}, g, d))$ *sa contrainte* ACU*,* $\underline{S}$ *la* $\otimes$*-catégorie réduite de* $\underline{P}$*,* (X_s, i_X) *un épinglage de* $\underline{P}$*,* $(G, \check{G})\colon \underline{P} \to \underline{S}$ *et* $(H, \check{H})\colon \underline{P} \to \underline{S}$ *les* $\otimes$*-équivalences canoniques correspondantes,* $\xi = H^*(a), \eta = H^*(c)$ *les contraintes d'associativité, de commutativité respectivement pour* $\underline{S}$*, induites par* $(H, \check{H})$ *(Définition* 2.184*).*

(i) ξ *est un* 3*-cocycle normalisé de* $\pi_0(\underline{P})$ *à valeurs dans* $\pi_1(\underline{P})$ *et* η *est un élément du groupe* $\operatorname{Ant}^2(\pi_0(\underline{P}), \pi_1(\underline{P}))$ *des fonctions antisymétriques normalisées* $\pi_0(\underline{P}) \times \pi_0(\underline{P}) \to \pi_1(\underline{P})$*,* ξ *et* η *vérifiant la relation*

$$\xi(r,s,t) - \xi(r,t,s) + \xi(t,r,s) + \eta(r+s,t) - \eta(r,t) - \eta(s,t) = 0. \tag{3.55}$$

(ii) $\underline{S}$ *munie des contraintes* ξ, η *et de la contrainte d'unité* $(0, \mathrm{id}, \mathrm{id})$ *est une* Pic-*catégorie, et les* $\otimes$*-foncteurs* $(G, \check{G}), (H, \check{H})$ *sont compatibles avec les contraintes d'associativité, de commutativité de* $\underline{P}$ *et* $\underline{S}$*.*

(iii) *Si on change l'épinglage* (X_s, i_X)*,* ξ *est changé en* $\xi + \partial\mu$*, où* $\mu \in C^2(\pi_0(\underline{P}), \pi_1(\underline{P}))$*, et* η *est changé en* $\eta + \operatorname{ant}(\mu)$ *où*

$$\operatorname{ant}(\mu)(s,t) = \mu(s,t) - \mu(t,s).$$

Proof. (i) l'assertion concernant ξ résulte de la Proposition 3.34. Quant à η, il est défini par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X_s \otimes X_t \arrow[r, "c_{X_s,X_t}"] & X_t \otimes X_s \\ X_{s+t} \arrow[u, "i_{X_s\otimes X_t}"] \arrow[r, "H(\eta_{s,t})=\gamma_{s+t}(\eta_{s,t})"] & X_{s+t}. \arrow[u, "i_{X_s\otimes X_t}"'] \end{tikzcd}$$

En vertu de la définition d'un épinglage (Définition 3.29) et de la compatibilité des contraintes de commutativité c et d'unité de $\underline{P}$, la fonction $\eta\colon \pi_0(\underline{P}) \times \pi_0(\underline{P}) \to \pi_1(\underline{P})$ est bien normalisée. L'autocompatibilité de la contrainte de commutativité η s'exprime par la formule

$$\eta(s,t) + \eta(t,s) = 0$$

qui donne $\eta \in \mathrm{Ant}^2(\pi_0(\underline{P}), \pi_1(\underline{P}))$. Enfin l'axiome de l'hexagone (Définition 2.38) qui exprime la compatibilité des contraintes d'associativité et de commutativité donne la relation (3.55).

(ii) La catégorie $\underline{S}$ munie des contraintes d'associativité ξ et d'unité $(0, \mathrm{id}, \mathrm{id})$ est déjà une Gr-catégorie (Proposition 3.36). La contrainte de commutativité η pour $\underline{S}$ est bien compatible avec ξ en vertu de (3.55), ce qui montre que $\underline{S}$ est bien une Pic-catégorie. Enfin les $\otimes$-foncteurs $(G, \breve{G}), (H, \breve{H})$, déjà compatibles avec les contraintes d'associativité a, ξ et d'unité $(\underline{1}, g, d), (0, \mathrm{id}, \mathrm{id})$ (Proposition 3.36), le sont aussi avec les contraintes de commutativité c, η en vertu de $\eta = H^*(c)$ et de Proposition 2.181.

(iii) Si on change l'épinglage (X_s, i_X) en l'épinglage (X'_s, i'_X), $(G, \breve{G}), (H, \breve{H}), \xi, \eta$ sont alors changés en $(G', \breve{G}'), (H', \breve{H}'), \xi', \eta'$. Par le même raisonnement que dans la Proposition 3.37, on obtient le $\otimes$-foncteur

$$(G' \circ H, (G'\breve{\circ} H))\colon (\underline{S}, \xi, \eta) \to (\underline{S}, \xi', \eta') \qquad \text{avec } G' \circ H = \mathrm{id}_{\underline{S}}$$

compatible avec les contraintes d'associativité ξ, ξ' et les contraintes de commutativité η, η'. D'où en posant $\mu = (G'\breve{\circ} H)$ on obtient $\xi' = \xi + \partial\mu$ et $\eta' = \eta + \mathrm{ant}(\mu)$ (Définitions 2.140 et 2.144). Le fait que μ est normalisé vient de les formules (3.28) et (3.30) et de la fonctorialité de g, d

□

Considérons maintenant une $\otimes$-catégorie ACU $\underline{C}$ et la catégorie $\underline{P}$ dont les objets sont les objets inversibles de $\underline{C}$ et dont $\mathrm{Hom}_{\underline{P}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{isom}}(X,Y)$ pour $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\underline{P}$, i.e., est constitué des isomorphismes de X dans Y de la catégorie $\underline{C}$. Comme $X \otimes Y \in \mathrm{Ob}\,\underline{P}$ pour $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\underline{P}$ (Proposition 2.129) et $f \otimes g \in \mathrm{Fl}\,\underline{P}$, la catégorie $\underline{P}$ munie de la loi induite $\otimes$ et des contraintes d'associativité, de commutativité, d'unité de $\underline{C}$ est une $\otimes$-catégorie ACU. On vérifie aussitôt que c'est une Pic-catégorie. Le choix d'un épinglage de $\underline{P}$ nous permet de munir la $\otimes$-catégorie réduite $\underline{S}$ de $\underline{P}$ d'une structure de Pic-catégorie au moyen des $\otimes$-équivalences

$$(G, \breve{G})\colon \underline{P} \to \underline{S}, \quad (H, \breve{H})\colon \underline{S} \to \underline{P}.$$

En vertu de la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} GX \otimes GX \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\breve{G}"'] & GX \otimes GX \arrow[d, "\breve{G}"] \\ G(X \otimes X) \arrow[r, "G(c)"] & G(X \otimes X), \end{tikzcd}$$

où c est la contrainte de commutativité pour $\underline{P}$ et η la contrainte de commutativité pour $\underline{S}$, induits par $(H, \breve{H})$, la Pic-catégorie $\underline{P}$ est stricte si et seulement si la Pic-catégorie $\underline{S}$ est stricte.

Cela étant, proposons-nous de démontrer une proposition pour la $\otimes$-catégorie ACU $\underline{C}$, que nous avons laissée sans démonstration dans 2.3.5, au moyen de la Pic-catégorie $\underline{S}$.

Proposition 3.56. *Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie* ACU *stricte avec $(a, c, (\underline{1}, g, d))$ comme contrainte* ACU. *Soient $p_X\colon X \otimes X^{-1} \xrightarrow{\sim} \underline{1}$, $t_X\colon X^{-1} \otimes X \xrightarrow{\sim} \underline{1}$ des isomorphismes. Alors la commutativité du diagramme*

$$\begin{tikzcd} X^{-1} \otimes (X \otimes X^{-1}) \arrow[rr, "a_{X^{-1},X,X^{-1}}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes p_X"'] & & (X^{-1} \otimes X) \otimes X^{-1} \arrow[d, "t_X \otimes \mathrm{id}"] \\ X^{-1} \otimes \underline{1} & & \underline{1} \otimes X^{-1} \\ & X^{-1} \arrow[ul, "d_{X^{-1}}"] \arrow[ur, "g_{X^{-1}}"'] & \end{tikzcd}$$

est équivalente à la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} X \otimes X^{-1} \arrow[rr, "c_{X,X^{-1}}"] \arrow[dr, "p_X"'] & & X^{-1} \otimes X. \arrow[dl, "t_X"] \\ & \underline{1} & \end{tikzcd}$$

Proof. Posons $s = \mathrm{cl}\, X$, par conséquent $-s = \mathrm{cl}\, X^{-1}$. Prenons dans la Pic-catégorie $\underline{P}$, construite à partir de $\underline{C}$ comme ci-dessus, un épinglage tel que

$$X_s = X, X_{-s} = X^{-1}, i_{X \otimes X^{-1}} = p_X^{-1}, i_{X^{-1} \otimes X} = t_X^{-1}.$$

Dans ces conditions, en notant toujours par $\xi = H^*(a), \eta = H^*(c)$ les contraintes d'associativité et de commutativité induits par $(H, \check{H})$ pour $\underline{S}$, on a $\xi(-s, s-s)$ et $\eta(s, -s)$ définis par le diagramme commutatifs suivants

$$\begin{tikzcd}
X^{-1} \otimes (X \otimes X^{-1}) \arrow[r, "a_{X^{-1},X,X^{-1}}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes p_X"'] & (X^{-1} \otimes X) \otimes X^{-1} \arrow[d, "t_X \otimes \mathrm{id}"] \\
X^{-1} \otimes \underline{1} & \underline{1} \otimes X^{-1} \\
X^{-1} \arrow[u, "d_{X^{-1}}"] \arrow[r, "H(\xi(-s,s,-s))"] & X^{-1} \arrow[u, "g_{X^{-1}}"']
\end{tikzcd} , \quad
\begin{tikzcd}
X \otimes X^{-1} \arrow[r, "c_{X,X^{-1}}"] \arrow[d, "p_X"'] & X^{-1} \otimes X \arrow[d, "t_X"] \\
\underline{1} \arrow[r, "H(\eta(s,-s))"] & \underline{1}
\end{tikzcd}$$

(voir Propositions 3.36 et 3.54). Tout revient donc à démontrer que $\xi(-s, s, -s) = 0$ si et seulement si $\eta(s, -s) = 0$. Ecrivons la relation (3.55) pour $r = t = -s$:

$$\xi(-s, s, -s) - \xi(-s, -s, s) + \xi(-s, -s, s) + \eta(0, -s) - \eta(-s, -s) - \eta(s, -s) = 0,$$

ou en tenant compte de $\eta(0, -s) = 0$ (η est normalisé (Proposition 3.54)) et de $\eta(-s, -s) = 0$ ($\underline{C}$ est stricte, par conséquent il en est de même de $\underline{P}$ donc de $\underline{S}$) on obtient $\xi(-s, s, -s) = \eta(s, -s)$, d'òu l'assertion. $\square$

3.2.2. *Structure des* Pic-*catégories.*

Definition 3.57. Soient M, N des groupes abéliens. Un *préépinglage de type* (M, N) pour une Pic-catégorie $\underline{P}$ est un couple $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ d'isomorphismes

$$\varepsilon_0 \colon M \xrightarrow{\sim} \pi_0(\underline{P}), \quad \varepsilon_1 \colon N \xrightarrow{\sim} \pi_1(\underline{P}).$$

Une Pic-*catégorie préépinglée de type* (M, N) est une Pic-catégorie munie d'un préépinglage. Un *morphisme* des Pic-catégories préépinglées de type (M, N), $(\underline{P}, \varepsilon) \to (\underline{P}', \varepsilon')$ est un $\otimes$-foncteur $(F, \check{F}) \colon \underline{P} \to \underline{P}'$ compatible avec les contraintes d'associativité, de commutativité, et tel que les triangles (3.46) soient commutatifs. Un tel morphisme est une $\otimes$-équivalence, donc l'ensemble des classes d'équivalence de Pic-catégories préépinglées de type (M, N) est égal à l'ensemble des composantes connexes de la catégorie des Pic-catégories préépinglées de type (M, N).

Pour formuler les propositions que suivent, introduisons deux complexes de groupes abéliens:

$$\begin{array}{rcl}
L_\bullet(M) & : & L_3(M) \xrightarrow{d_3} L_2(M) \xrightarrow{d_2} L_1(M) \xrightarrow{d_1} L_0(M) \xrightarrow{\tau} M \\
{}'L_\bullet(M) & : & {}'L_3(M) \xrightarrow{'d_3} {}'L_2(M) \xrightarrow{'d_2} {}'L_1(M) \xrightarrow{'d_1} {}'L_0(M) \xrightarrow{'\tau} M
\end{array}$$

où M est un groupe abélien et

$$
\begin{array}{rcl}
L_0(M) & = & 'L_0(M) = \mathbb{Z}[M] \\
L_1(M) & = & 'L_1(M) = \mathbb{Z}[M \times M] \\
L_2(M) & = & 'L_2(M) = \mathbb{Z}[M \times M \times M] + \mathbb{Z}[M \times M] \\
L_3(M) & = & 'L_3(M) + \mathbb{Z}[M] \\
'L_3(M) & = & \mathbb{Z}[M \times M \times M \times M] + \mathbb{Z}[M \times M \times M] + \mathbb{Z}[M \times M] \\
d_1[x,y] & = & 'd_1[x,y] = [y] - [x+y] + [x] \\
d_2[x,y] & = & 'd_2[x,y] = [x,y] - [y,x] \\
d_2[x,y,z] & = & 'd_2[x,y,z] = [y,z] - [x+y,z] + [x,y+z] - [x,y] \\
d_3[x,y,z,t] & = & 'd_3[x,y,z,t] = [y,z,t] - [x+y,z,t] + [x,y+z,t] \\
 & & -[x,y,z+t] + [x,y,z] \\
d_3[x,y,z] & = & 'd_3[x,y,z] = [x,y,z] - [x,z,y] + [z,x,y] - [y,z] \\
 & & +[x+y,z] - [x,z] \\
d_3[x,y] & = & 'd_3[x,y] = [x,y] + [y,x] \\
d_3[x] & = & [x,x] \\
\tau[x] & = & '\tau[x] = x,
\end{array}
$$

les $\mathbb{Z}[M^i]$ étant les groupes abéliens libres engendrés par M^i $(i = 1, 2, 3, 4)$. Puisque L_i (resp. $'L_i$) est libre, un homomorphisme du groupe L_i (resp. $'L_i$) dans un group abélien N est uniquement déterminé par ses valeurs sur les générateurs. D'où les complexes $\mathrm{Hom}(L_\bullet(M), N), \mathrm{Hom}('L_\bullet(M), N)$ sont identifiés aux complexes suivants

$$
\begin{array}{rcl}
\mathrm{Hom}(L_\bullet(M), N)\colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N) & \to & \mathrm{Hom}(M, N) \xrightarrow{\delta_1} \mathrm{Hom}(M \times M, N) \\
 & \xrightarrow{\delta_2} & \mathrm{Hom}(M \times M \times M, N) \times \mathrm{Hom}(M \times M, N) \\
 & \xrightarrow{\delta_3} & \mathrm{Hom}(M \times M \times M \times M, N) \times \mathrm{Hom}(M \times M \times M, N) \\
 & & \times \mathrm{Hom}(M \times M, N) \times \mathrm{Hom}(M, N) \\
\mathrm{Hom}('L_\bullet(M), N)\colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N) & \to & \mathrm{Hom}(M, N) \xrightarrow{'\delta_1} \mathrm{Hom}(M \times M, N) \\
 & \xrightarrow{'\delta_2} & \mathrm{Hom}(M \times M \times M, N) \times \mathrm{Hom}(M \times M, N) \\
 & \xrightarrow{'\delta_3} & \mathrm{Hom}(M \times M \times M \times M, N) \times \mathrm{Hom}(M \times M \times M, N) \\
 & & \times \mathrm{Hom}(M \times M, N)
\end{array}
$$

ou $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,N)$ est le group des homomorphismes du groupe M dans le groupe N, $\mathrm{Hom}(M^i,N)$ $(i=1,2,3,4)$ le groupe des applications de M^i dans N, et

$$\begin{array}{rcl} \delta_1 f &=& '\delta_1 f, \quad \delta_1 f(x,y) = f(y) - f(x+y) + f(x); \\ \delta_2 g &=& '\delta_2 g = (h_1,h_2), \text{ où } h_1(x,y,z) = g(y,z) - g(x+y,z) + g(x,y+z) - g(x,y) \\ && \text{et } h_2(x,y) = g(x,y) - g(y,x); \\ \delta_3(k_1,k_2) &=& (l_1,l_2,l_3,l_4),\ '\delta_3(k_1,k_2) = (l_1,l_2,l_3) \text{ avec} \\ l_1(x,y,z,t) &=& k_1(y,z,t) - k_1(x+y,z,t) + k_1(x,y+z,t) - k_1(x,y,z+t) + k_1(x,y,z) \\ l_2(x,y,z) &=& k_1(x,y,z) - k_1(x,z,y) + k_1(z,x,y) - k_2(y,z) + k_2(x+y,z) - k_2(x,z) \\ l_3(x,y) &=& k_2(x,y) + k_2(y,x) \\ l_4(x) &=& k_2(x,x). \end{array}$$

Proposition 3.58. *Le complex $L_\bullet(M)$ est une "résolution tronquée" de M, en d'autres termes la suite $L_3 \to L_2 \to L_1 \to L_0 \to M \to 0$ est exacte.*

Proof. Une preuve de l'exactitude en degrées 0 et 1 se trouve dans [9]. D'autre part, les L_i étant libres, l'exactitude de $L_\bullet(M)$ est équivalent à l'exactitude des complexes $\mathrm{Hom}(L_\bullet(M),N)$ pour N un groupe abélien arbitraire. Prouvons l'exactitude en degré 2 pour le complexe $\mathrm{Hom}(L_\bullet(M),N)$. Soit $(k_1,k_2) \in \operatorname{Ker}\delta_3$, i.e.,

$$\begin{array}{rcl} k_1(y,z,t) - k_1(x+y,z,t) + k_1(x,y+z,t) - k_1(x,y,z+t) + k_1(x,y,z) &=& 0 \\ k_1(x,y,z) - k_1(x,z,y) + k_1(z,x,y) - k_2(y,z) + k_2(x+y,z) - k_2(x,z) &=& 0 \\ k_2(x,y) + k_2(y,x) &=& 0 \\ k_2(x,x) &=& 0. \end{array}$$

Puisque $k_2(x,y)+k_2(y,x)=0$ et $k_2(x,x)=0$, il existe $g \in \mathrm{Hom}(M\times M,N)$ tel que $k_2(x,y)=g(x,y)-g(y,x)$, i.e., $k_2 = \operatorname{ant} g$. Par conséquent (k_1,k_2) est cohomologue à $(k_1-\partial g, k_2-\operatorname{ant} g) = (k_1-\partial g, 0)$ où $\partial g(x,y,z) = g(y,z)-g(x+y,z)+g(x,y+z)-g(x,y)$ est un cobord au sens de la cohomologie des groupes. Posons $f = k_1 - \partial g$. Puisque $(f,0) \in \operatorname{Ker}\delta_3$, nous avons en vertu de la définition de l'homomorphisme de cobord δ_3, $\partial f = 0$ (∂ étant l'homomorphisme de cobord défini par la relation (3.33)) et $f(x,y,z) - f(x,z,y) + f(z,x,y) = 0$. Or Mac-Lane a démontré que

$$H^3_{\mathrm{S}}(M,N) = Z^3_{\mathrm{S}}(M,N)/\partial C^2_{\mathrm{S}}(M,N) = 0,$$

où $Z^3_{\mathrm{S}}(M,N)$ (resp. $C^2_{\mathrm{S}}(M,N)$) est le groupe de 3-cocycles (resp. 2-cochaînes) (au sens de la cohomologie des groupes) *symétriques*, i.e., qui vérifient la relation

$$f(x,y,z) - f(x,z,y) + f(z,x,y) = 0 \qquad (\text{resp. } g(x,y) = g(y,x)).$$

On en déduit donc pour $(f,0) \in \operatorname{Ker}\delta_3$

$$(f,0) = (\partial u, \operatorname{ant} u), \quad u \in C^2_{\mathrm{S}}(M,N)$$

et par suite $(f,0) \in \operatorname{Im}\delta_2$, ce qui implique $(k_1,k_2) \in \operatorname{Im}\delta_2$. D'où l'exactitude de $\operatorname{Hom}(L_\bullet(M),N)$. On vérifie aussitôt que le complexe reste encore exact quand on impose la condition de normalisation aux cochaînes, i.e.,

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \quad f \in \operatorname{Hom}(M,N)\\ g(0,x_2) &= g(x_1,0)=0, \quad g \in \operatorname{Hom}(M\times M,N)\\ h(0,x_2,x_3) &= h(x_1,0,x_3)=h(x_1,x_2,0)=0, \quad h\in \operatorname{Hom}(M\times M\times M,N)\\ k(0,x_2,x_3,x_4) &= k(x_1,0,x_3,x_4)=k(x_1,x_2,0,x_4)=k(x_1,x_2,x_3,0)=0,\\ & \qquad\qquad k\in \operatorname{Hom}(M\times M\times M\times M,N). \end{aligned}$$

□

Dans ce qui suit, on suppose que les cochaïnes dans les complexes $\operatorname{Hom}(L_\bullet(M),N)$ et $\operatorname{Hom}('L_\bullet(M),N)$ sont normalisées. En nous servant de la Proposition 3.3, nous démontrons comme dans la Proposition 3.47 la proposition suivante

Proposition 3.59. *Il y a une bijection canonique entre l'ensemble des classes d'équi-valence de* Pic-*catégories préépinglées de type* (M,N) *et l'ensemble* $H^2(\operatorname{Hom}('L_\bullet(M),N))$.

Proof. Soient $(\underline{P},\varepsilon)$ une Pic-catégorie préépinglée de type (M,N) et (X_s,i_X) un épinglage de $\underline{P}$. Soient $\underline{S}$ la $\otimes$-catégorie réduite de $\underline{P}$, $(G,\breve{G})\colon \underline{P}\to\underline{S}$, $(H,\breve{H})\colon \underline{S}\to\underline{P}$ les $\otimes$-équivalences canoniques déterminés par l'épinglage (X_s,i_X). Soit (ξ,η) la contrainte AC induite par $(H,\breve{H})$ pour la $\otimes$-catégorie $\underline{S}$. Enfin soit $\underline{T}$ la $\otimes$-catégorie construite à partir du groupe M et du M-module N (trivial). Le couple $(\varepsilon,\mathrm{id})$ est un $\otimes$-foncteur de la $\otimes$-catégorie $\underline{T}$ dans la $\otimes$-catégorie $\underline{S}$, et $(\varepsilon^{-1},\mathrm{id})$ son inverse. $(\varepsilon,\mathrm{id})$ induit les contraintes d'associativité $\alpha=\varepsilon^{-1}(\xi)$, d'unité $(0,\mathrm{id},\mathrm{id})$, de commutativité $\beta=\varepsilon_1^{-1}(\eta)$, $\underline{T}$ devient une Pic-catégorie et $(\varepsilon,\mathrm{id})$ un $\otimes$-foncteur compatible avec les contraintes d'associativité et de commutativité de $\underline{S}$ et $\underline{T}$.

Donc à chaque Pic-catégorie $\underline{P}$ préépinglée de type (M,N) nous avons fait correspondre un élément $(\alpha,\beta)\in \operatorname{Ker}{}'\delta_3$ du complexe $\operatorname{Hom}('L_\bullet(M),N)$. Un changement d'épinglage de $\underline{P}$ fait varier (α,β) en $(\alpha+\partial u,\beta+\underline{\mathrm{ant}}u)$, $(\partial u,\mathrm{ant}u)\in \operatorname{Im}{}'\delta_2$ (Proposition 3.3). D'où l'application $(\underline{P},\varepsilon)\mapsto\theta_{(\underline{P},\varepsilon)}=\overline{(\alpha,\beta)}\in H^2(\operatorname{Hom}('L_\bullet(M),N))$. De la même manière que dans la Proposition 3.47, nous démonstrons que cette application induit une bijection entre l'ensemble des classes d'équivalence de Pic-catégories préépinglées de type (M,N) et l'ensemble $H^2(\operatorname{Hom}('L_\bullet(M),N))$. □

Proposition 3.60. *La classification des* Pic-*catégories préépinglées de type* (M,N) *qui sont* strictes *est triviale.*

Proof. Soient $(\underline{P},\varepsilon)$ une Pic-catégorie préépinglée de type (M,N) et soit $(\alpha,\beta)\in$ $\operatorname{Ker}{}'\delta_3$ l'élément correspondant. Puisque $\underline{P}$ est stricte, on a $\beta(x,x)=0$ pour tout

$x \in M$. Par conséquent $(\alpha, \beta) \in \operatorname{Ker} \delta_3$ du complexe $\operatorname{Hom}('L_\bullet(M), N)$. D'où il y a une bijection entre l'ensemble des classes d'équivalence de Pic-catégories préépinglées de type (M, N) qui sont strictes et l'ensemble $H^2(\operatorname{Hom}('L_\bullet(M), N))$. Or $H^2(\operatorname{Hom}('L_\bullet(M), N)) = 0$ d'après la Proposition 3.58. $\square$

Corollary 3.61. *Soient $\underline{P}$ et $\underline{P}'$ deux* Pic-*catégories strictes. Alors il existe une $\otimes$-équivalence $(F, \breve{F})\colon \underline{P} \to \underline{P}'$ compatible avec les contraintes d'associativité et de commutativité de $\underline{P}$ et $\underline{P}'$ si et seulement s'il existe des isomorphismes $\lambda_0\colon \pi_0(\underline{P}) \xrightarrow{\sim} \pi_0(\underline{P}'), \lambda_1\colon \pi_1(\underline{P}) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\underline{P}')$.*

Proof. Supposons qui'il existe une $\otimes$-équivalence $(F, \breve{F})\colon \underline{P} \to \underline{P}'$ compatible avec les contraintes d'associativité et de commutativité de $\underline{P}$ et $\underline{P}'$. En vertu de la Proposition 3.43, il existe des isomorphismes $\lambda_0\colon \pi_0(\pi) \xrightarrow{\sim} \pi_0(\underline{P}'), \lambda_1\colon \pi_1(\pi) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\underline{P}')$.

Inversement, supposons qu'il existe des isomorphismes $\lambda_0\colon \pi_0(\underline{P}) \xrightarrow{\sim} \pi_0(\underline{P}')$ et $\lambda_1\colon \pi_1(\underline{P}) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\underline{P}')$. Dans ce cas on peut considérer le couple $\mathrm{id} = (\mathrm{id}_{\pi_0(\underline{P})}, \mathrm{id}_{\pi_1(\underline{P})})$ comme un préépinglage de type $(\pi_0(\underline{P}), \pi_1(\underline{P}))$ pour la Pic-catégorie $\underline{P}$; et le couple $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1)$ comme un préépinglage de même type que $\underline{P}$, pour la Pic-catégorie $\underline{P}'$. Comme la catégorie des Pic-catégories préépinglées de même type et strictes est connexe d'après la Proposition 3.60, on en déduit l'existence d'une $\otimes$-équivalence $(F, \breve{F})\colon \underline{P} \to \underline{P}'$ compatible avec les contraintes d'associativité et de commutativité de $\underline{P}$ et $\underline{P}'$. $\square$

Corollary 3.62. *Si dans N la relation $2y = 0$ entraîne $y = 0$, alors la classification des* Pic-*catégories préépinglées de type (M, N) est triviale.*

Proof. Dans ce cas toutes les Pic-catégories de type (M, N) sont strictes, d'où le corollaire en appliquant la Proposition 3.60. $\square$

Definition 3.63. Soient A, B des groupes abéliens, f une application du groupe produit A^n dans B. L'*antsymétrisée* de f est une application, notée af, de A^n dans B, définie par

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} s_\sigma f(x_{\sigma 1}, x_{\sigma 2}, \dots, x_{\sigma n})$$

oú $\mathfrak{S}_n$ est le groupe symétrique, s_σ la signature de la permutation σ.

Definition 3.64. Chaque élément $(\alpha, \beta) \in \operatorname{Ker} '\delta_3$ du complexe $\operatorname{Hom}('L_\bullet(M), N)$ est appelée une *structure de* Pic-*catégorie préépinglée de type* (M, N). Deux structures de Pic-catégorie préépinglée de type (M, N), (α, β) et (α', β'), sont dites cohomologues si et seulement si $\overline{(\alpha, \beta)} = \overline{(\alpha', \beta')}$. Une structure de Pic-catégorie (α, β) est dite *stricte* si $\beta(x, x) = 0$ pour tout $x \in M$.

Proposition 3.65. *Soit (α, β) une structure de* Pic*-catégorie préépinglée de type (M, N). Alors l'antisymétrisée $a\alpha = 0$ et l'application $x \mapsto \beta(x, x)$ est un homomorphisme du groupe M dans le groupe ${}_2N$, ${}_2N$ étant le sous-groupe de N contenant les éléments $y \in N$ tels que $2y = 0$.*

Proof. Puisque $(\alpha, \beta) \in \operatorname{Ker} {}'\delta_3$, nous avons les relations

(3.66)

$$\alpha(x_2, x_3, x_4) - \alpha(x_1 + x_2, x_3, x_4) + \alpha(x_1, x_2 + x_3, x_4) - \alpha(x_1, x_2, x_3 + x_4) + \alpha(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

(3.67)

$$\alpha(x_1, x_2, x_3) - \alpha(x_1, x_3, x_2) + \alpha(x_3, x_1, x_2) = \beta(x_2, x_3) - \beta(x_1 + x_2, x_3) + \beta(x_1, x_3)$$

$$\beta(x_1, x_2) + \beta(x_2, x_1) = 0 \tag{3.68}$$

pour $x_1, x_2, x_3, x_4 \in M$. En permutant x_1, x_2 dans (3.67), nous obtenons

$$\alpha(x_2, x_1, x_3) - \alpha(x_2, x_3, x_1) + \alpha(x_3, x_2, x_1) = \beta(x_1, x_3) - \beta(x_1 + x_2, x_3) + \beta(x_2, x_3)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} a\alpha(x_1, x_2, x_3) &= \alpha(x_1, x_2, x_3) - \alpha(x_1, x_3, x_2) + \alpha(x_3, x_1, x_2) \\ &\quad - \alpha(x_2, x_1, x_3) + \alpha(x_2, x_3, x_1) - \alpha(x_3, x_2, x_1) = 0. \end{aligned}$$

Ensuite dans (3.67) faisons successivement $x_1 = x_3 = x$, $x_2 = y$, $x_1 = x_3 = y$, $x_2 = x$; $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = x + y$; nous obtenons

$$\begin{aligned} \alpha(x, y, x) &= \beta(y, x) - \beta(x + y, x) + \beta(x, x) \\ \alpha(y, x, y) &= \beta(x, y) - \beta(x + y, y) + \beta(y, y) \\ \alpha(x, y, x + y) - \alpha(x, x + y, y) + \alpha(x + y, x, y) &= \beta(y, x + y) - \beta(x + y, x + y) \\ &\quad + \beta(x, x + y) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} & \alpha(y, x, y) - \alpha(x + y, x, y) + \alpha(x, x + y, y) - \alpha(x, y, x + y) + \alpha(x, y, x) \\ = \; & \beta(x, y) - \beta(x + y, y) + \beta(y, y) - [\beta(y, x + y) - \beta(x + y, x + y) + \beta(x, x + y)] \\ + \; & \beta(y, x) - \beta(x + y, x) + \beta(x, x). \end{aligned}$$

Or le premier membre de la relation est nul en vertu de (3.66), et le second égal à $\beta(x, x) + \beta(y, y) - \beta(x + y, x + y)$ en vertu de (3.68); ce qui montre que l'application $x \mapsto \beta(x, x)$ est un homomorphisme. On peut démontrer cette dernière assertion d'une manière autrement. Pour cela, considérons une Pic-catégorie $(\underline{P}, \varepsilon)$ préépinglée de type (M, N) qui correspond au couple (α, β) dans l'application de la Proposition 3.59. Dans $\underline{P}$, prenons quatre objets X_1, X_2, X_3, X_4 tels que $X_1 = X_3 =$

X, $X_2 = X_4 = Y$. En vertu de la Proposition 2.65, nous avons la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
 & (X_1 \otimes X_2) \otimes (X_3 \otimes X_4) \arrow[dl, "a_{X_1 \otimes X_2, X_3, X_4}"'] \arrow[dr, "c_{X_1 \otimes X_2, X_3 \otimes X_4}"] & \\
((X_1 \otimes X_2) \otimes X_3) \otimes X_4 \arrow[d, "a^{-1}_{X_1, X_2, X_3} \otimes \mathrm{id}"] & & (X_3 \otimes X_4) \otimes (X_1 \otimes X_2) \arrow[d, "a_{X_3 \otimes X_4, X_1, X_2}"'] \\
(X_1 \otimes (X_2 \otimes X_3)) \otimes X_4 \arrow[d, "(\mathrm{id} \otimes c_{X_2, X_3}) \otimes \mathrm{id}"] & & ((X_3 \otimes X_4) \otimes X_1) \otimes X_2 \arrow[d, "a^{-1}_{X_3, X_4, X_1} \otimes \mathrm{id}"'] \\
(X_1 \otimes (X_3 \otimes X_2)) \otimes X_4 \arrow[d, "a_{X_1, X_3, X_2} \otimes \mathrm{id}"] & & (X_3 \otimes (X_4 \otimes X_1)) \otimes X_2 \arrow[d, "(\mathrm{id} \otimes c_{X_4, X_1}) \otimes \mathrm{id}"'] \\
((X_1 \otimes X_3) \otimes X_2) \otimes X_4 \arrow[d, "(c_{X_1, X_3} \otimes \mathrm{id}) \otimes \mathrm{id}"] & & (X_3 \otimes (X_1 \otimes X_4)) \otimes X_2 \arrow[d, "a_{X_3, X_1, X_4} \otimes \mathrm{id}"'] \\
((X_3 \otimes X_1) \otimes X_2) \otimes X_4 \arrow[d, "a^{-1}_{X_3 \otimes X_1, X_2, X_4}"] & & ((X_3 \otimes X_1) \otimes X_4) \otimes X_2 \arrow[d, "a^{-1}_{X_3 \otimes X_1, X_4, X_2}"'] \\
(X_3 \otimes X_1) \otimes (X_2 \otimes X_4) \arrow[rr, "\mathrm{id} \otimes c_{X_2, X_4}"] & & (X_3 \otimes X_1) \otimes (X_4 \otimes X_2)
\end{tikzcd}$$

ce qui donne, en posant $\alpha = \varepsilon_0^{-1}(\mathrm{cl}\, X), y = \varepsilon_0^{-1}(\mathrm{cl}\, Y)$,

$$\begin{aligned}
&\alpha(x+y,x,y) - \alpha(x,y,x) + \beta(y,x) + \alpha(x,x,y) + \beta(x,x) - \alpha(2x,y,y) \\
&+\beta(y,y) + \alpha(2x,y,y) - \alpha(x,x,y) - \beta(y,x) + \alpha(x,y,z) \\
&-\alpha(x+y,x,y) - \beta(x+y,x+y) = 0
\end{aligned}$$

ou après simplification

$$\beta(x,x) + \beta(y,y) - \beta(x+y,x+y) = 0.$$

$\square$

Proposition 3.69. *Le noyau de l'application* $(\overline{\alpha}, \overline{\beta}) \mapsto \overline{\alpha}$ *du groupe* $H^2(\mathrm{Hom}('L_\bullet(M), N))$ *dans le groupe* $H^3(M,N)$ *s'identifie au groupe*

$$\mathrm{Lin\,ant}^2(M,N)/\mathrm{ant}(Z^2(M,N))$$

des applications bilinéaires alternées $M \times M \to N$*, modulo celles de la forme* $\mathrm{ant}\, u$*, où* $u \in Z^2(M,N)$*.*

Proof. Soit $\overline{(\alpha,\beta)} \in H^2(\mathrm{Hom}('L_\bullet(M), N))$ tel que $\overline{\alpha} = 0$, i.e., $\alpha = \partial f$, $f \in C^2(M,N)$. Nous avons

$$\overline{(\alpha,\beta)} = \overline{(\partial f, \beta)} = \overline{(\partial f - \partial f, \beta - \mathrm{ant}\, f)} = \overline{(0,g)}, \quad g = \beta - \mathrm{ant}\, f.$$

En vertu de las relations (3.67) et (3.68), g est bilinéaire alternée. D'où le noyau de l'application se compose des éléments $\overline{(0,g)}$ avec g bilinéaire alternée. De plus

$$\overline{(0,g)} = \overline{(0,g')} \iff \exists\, u \in C^2(M,N), \partial u = 0 \text{ et } g - g' = \operatorname{ant} u,$$

d'où la proposition en remarquant que les éléments de $\operatorname{ant}(Z^2(M,N))$ sont des applications bilinéaires alternées $M \times M \to N$. □

Proposition 3.70. *Il y a un monomorphisme j de* $\operatorname{Lin ant}^2(M,N)/\operatorname{ant}(Z^2(M,N))$ *dans* $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, {}_2N)$.

Proof. Considérons l'homomorphisme

$$\operatorname{Lin ant}^2(M,N) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, {}_2N),\ f \mapsto \varphi,\ \varphi(x) = f(x,x),\ x \in M.$$

Le noyau de cette application se compose des applications bilinéaires alternées f telles que $f(x,x) = 0$ pour tout $x \in M$. En vertu des relations (3.66), (3.67), (3.68), $(0,f)$ est une structure de Pic-catégorie préépinglée de type (M,N) qui est stricte puisque $f(x,x) = 0$ pour tout $x \in M$. Or le complexe $\operatorname{Hom}(L_\bullet(M), N)$ est exact, ce qui donne $(0,f) = (\partial u, \operatorname{ant} u)$ avec $\partial u = 0$. On en conclut que le noyau est $\operatorname{ant}(Z^2(M,N))$. Cet homomorphisme induit donc le monomorphisme

$$j\colon \operatorname{Lin ant}^2(M,N)/\operatorname{ant}(Z^2(M,N)) \hookrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, {}_2N).$$

□

Proposition 3.71. *Si M est libre, j est un isomorphisme.*

Proof. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de M et soit $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, {}_2N)$. Nous construisons une application $f\colon M \times M \to N$ de la manière suivante

$$\begin{array}{rcl} f(e_i, e_i) & = & \varphi(e_i),\ f(e_i, e_k) = 0 \text{ pour } i \neq k, \\ f(x,y) & = & \sum m_i n_k f(e_i, e_k) \text{ pour } x = \sum m_i e_i,\ y = \sum n_k e_k. \end{array}$$

Il est clair que f est bilinéaire alternée et $f(x,x) = \varphi(x)$, d'où la proposition. □

Corollary 3.72. *Si M est libre, alors* $\operatorname{Lin ant}^2(M,N)/\operatorname{ant}(Z^2(M,N)) = 0$ *si et seulement si* ${}_2N = 0$.

Proof. Si ${}_2N = 0$, il est clair que $\operatorname{Lin ant}^2(M,N)/\operatorname{ant}(Z^2(M,N)) = 0$. Inversement, $\operatorname{Lin ant}^2(M,N)/\operatorname{ant}(Z^2(M,N)) = 0$ implique $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, {}_2N) = 0$ et par suite ${}_2N = 0$ puisque M est libre. □

Proposition 3.73. *Il y a un monomorphisme*

$$h\colon H^2(\operatorname{Hom}('L_\bullet(M), N)) \hookrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, {}_2N)$$

qui est un isomorphisme si M est libre.

Proof. Soit (α, β) une structure de Pic-catégorie préépinglée de type (M, N). En vertu de la Proposition 3.65, l'application $x \mapsto \beta(x, x)$ appartient a $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, {}_2N)$. De plus deux structures cohomologues $(\alpha, \beta), (\alpha', \beta')$ définissent une même application $x \mapsto \beta(x, x) = \beta'(x, x)$. On obtient un homomorphisme h de $H^2(\mathrm{Hom}('L_\bullet(M), N))$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, {}_2N)$ en posant $h\overline{(\alpha, \beta)}(x) = \beta(x, x), x \in M$. Le noyau de h est donc $H^2(\mathrm{Hom}(L_\bullet(M), N))$ qui est nul en vertu de la Proposition 3.58.

Supposons M libre et soit $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, {}_2N)$. En vertu de la Proposition 3.71, il existe $f \in \mathrm{Lin\,ant}^2(M, N)$ tel que $f(x, x) = \varphi(x)$. Il est clair que $(0, f)$ est une structure de Pic-catégorie préépinglée de type (M, N) et $h\overline{(0, f)}(x) = f(x, x) = \varphi(x)$, ce qui achéve la démonstration. □

4. Chapter III
Pic-enveloppe d'une ⊗-catégorie ACU

Dans ce chapitre nous nous occupons de deux problèmes universels, celui de rendre des objets "objet unité" et celui d'inverser des objets.

4.1. **Le problème de rendre des objets "objet unité".**

Pour pouvoir résoudre ce problème, occupons-nous du problème suivant.

4.1.1. *Le probléme de rendre des endomorphismes des identités.*

Proposition 4.1. *Soient $\underline{A}$ une catégorie, $\mathcal{S}$ une partie de $\mathrm{Fl}\,\underline{A}$. Il existe une catégorie $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ et un foncteur H de $\underline{A}$ dans $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ ayant les propriétés suivantes:*

(1) $H(u) = \mathrm{id}$ *pour tout* $u \in \mathcal{S}$*;*
(2) *pour tout foncteur K de $\underline{A}$ dans une catégorie $\underline{B}$ tel que $K(u) = \mathrm{id}$ pour tout $u \in \mathcal{S}$, il existe un foncteur K' et un seul de $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ dans $\underline{B}$ tel que $K = K' \circ H$.*

En d'autres termes, $(\underline{A}^{\mathcal{S}}, H)$ est une solution du probléme universel

$$K\colon \underline{A} \to \underline{B}, \quad K(u) = \mathrm{id} \text{ pour tout } u \in \mathcal{S}.$$

Proof. Soient A, B des objets de $\underline{A}$ et $R_{A,B}$ une relation binaire définie dans $\mathrm{Hom}_{\underline{A}}(A, B)$ de la manière suivante: pour $u, v \in \mathrm{Hom}_{\underline{A}}(A, B)$, on a $uR_{A,B}v$ si et seulement s'il existe un entier $n \geq 0$, des entiers strictement positifs p_0, p_i, q_i $(i = 1, \ldots, n)$, q_{n+1}, et des morphismes

$$u^{(i)} = u_1^{(i)} u_2^{(i)} \ldots u_{p_i}^{(i)} = v_1^{(i)} v_2^{(i)} \ldots v_{q_i}^{(i)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

tels que $u = u_1^{(0)} u_2^{(1)} \dots u_{p_0}^{(0)}$, $v = v_1^{(n+1)} v_2^{(n+1)} \dots v_{q_{n+1}}^{(n+1)}$ et

$$u_1^{(j)} \varepsilon_1^{(j)} u_2^{(j)} \varepsilon_2^{(j)} \dots \varepsilon_{p_j-1}^{(j)} u_{p_j}^{(j)} = v_1^{(j+1)} \varepsilon_1^{(j+1)} v_2^{(j+1)} \varepsilon_2^{(j+1)} \dots \varepsilon_{q_{j+1}-1}^{(j+1)} v_{q_{j+1}}^{(j+1)}$$

pour $j = 0, \dots, n$, les $\varepsilon^{(-)}$ étant des morphismes appartenant à $\mathcal{S}$. On vérifie aussitôt que $R_{A,B}$ est une relation d'équivalence dans $\mathrm{Hom}_{\underline{A}}(A, B)$, elle est la relation d'équivalence la plus faible identifiant les flèches de $\mathcal{S}$ avec des identités. Pour $u, v \in \mathrm{Hom}_{\underline{A}}(A, B), u', v' \in \mathrm{Hom}_{\underline{A}}(B, C)$, $u R_{A,B} v, u' R_{B,C} v'$, on a aussitôt $u'u R_{A,C} u'v$, $u'v R_{A,C} v'v$, d'où $u'u R_{A,C} v'v$. Notons par $\overline{u}$ la classe d'équivalence contenant u,

Cela étant, posons

$$\begin{aligned} \mathrm{Ob}\, \underline{A}^{\mathcal{S}} &= \mathrm{Ob}\, \underline{A} \\ \mathrm{Hom}_{\underline{A}^{\mathcal{S}}}(A, B) &= \mathrm{Hom}_{\underline{A}}(A, B)/R_{A,B}. \end{aligned}$$

$\underline{A}^{\mathcal{S}}$ est donc une catégorie qui est une catégorie quotient de $\underline{A}$. Le foncteur $H\colon \underline{A} \to \underline{A}^{\mathcal{S}}$ est défini par les applications

$$\begin{aligned} A &\mapsto A \\ (u\colon A \to B) &\mapsto (\overline{u}\colon A \to B). \end{aligned}$$

Il est clair que $H(u) = \mathrm{id}$ pour tout $u \in \mathcal{S}$. Enfin soient $\underline{B}$ une catégorie, $K\colon \underline{A} \to \underline{B}$ un foncteur tel que $K(u) = \mathrm{id}$ pour tout $u \in \mathcal{S}$, le foncteur $K'\colon \underline{A}^{\mathcal{S}} \to B$ défini par les applications

$$\begin{aligned} A &\mapsto KA \\ (\overline{u}\colon A \to B) &\mapsto (Ku\colon KA \to KB). \end{aligned}$$

est le seul foncteur de $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ dans B tel que $K = K' \circ H$. $\square$

Remark 4.2. Quand la catégorie $\underline{A}$ est un groupoïde et $\varepsilon^{-1} \in \mathcal{S}$ pour tout $\varepsilon \in \mathcal{S}$, la relation d'équivalence $R_{A,B}$ dans $\mathrm{Hom}_{\underline{A}}(A, B)$ peut être décrite plus simplement: si $u, u' \in \mathrm{Hom}_{\underline{A}}(A, B)$, alors $u R_{A,B} u'$ si et seulement s'il existe $u = u_1 u_2 \dots u_p, u' = u'_1 u'_2 \dots u'_q$ tels que $u_1 \varepsilon_1 u_2 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{p-1} u_p = u'_1 \varepsilon'_1 u'_2 \varepsilon'_2 \dots \varepsilon'_{q-1} u'_q$, où $\varepsilon_i, \varepsilon'_j \in \mathcal{S}$. En effet, si cette derniére relation existe, il est clar qu'on a $u R_{A,B} u'$. Inversement supposons

$$u = u_1 u_2 \dots u_p, v = v_1 v_2 \dots v_r = \omega_1 \omega_2 \dots \omega_s, u' = u'_1 u'_2 \dots u'_q$$

et

$$\begin{aligned} u_1 \varepsilon_1 u_2 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{p-1} u_p &= v_1 \mu_1 v_2 \mu_2 \dots \mu_{r-1} v_r \\ \omega_1 \nu_1 \omega_2 \nu_2 \dots \nu_{s-1} \omega_s &= u'_1 \varepsilon'_1 u'_2 \varepsilon'_2 \dots \varepsilon'_{q-1} u'_q \end{aligned}$$

avec $\varepsilon_., \mu_., \nu_., \varepsilon'_. \in \mathcal{S}$. Alors on peut écrire

$$\begin{aligned} u &= u_1 u_2 \dots u_p v_r^{-1} v_{r-1}^{-1} \dots v_2^{-1} v_2 \dots v_r, \\ u' &= u'_1 u'_2 \dots u'_q \omega_s^{-1} \omega_{s-1}^{-1} \dots \omega_2^{-1} \omega_2 \dots \omega_s \end{aligned}$$

et on a

$$u_1\varepsilon_1 u_2\varepsilon_2\dots\varepsilon_{p-1}u_p v_r^{-1}\mu_{r-1}^{-1}v_{r-1}^{-1}\mu_{r-2}^{-1}\dots v_3^{-1}\mu_2^{-1}v_2^{-1}\mu_1^{-1}v_2v_3\dots v_r =$$
$$u_1'\varepsilon_1' u_2'\varepsilon_2'\dots\varepsilon_{q-1}' u_q'\omega_s^{-1}\nu_{s-1}^{-1}\omega_{s-1}^{-1}\nu_{s-2}^{-1}\dots\omega_3^{-1}\nu_2^{-1}\omega_2^{-1}\nu_1^{-1}\omega_2\omega_3\dots\omega_s$$

puisque le premier membre est égal à $v_1v_2\dots v_r$ et le seconde membre à $\omega_1\omega_2\dots\omega_s$.

Definition 4.3. Soit $\underline{A}$ une $\otimes$-catégorie associative, et soit $\mathcal{E}$ la partie de $\mathrm{Fl}\,\underline{A}$ se composant des flèches qui sont des endomorphismes. On dit qu'une partie $\mathcal{S}$ de $\mathcal{E}$ est *multiplicative* si $\mathrm{id}_X \in \mathcal{S}$ pour tout $X \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}$, et si le produit tensoriel de deux flèches de $\mathcal{S}$ appartient à $\mathcal{S}$. On dit aussi que $\mathcal{S}$ es une partie multiplicative de $\underline{A}$.

Pour toute partie $\mathcal{S}$ de $\mathcal{E}$, il existe des parties multiplicatives de $\mathcal{E}$ contenant $\mathcal{S}$, par exemple $\mathcal{E}$ lui-même. L'intersection de toutes ces parties est la plus petite partie multiplicative de $\mathcal{E}$ contenant $\mathcal{S}$; on dit qu'elle est *engendrée* par $\mathcal{S}$. Il est immédiat que c'est l'ensemble formé de tous les produits tensoriels finis des flèches de $\mathcal{S}$ et des identités id_X.

Proposition 4.4. *Soient* $\underline{A}$ *une* $\otimes$*-catégorie* AC*,* (a,c) *sa contrainte* AC*,* $\mathcal{S}$ *une partie multiplicative de* $\underline{A}$*. Il existe une* $\otimes$*-catégorie* AC $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ *et un* $\otimes$*-foncteur* AC $(H,\check{H})$ *de* $\underline{A}$ *dans* $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ *ayant les propriétés suivantes:*

1. $H(u) = \mathrm{id}$ *pour tout* $u \in \mathcal{S}$*;*
2. *pour tout* $\otimes$*-foncteur* AC $(K,\check{K})$ *de la* $\otimes$*-catégorie* AC $\underline{A}$ *dans une* $\otimes$*-catégorie* AC $\underline{B}$*, tel que* $K(u) = \mathrm{id}$ *pour tout* $u \in \mathcal{S}$*, il existe un* $\otimes$*-foncteur* AC $(K',\check{K}')$ *et un seul de* $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ *dans* $\underline{B}$ *tel que* $(K,\check{K}) = (K',\check{K}')\circ(H,\check{H})$*.*

Proof. Considérons la relation d'équivalence $R_{A,B}$ définie dans la Proposition 4.1. Soient $u,v \in \mathrm{Hom}_{\underline{A}}(A,B), u',v' \in \mathrm{Hom}_{\underline{A}}(A',B'), u\,R_{A,B}\,v, u'\,R_{A',B'}\,v'$. On a aussitôt $(u\otimes\mathrm{id}_{B'})R_{A\otimes B',B\otimes B'}(v\otimes\mathrm{id}_{B'})$ et $(\mathrm{id}_A\otimes u')\,R_{A\otimes A',A\otimes B'}(\mathrm{id}_A\otimes v')$, ce qui donne

$$u\otimes u' = (u\otimes\mathrm{id}_{B'})(\mathrm{id}_A\otimes u')\,R_{A\otimes A',B\otimes B'}\,(v\otimes\mathrm{id}_{B'})(\mathrm{id}_A\otimes v') = v\otimes v'.$$

D'où dans la catégorie quotient $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ (voir Proposition 4.1) on peut construire une loi $\otimes$ dont le produit tensoriel de deux objets de $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ est le même que celui de $\underline{A}$ et dont le produit tensoriel de deux flèches est défini par

$$\overline{u}\otimes\overline{u}' = \overline{u\otimes u'}.$$

Les contraintes d'associativité et de commutativité pour $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ sont $\overline{a}$ et $\overline{c}$, respectivement. Il est clair qu'elles sont compatibles. La $\otimes$-catégorie $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ est donc une $\otimes$-catégorie AC. Enfin le foncteur H est défini comme dans la Proposition 4.1 et $\check{H} = \mathrm{id}$. Le couple $(H,\check{H})$ est ainsi un $\otimes$-foncteur AC.

Soient $\underline{B}$ une $\otimes$-catégorie AC et $(K,\breve{K})\colon \underline{A} \to \underline{B}$ un $\otimes$-foncteur AC tel que $K(u) = \mathrm{id}$ pour tout $u \in \mathcal{S}$. Le $\otimes$-foncteur $(K',\breve{K}')\colon \underline{A}^{\mathcal{S}} \to \underline{B}$ avec K' défini comme dans la Proposition 4.1 et $\breve{K}' = \breve{K}$ est le seul $\otimes$-foncteur AC tel que $(K,\breve{K}) = (K',\breve{K}') \circ (H,\breve{H})$. $\square$

Definition 4.5. Soient $\underline{A}$ une $\otimes$-catégorie AC, (a,c) sa contrainte AC, $\mathcal{S}$ une partie multiplicative de $\underline{A}$. On appelle *$\otimes$-catégorie* AC *quotient* de $\underline{A}$ définie par $\mathcal{S}$, et on désigne par $\underline{A}^{\mathcal{S}}$, la catégorie $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ définie par

$$\begin{aligned} \mathrm{Ob}\,\underline{A}^{\mathcal{S}} &= \mathrm{Ob}\,\underline{A} \\ \mathrm{Hom}_{\underline{A}^{\mathcal{S}}}(A,B) &= \mathrm{Hom}_{\underline{A}}(A,B)/R_{A,B}, \end{aligned}$$

munie de la structure de $\otimes$-catégorie AC définie par

$$\begin{cases} A \otimes B \text{ dans } \underline{A}^{\mathcal{S}} = A \otimes B \text{ dans } \underline{A}, \quad A, B \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}^{\mathcal{S}} \\ \overline{u} \otimes \overline{u}' = \overline{u \otimes u'}, \quad \overline{u}, \overline{u}' \in \mathrm{Fl}\,\underline{A}^{\mathcal{S}} \\ \text{contrainte AC} = (\overline{a}, \overline{c}). \end{cases}$$

On appelle *$\otimes$-foncteur canonique* de $\underline{A}$ dans $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ le $\otimes$-foncteur AC:

$$\begin{aligned} A &\mapsto A \\ (u\colon A \to B) &\mapsto (\overline{u}\colon A \to B). \end{aligned}$$

On a aussitôt la proposition suivante

Proposition 4.6. *Soient $\underline{A}$ une $\otimes$-catégorie* ACU*, $(a,c,(\underline{1},g,d))$ sa contrainte* ACU*, $\mathcal{S}$ une partie multiplicative de $\underline{A}$. La catégorie $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ est une $\otimes$-catégorie* ACU*, sa contrainte d'unité étant $(\underline{1},\overline{g},\overline{d})$, et le $\otimes$-foncteur canonique de $\underline{A}$ dans $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ est un $\otimes$-foncteur* ACU*. La catégorie $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ et le $\otimes$-foncteur canonique de $\underline{A}$ dans $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ constitue une solution du problème universel*

$$(K,\breve{K})\colon \underline{A} \to \underline{B}, \quad K(u) = \mathrm{id} \textit{ pour tout } u \in \mathcal{S},$$

où $\underline{B}$ est une $\otimes$-catégorie ACU *et $(K,\breve{K})$ est un $\otimes$-foncteur* ACU*.*

4.1.2. *Le problème de rendre des objets "objet unité".*

Tout d'abord, introduisons un $\otimes$-foncteur.

Definition 4.7. Soient $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie AC, $\underline{P}$ une $\otimes$-catégorie ACU, sa contrainte d'unité étant notée $(\underline{1}_{\underline{P}},g,d)$. On désigne par $(I_{\underline{P}},\breve{I}_{\underline{P}})$ le $\otimes$-foncteur de $\underline{C}$

dans $\underline{P}$ défini par

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "u"'] & \underline{1}_{\underline{P}} \arrow[d, "\mathrm{id}_{\underline{1}_{\underline{P}}}"] \\ Y \arrow[r, mapsto] & \underline{1}_{\underline{P}} \end{tikzcd}$$

$$\check{I}_{\underline{P}}(X,Y) = d^{-1}\colon I_{\underline{P}}(X) \otimes I_{\underline{P}}(Y) = \underline{1}_{\underline{P}} \otimes \underline{1}_{\underline{P}} \to \underline{1}_{\underline{P}} = I_{\underline{P}}(X \otimes Y)$$

pour $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}, u \in \mathrm{Fl}\,\underline{C}$. Il est clair que $(I_{\underline{P}}, \check{I}_{\underline{P}})$ est un $\otimes$-foncteur AC en vertu de la compatibilité des contraintes de $\underline{P}$. $(I_{\underline{P}}, \check{I}_{\underline{P}})$ est appelé le $\otimes$-*foncteur* $\underline{1}_{\underline{P}}$ *constant* de $\underline{C}$ dans $\underline{P}$.

Dans tout ce qui suit de ce no., $\underline{A}$ est une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte AC: (a,c), $\underline{A}'$ est une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte AC: (a',c') et dont la catégorie sous-jacente est un grupoïde, $(T,\check{T})\colon \underline{A}' \to \underline{A}$ un $\otimes$-foncteur AC. On se propose de chercher

(1) Une $\otimes$-catégorie $\underline{P}$ munie des contraintes d'associativité, de commutativité et d'unité compatibles;
(2) Un $\otimes$-foncteur $(D,\check{D})\colon \underline{A} \to \underline{P}$ compatible avec les contraintes d'associativité et de commutativité dans $\underline{A}$ et $\underline{P}$.
(3) Un $\otimes$-isomorphisme fonctoriel

$$\lambda\colon (D,\check{D}) \circ (T,\check{T}) \xrightarrow{\sim} (I_{\underline{P}}, \check{I}_{\underline{P}})$$

où $(I_{\underline{P}}, \check{I}_{\underline{P}})$ est le $\otimes$-foncteur $\underline{1}_{\underline{P}}$ constant de $\underline{A}'$ dans $\underline{P}$.

En plus, on veut que le triple $(\underline{P}, (D,\check{D}), \lambda)$ soit universel pour les triples $(\underline{Q}, (E,\check{E}), \mu)$ vérifiant (1), (2), (3); i.e., pour un triple $(\underline{Q}, (E,\check{E}), \mu)$ vérifiant (1), (2), (3), il existe un $\otimes$-foncteur $(E',\check{E}')$ et un seul de $\underline{P}$ dans $\underline{Q}$ compatible avec les contraintes d'associativité, de commutativité et d'unité dans $\underline{P}$ et $\underline{Q}$ tel que $(E,\check{E}) = (E',\check{E}') \circ (D,\check{D})$ et le diagramme

$$\begin{tikzcd} E'(DTA') \arrow[r, "E'(\lambda_{A'})"] \arrow[d, equal] & E'(\underline{1}_{\underline{P}}) \\ ETA' \arrow[r, "\mu_{A'}"] & \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[u, "\widehat{E}'"'] \end{tikzcd}$$

soit commutatif, $\widehat{E}'\colon \underline{1}_{\underline{Q}} \xrightarrow{\sim} E'(\underline{1}_{\underline{P}})$ étant l'isomorphisme venant de la compatibilité de $(E',\check{E}')$ avec les unités de $\underline{P}$ et $\underline{Q}$ (Définition 2.148).

Nous considérons le problème d'abord au cas où $A' = \emptyset$.

Proposition 4.8. *Soit $\underline{A}$ une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte* AC*:* (a, c)*. Il existe une $\otimes$-catégorie* ACU $\underline{P}$ *et un $\otimes$-foncteur* $(D, \check{D})\colon \underline{A} \to \underline{P}$*, compatible avec les contraintes d'associativité et de commutativité dans $\underline{A}$ et $\underline{P}$, ayant la propriété suivante:*

Pour tout $\otimes$-foncteur $(E, \check{E})$ de $\underline{A}$ dans une $\otimes$-catégorie ACU $\underline{Q}$*, compatible avec les contraintes d'associativité et de commutativité dans $\underline{A}$ dans $\underline{Q}$, il existe un $\otimes$-foncteur* ACU $(E', \check{E}')$ *et un seul de $\underline{P}$ dans $\underline{Q}$ tel que* $(E, \check{E}) = (E', \check{E}') \circ (D, \check{D})$ *et que* $\mathrm{id} = \widehat{E}'\colon \underline{1}_{\underline{Q}} \xrightarrow{\sim} E'(\underline{1}_{\underline{P}})$.

Proof. Pour construire la catégorie $\underline{P}$, posons

$$\mathrm{Ob}\,\underline{P} = \mathrm{Ob}\,\underline{A} \cup \{\underline{1}_{\underline{P}}\}$$

$$\mathrm{Hom}_{\underline{P}}(A, B) = \begin{cases} \mathrm{Hom}_{\underline{A}}(A, B), & A, B \in \mathrm{Ob}\,\underline{A} \\ \emptyset, & A \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}, B = \underline{1}_{\underline{P}} \\ \emptyset, & A = \underline{1}_{\underline{P}}, B \in \mathrm{Ob}\,\underline{A} \\ \{\mathrm{id}_{\underline{1}_{\underline{P}}}\}, & A = B = \underline{1}_{\underline{P}} \end{cases}$$

La composition des flèches dans $\underline{P}$ se définit de façon naturelle à l'aide de la composition des flèches dans $\underline{A}$. Nous avons ainsi une catégorie.

Pour munir $\underline{P}$ d'une $\otimes$-structure, nous définissons le foncteur $\otimes\colon \underline{P} \times \underline{P} \to \underline{P}$ de la manière suivante, en nous servant de la lois $\otimes$ dans $\underline{A}$ (où $A, B, C, D \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}, u, v \in \mathrm{Fl}\,\underline{A}$):

$$\begin{tikzcd} (A,B) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "{(u,v)}"'] & A \otimes B \arrow[d, "u \otimes v"] \\ (C,D) \arrow[r, mapsto] & C \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (\underline{1}_{\underline{P}}, A) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "{(\mathrm{id},u)}"'] & A \arrow[d, "u"] \\ (\underline{1}_{\underline{P}}, B) \arrow[r, mapsto] & B \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} (A,\underline{1}_{\underline{P}}) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "{(u,\mathrm{id})}"'] & A \arrow[d, "u"] \\ (B,\underline{1}_{\underline{P}}) \arrow[r, mapsto] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (\underline{1}_{\underline{P}}, \underline{1}_{\underline{P}}) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "{(\mathrm{id},\mathrm{id})}"'] & \underline{1}_{\underline{P}} \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ (\underline{1}_{\underline{P}}, \underline{1}_{\underline{P}}) \arrow[r, mapsto] & \underline{1}_{\underline{P}} \end{tikzcd} .$$

On vérifie aussitôt que $\otimes$ ainsi défini est un foncteur. Il est clair que a, défini de la façon suivante

$$\begin{aligned} a_{A,B,C}\,(\text{dans } \underline{P}) &= a_{A,B,C}\,(\text{dans } \underline{A}) \\ a_{\underline{1}_{\underline{P}},B,C} &= \mathrm{id}_{B\otimes C}, \quad a_{A,\underline{1}_{\underline{P}},C} = \mathrm{id}_{A\otimes C}, \quad a_{A,B,\underline{1}_{\underline{P}}} = \mathrm{id}_{A\otimes B} \\ a_{\underline{1}_{\underline{P}},\underline{1}_{\underline{P}},C} &= \mathrm{id}_C, \quad a_{\underline{1}_{\underline{P}},B,\underline{1}_{\underline{P}}} = \mathrm{id}_B, \quad a_{A,\underline{1}_{\underline{P}},\underline{1}_{\underline{P}}} = \mathrm{id}_A \end{aligned}$$

pour $A, B, C \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}$ et

$$a_{\underline{1}_P,\underline{1}_P,\underline{1}_P} = \mathrm{id}_{\underline{1}_P}$$

constitue une contrainte d'associativité pour $\underline{P}$. Pour la contrainte de commutativité c, posons

$$\begin{aligned} c_{A,B}\,(\text{dans } \underline{P}) &= c_{A,B}\,(\text{dans } \underline{A}) \\ c_{\underline{1}_P,A} &= \mathrm{id}_A, \quad c_{A,\underline{1}_P} = \mathrm{id}_A \end{aligned}$$

pour $A, B \in \mathrm{Ob}\,A$ et

$$c_{\underline{1}_P,\underline{1}_P} = \mathrm{id}_{\underline{1}_P}.$$

c est bien un isomorphisme fonctoriel et vérifie $c_{B,A} \circ c_{A,B} = \mathrm{id}$ pour $A, B \in \mathrm{Ob}\,\underline{P}$. Finalement pour la contrainte d'unité, posons

$$g_A = \mathrm{id}_A \colon A \xrightarrow{\sim} \underline{1}_P \otimes A = A, \quad d_A = \mathrm{id}_A \colon A \xrightarrow{\sim} A \otimes \underline{1}_P = A$$

pour $A \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}$, et

$$g_{\underline{1}_P} = d_{\underline{1}_P} = \mathrm{id}_{\underline{1}_P} \colon \underline{1}_P \xrightarrow{\sim} \underline{1}_P \otimes \underline{1}_P = \underline{1}_P.$$

$(\underline{1}, g, d)$ est manifestement une contrainte d'unité pour $\underline{P}$. On vérifie aussitôt que ces contraintes sont compatibles. $\underline{P}$ est donc une $\otimes$-catégorie ACU.

Posons

$$D(A) = A, \quad D(u) = u, \quad \check{D}_{A,B} = \mathrm{id}_{A\otimes B}$$

pour $A, B \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}$, $u \in \mathrm{Fl}\,\underline{A}$. Il est immédiat que $(D, \check{D})$ est un $\otimes$-foncteur de $\underline{A}$ dans $\underline{P}$ compatible avec les contraintes d'associativité et de commutativité.

Enfin, soient $\underline{Q}$ une $\otimes$-catégorie ACU, $(E, \check{E}) \colon \underline{A} \to \underline{Q}$ un $\otimes$-foncteur compatible avec les contraintes d'associativité et de commutativité. Supposons qu'il existe un $\otimes$-foncteur $(E', \check{E}') \colon \underline{P} \to \underline{Q}$ compatible avec les contraintes d'associativité, de commutativité et d'unité dans $\underline{P}$ et $\underline{Q}$ tel que $(E, \check{E}) = (E', \check{E}') \circ (D, \check{D})$ et $\widehat{E}' = \mathrm{id}_{\underline{1}_Q}$. On obtient aussitôt

$$\begin{aligned} E'(A) &= E(A), \quad E'(\underline{1}_P) = \underline{1}_Q, E'(u) = E(u), E'(\mathrm{id}_{\underline{1}_P}) = \mathrm{id}_{\underline{1}_Q} \\ \check{E}'_{A,B} &= \check{E}_{A,B}, \quad \check{E}'_{\underline{1}_P,A} = g^{-1}_{EA}, \quad \check{E}'_{A,\underline{1}_P} = d^{-1}_{EA}, \check{E}'_{\underline{1}_P,\underline{1}_P} = d^{-1}_{\underline{1}_Q} = g^{-1}_{\underline{1}_Q} \end{aligned} \tag{4.9}$$

pour $A, B \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}$ et $u \in \mathrm{Fl}\,\underline{A}$. D'où l'unicité de $(E', \check{E}')$.

Pour construire $(E', \check{E}')$, définissons le par les formules (4.9). On vérifie aussitôt que c' est un $\otimes$-foncteur ACU de $\underline{P}$ dans $\underline{Q}$ tel que $(E, \check{E}) = (E', \check{E}') \circ (D, \check{D})$ et $\widehat{E}' = \mathrm{id}_{\underline{1}_Q}$, ce qui démontre l'assertion. □

Revenons au cas général. Les hypothèses sur $\underline{A}, \underline{A}', (T, \check{T}) \colon \underline{A}' \to \underline{A}$ sont toujours comme au début du no.

Proposition 4.10. *Soient $A, B \in \operatorname{Ob} \underline{A}$, $\Phi(A,B)$ l'ensemble des triples (A', B', u) où $A', B' \in \operatorname{Ob} \underline{A}'$, $u \in \operatorname{Fl} \underline{A}$, $u \colon A \otimes TA' \to B \otimes TB'$. Soit $\mathcal{R}_{A,B}$ la relation binaire définie dans $\Phi(A,B)$ de la façon suivante:*

$$(A'_1, B'_1, u_1) \mathcal{R}_{A,B} (A'_2, B'_2, u_2)$$

si et sulement s'il existe des isomorphismes

$$u' \colon A'_1 \otimes C'_1 \xrightarrow{\sim} A'_2 \otimes C'_2, \quad v' \colon B'_1 \otimes C'_1 \xrightarrow{\sim} B'_2 \otimes C'_2$$

dans $\underline{A}'$ pour des objets C'_1, C'_2 de $\underline{A}'$, tels que le diagramme
(4.11)

$$\begin{tikzcd}
& A \otimes T(A'_1 \otimes C'_1) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes Tu'"] & A \otimes T(A'_2 \otimes C'_2) & \\
A \otimes (TA'_1 \otimes TC'_1) \arrow[ur, "\mathrm{id} \otimes \check{T}"] \arrow[d, "a"] & & & A \otimes (TA'_2 \otimes TC'_2) \arrow[ul, "\mathrm{id} \otimes \check{T}"'] \arrow[d, "a"'] \\
(A \otimes TA'_1) \otimes TC'_1 \arrow[d, "u_1 \otimes \mathrm{id}"] & & & (A \otimes TA'_2) \otimes TC'_2 \arrow[d, "u_2 \otimes \mathrm{id}"] \\
(B \otimes TB'_1) \otimes TC'_1 & & & (B \otimes TB'_2) \otimes TC'_2 \\
B \otimes (TB'_1 \otimes TC'_1) \arrow[u, "a"] \arrow[dr, "\mathrm{id} \otimes \check{T}"'] & & & B \otimes (TB'_2 \otimes TC'_2) \arrow[u, "a"'] \arrow[dl, "\mathrm{id} \otimes \check{T}"] \\
& B \otimes T(B'_1 \otimes C'_1) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes Tv'"] & B \otimes T(B'_2 \otimes C'_2) &
\end{tikzcd}$$

soit commutatif. Alors $\mathcal{R}_{A,B}$ est une relation d'équivalence.

Proof. La relation $\mathcal{R}_{A,B}$ est manifestement réflexive et symétrique. Montrons qu'elle est transitive. Soients $(A'_1, B'_1, u_1), (A'_2, B'_2, u_2), (A'_3, B'_3, u_3) \in \Phi(A,B)$ tels que $(A'_1, B'_1, u_1) \mathcal{R}_{A,B} (A'_2, B'_2, u_2)$ et $(A'_2, B'_2, u_2) \mathcal{R}_{A,B} (A'_3, B'_3, u_3)$, i.e., il existe des isomorphismes

$$\begin{aligned} u' \colon A'_1 \otimes C'_1 \xrightarrow{\sim} A'_2 \otimes C'_2, \quad v' \colon B'_1 \otimes C'_1 \xrightarrow{\sim} B'_2 \otimes C'_2 \\ v'' \colon A'_2 \otimes C''_2 \xrightarrow{\sim} A'_3 \otimes C'_3, \quad w' \colon B'_2 \otimes C''_2 \xrightarrow{\sim} B'_3 \otimes C'_3 \end{aligned}$$

pour des objets C'_1, C'_2, C''_2, C'_3 de $\underline{A}'$ tels qu'on ait la commutativité du diagramme (4.11) et du diagramme (4.12) suivant

(4.12)

$$\begin{tikzcd}
& A\otimes T(A'_2\otimes C''_2) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes Tv''"] & A\otimes T(A'_3\otimes C'_3) & \\
A\otimes(TA'_2\otimes TC''_2) \arrow[ur, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"] \arrow[d, "a"] & & & A\otimes(TA'_3\otimes TC'_3) \arrow[ul, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"'] \arrow[d, "a"'] \\
(A\otimes TA'_2)\otimes TC''_2 \arrow[d, "u_2\otimes\mathrm{id}"] & & & (A\otimes TA'_3)\otimes TC'_3 \arrow[d, "u_3\otimes\mathrm{id}"] \\
(B\otimes TB'_2)\otimes TC''_2 & & & (B\otimes TB'_3)\otimes TC'_3 \\
B\otimes(TB'_2\otimes TC''_2) \arrow[u, "a"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"'] & & & B\otimes(TB'_3\otimes TC'_3) \arrow[u, "a"] \arrow[dl, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"] \\
& B\otimes T(B'_2\otimes C''_2) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes w'"] & B\otimes T(B'_3\otimes C'_3). &
\end{tikzcd}$$

Il faut faire attention quand on a parle de la commutativité des diagrammes (4.11) et (4.12): dans ces diagrammes toutes les flèches sont inversibles sauf $u_1 \otimes \mathrm{id}_{TC'_1}$, $u_2 \otimes \mathrm{id}_{TC''_2}$ et $u_3 \otimes \mathrm{id}_{TC'_3}$.

Venonous maintenant à la démonstration. Pour cela, considérons les diagrammes (4.13) et (4.14) suivants

$$
\begin{tikzcd}
A\otimes T((A'_1\otimes C'_1)\otimes C''_2) \arrow[ddddd, bend right=60, "\mathrm{id}\otimes T(u'\otimes \mathrm{id})"'] & A\otimes T(A'_1\otimes (C'_1\otimes C''_2)) \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes Ta'"'] & A\otimes (TA'_1\otimes T(C'_1\otimes C''_2)) \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes \check{T}"'] \arrow[r, "a"] & (A\otimes TA'_1)\otimes T(C'_1\otimes C''_2) \arrow[r, dash, "u_1\otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & {} \\
A\otimes (T(A'_1\otimes C'_1)\otimes TC''_2) \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes \check{T}"'] \arrow[d, "a"] \arrow[r, phantom, "(\mathrm{I})"] & & & (A\otimes TA'_1)\otimes (TC'_1\otimes TC''_2) \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes \check{T}"] \arrow[d, "a"'] \arrow[r, dash, "u_1\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & {} \\
(A\otimes T(A'_1\otimes C'_1))\otimes TC''_2 \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes Tu')\otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, phantom, shift right=20mm, "(\mathrm{X})"] & & (A\otimes (TA'_1\otimes TC'_1))\otimes TC''_2 \arrow[ll, "(\mathrm{id}\otimes \check{T})\otimes \mathrm{id}"'] \arrow[r, "a\otimes \mathrm{id}"] & ((A\otimes TA'_1)\otimes TC'_1)\otimes TC''_2 \arrow[r, dash, "(u_1\otimes \mathrm{id})\otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{V})"] & {} \\
(A\otimes T(A'_2\otimes C'_2))\otimes TC''_2 & & (A\otimes (TA'_2\otimes TC'_2))\otimes TC''_2 \arrow[ll, "(\mathrm{id}\otimes \check{T})\otimes \mathrm{id}"'] \arrow[r, "a\otimes \mathrm{id}"] & ((A\otimes TA'_2)\otimes TC'_2)\otimes TC''_2 \arrow[r, dash, "(u_2\otimes \mathrm{id})\otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VII})"] & {} \\
A\otimes (T(A'_2\otimes C'_2)\otimes TC''_2) \arrow[u, "a"'] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes \check{T}"] \arrow[r, phantom, "(\mathrm{VI})"] & & & (A\otimes TA'_2)\otimes (TC'_2\otimes TC''_2) \arrow[u, "a"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes \check{T}"'] \arrow[r, dash, "u_2\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VIII})"] & {} \\
A\otimes T((A'_2\otimes C'_2)\otimes C''_2) & A\otimes T(A'_2\otimes (C'_2\otimes C''_2)) \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes Ta'"'] & A\otimes (TA'_2\otimes T(C'_2\otimes C''_2)) \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes \check{T}"'] \arrow[r, "a"] & (A\otimes TA'_2)\otimes T(C'_2\otimes C''_2) \arrow[r, dash, "u_2\otimes \mathrm{id}"] & {}
\end{tikzcd}
\tag{4.13}
$$

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & (B\otimes TB_1')\otimes T(C_1'\otimes C_2'') & B\otimes(TB_1'\otimes T(C_1'\otimes C_2'')) \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"] & B\otimes T(B_1'\otimes(C_1'\otimes C_2'')) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes Ta'"] & B\otimes T((B_1'\otimes C_1')\otimes C_2'') \arrow[ddddd, bend left=60, "\mathrm{id}\otimes T(v'\otimes\mathrm{id})"] \\
{} \arrow[r] & (B\otimes TB_1')\otimes(TC_1'\otimes TC_2'') \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"'] \arrow[d, "a"] & & (\mathrm{IV}) & B\otimes(T(B_1'\otimes C_1')\otimes TC_2'') \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"] \arrow[d, "a"'] \\
{} \arrow[r] & ((B\otimes TB_1')\otimes TC_1')\otimes TC_2'' & (B\otimes(TB_1'\otimes TC_1'))\otimes TC_2'' \arrow[l, "a\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[rr, "(\mathrm{id}\otimes\check{T})\otimes\mathrm{id}"] & & (B\otimes T(B_1'\otimes C_1'))\otimes TC_2'' \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes Tv')\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[d, phantom, shift left=10ex, "(\mathrm{XI})"] \\
{} \arrow[r] & ((B\otimes TB_2')\otimes TC_2')\otimes TC_2'' & (B\otimes(TB_2'\otimes TC_2'))\otimes TC_2'' \arrow[l, "a\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[rr, "(\mathrm{id}\otimes\check{T})\otimes\mathrm{id}"] & & (B\otimes T(B_2'\otimes C_2'))\otimes TC_2'' \\
{} \arrow[r] & (B\otimes TB_2')\otimes(TC_2'\otimes TC_2'') \arrow[u, "a"'] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"] & & (\mathrm{IX}) & B\otimes(T(B_2'\otimes C_2')\otimes TC_2'') \arrow[u, "a"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"'] \\
{} \arrow[r] & (B\otimes TB_2')\otimes T(C_2'\otimes C_2'') & B\otimes(TB_2'\otimes T(C_2'\otimes C_2')) \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"] & B\otimes T(B_2'\otimes(C_2'\otimes C_2')) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes Ta'"] & B\otimes T((B_2'\otimes C_2')\otimes C_2')
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
& A\otimes T(A_1'\otimes(C_2''\otimes C_1')) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes T(\mathrm{id}\otimes c')"] & A\otimes(TA_1'\otimes T(C_2''\otimes C_1')) \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"'] \arrow[r, "a"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{XII})"] & (A\otimes TA_1')\otimes T(C_2''\otimes C_1') \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes Tc"'] \arrow[r, dash, "u_1\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{XIII})"] & {} \\
A\otimes T((A_1'\otimes C_1')\otimes C_2'') \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes T(u'\otimes\mathrm{id})"] & A\otimes T(A_1'\otimes(C_1'\otimes C_2'')) \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes Ta'"'] & A\otimes(TA_1'\otimes T(C_1'\otimes C_2'')) \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"'] \arrow[r, "a"] & (A\otimes TA_1')\otimes T(C_1'\otimes C_2'') \arrow[r, dash, "u_1\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{XV})"] & {} \\
A\otimes T((A_2'\otimes C_2')\otimes C_2'') & A\otimes T(A_2'\otimes(C_2'\otimes C_2'')) \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes Ta'"'] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes T(\mathrm{id}\otimes c')"] & A\otimes(TA_2'\otimes T(C_2'\otimes C_2'') \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"'] \arrow[r, "a"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{XVI})"] & (A\otimes TA_2')\otimes T(C_2'\otimes C_2'') \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes Tc'"'] \arrow[r, dash, "u_2\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{XVII})"] & {} \\
& A\otimes T(A_2'\otimes(C_2''\otimes C_2')) & A\otimes(TA_2'\otimes T(C_2''\otimes C_2')) \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"'] \arrow[r, "a"] & (A\otimes TA_2')\otimes T(C_2''\otimes C_2') \arrow[r, dash, "u_2\otimes\mathrm{id}"] & {}
\end{tikzcd}
\tag{4.14}
$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & (B\otimes TB_1')\otimes T(C_2''\otimes C_1') \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes Tc'"] & B\otimes (TB_1'\otimes T(C_2''\otimes C_1')) \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{XIV})"] & B\otimes T(B_1'\otimes (C_2''\otimes C_1')) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes T(\mathrm{id}\otimes c')"'] & \\
{} \arrow[r] & (B\otimes TB_1')\otimes T(C_1'\otimes C_2'') & B\otimes (TB_1'\otimes T(C_1'\otimes C_2'')) \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"] & B\otimes T(B_1'\otimes (C_1'\otimes C_2'')) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes Ta'"] & B\otimes T((B_1'\otimes C_1')\otimes C_2'') \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes T(v'\otimes\mathrm{id})"'] \\
{} \arrow[r] & (B\otimes TB_2')\otimes T(C_2'\otimes C_2'') \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes Tc'"] & B\otimes (TB_2'\otimes T(C_2'\otimes C_2'')) \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{XVIII})"] & B\otimes T(B_2'\otimes (C_2'\otimes C_2'')) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes T(\mathrm{id}\otimes c')"'] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes Ta'"] & B\otimes T((B_2'\otimes C_2')\otimes C_2'') \\
{} \arrow[r] & (B\otimes TB_2')\otimes T(C_2''\otimes C_2') & B\otimes (TB_2'\otimes T(C_2''\otimes C_2')) \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"] & B\otimes T(B_2'\otimes (C_2''\otimes C_2')) &
\end{tikzcd}$$

dans lesquels la commutativité des régions (I), (IV),(VI),(IX),(XII),(XIV),(XVI), (XVIII) résulte de la Proposition 2.172; celle de (II), (VIII) de la fonctorialité de $\check{T}$; celle de (III), (VII) de la fonctorialité de a; celle de (V) est donnée par l'hypothèse; celle de (X), (XI) vient de la fonctorialité de a et $\check{T}$; enfin celle de (XIII), (XVII) découle de la fonctorialité de c'. On en conclut la commutativité du circuit extérieur du diagramme (4.13), et par suite celle du circuit extérieur de (4.14) en remarquant que la région (XV) de (4.14) n'est autre que le circuit extérieur de (4.13). Ces considérations nous permet d'affirmer qu'il existe des isomorphismes

$$A'_1 \otimes (C''_2 \otimes C'_1) \underset{u'_1}{\xrightarrow{\sim}} A'_2 \otimes (C''_2 \otimes C'_2), \quad B'_1 \otimes (C''_2 \otimes C'_1) \underset{v'_1}{\xrightarrow{\sim}} B'_2 \otimes (C''_2 \otimes C'_2)$$

$$A'_2 \otimes (C''_2 \otimes C'_2) \underset{v''_1}{\xrightarrow{\sim}} A'_3 \otimes (C'_3 \otimes C'_2), \quad B'_2 \otimes (C''_2 \otimes C'_2) \underset{w'_1}{\xrightarrow{\sim}} B'_3 \otimes (C'_3 \otimes C'_2)$$

définis par les diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{tikzcd}
A'_1 \otimes (C''_2 \otimes C'_1) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes c'"] \arrow[d, "u'_1"'] & A'_1 \otimes (C'_1 \otimes C''_2) \arrow[r, "a'"] & (A'_1 \otimes C'_1) \otimes C''_2 \arrow[d, "u'\otimes\mathrm{id}"] \\
A'_2 \otimes (C''_2 \otimes C'_1) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes c'"] & A'_2 \otimes (C'_2 \otimes C''_2) \arrow[r, "a'"] & (A'_2 \otimes C'_2) \otimes C''_2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
B'_1 \otimes (C''_2 \otimes C'_1) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes c'"] \arrow[d, "v'_1"'] & B'_1 \otimes (C'_1 \otimes C''_2) \arrow[r, "a'"] & (B'_1 \otimes C'_1) \otimes C''_2 \arrow[d, "v'\otimes\mathrm{id}"] \\
B'_2 \otimes (C''_2 \otimes C'_1) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes c'"] & B'_2 \otimes (C'_2 \otimes C''_2) \arrow[r, "a'"] & (B'_2 \otimes C'_2) \otimes C''_2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A'_2 \otimes (C''_2 \otimes C'_2) \arrow[r, "a'"] \arrow[d, "v''_1"'] & (A'_2 \otimes C''_2) \otimes C'_2 \arrow[d, "v''\otimes\mathrm{id}"] \\
A'_3 \otimes (C'_3 \otimes C'_2) \arrow[r, "a'"] & (A'_3 \otimes C'_3) \otimes C'_2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
B'_2 \otimes (C''_2 \otimes C'_2) \arrow[r, "a'"] \arrow[d, "w''_1"'] & (B'_2 \otimes C''_2) \otimes C'_2 \arrow[d, "w'\otimes\mathrm{id}"] \\
B'_3 \otimes (C'_3 \otimes C'_2) \arrow[r, "a'"] & (B'_3 \otimes C'_3) \otimes C'_2
\end{tikzcd}$$

tels que les diagrammes suivants soient commutatifs
(4.15)

$$
\begin{tikzcd}
A\otimes(TA'_1\otimes T(C''_2\otimes C'_1)) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"] & (A\otimes TA'_1)\otimes T(C''_2\otimes C'_1) \arrow[r, "u_1\otimes\mathrm{id}"] & (B\otimes TB'_1)\otimes T(C''_2\otimes C'_1) & B\otimes(TB'_1\otimes T(C''_2\otimes C'_1)) \arrow[l, "a"'] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"'] \\
A\otimes T(A'_1\otimes(C''_2\otimes C'_1)) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes Tu'_1"] & & & B\otimes T(B'_1\otimes(C''_2\otimes C'_1)) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes Tv'_1"'] \\
A\otimes T(A'_2\otimes(C''_2\otimes C'_2)) & & & B\otimes T(B'_2\otimes(C''_2\otimes C'_2)) \\
A\otimes(TA'_2\otimes T(C''_2\otimes C'_2)) \arrow[r, "a"] \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"'] & (A\otimes TA'_2)\otimes T(C''_2\otimes C'_2) \arrow[r, "u_2\otimes\mathrm{id}"] & (B\otimes TB'_2)\otimes T(C''_2\otimes C'_2) & B\otimes(TB'_2\otimes T(C''_2\otimes C'_2)) \arrow[l, "a"'] \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"]
\end{tikzcd}
$$

(4.16)

$$
\begin{tikzcd}
A\otimes(TA'_2\otimes T(C''_2\otimes C'_2)) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"] & (A\otimes TA'_2)\otimes T(C''_2\otimes C'_2) \arrow[r, "u_2\otimes\mathrm{id}"] & (B\otimes TB'_2)\otimes T(C''_2\otimes C'_2) & B\otimes(TB'_2\otimes T(C''_2\otimes C'_2)) \arrow[l, "a"'] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"'] \\
A\otimes T(A'_2\otimes(C''_2\otimes C'_2)) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes Tv''_1"] & & & B\otimes T(B'_2\otimes(C''_2\otimes C'_2)) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes Tw'_1"'] \\
A\otimes T(A'_3\otimes(C'_3\otimes C'_2)) & & & B\otimes T(B'_3\otimes(C'_3\otimes C'_2)) \\
A\otimes(TA'_3\otimes T(C'_3\otimes C'_2)) \arrow[r, "a"] \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"'] & (A\otimes TA'_3)\otimes T(C'_3\otimes C'_2) \arrow[r, "u_3\otimes\mathrm{id}"] & (B\otimes TB'_3)\otimes T(C'_3\otimes C'_2) & B\otimes(TB'_3\otimes T(C'_3\otimes C'_2)) \arrow[l, "a"'] \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"]
\end{tikzcd}
$$

ce qui permet de conclure la commutativité du diagramme

$$
\begin{tikzcd}
A\otimes(TA'_1\otimes T(C''_2\otimes C'_1)) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"] & (A\otimes TA'_1)\otimes T(C''_2\otimes C'_1) \arrow[r, "u_1\otimes\mathrm{id}"] & (B\otimes TB'_1)\otimes T(C''_2\otimes C'_1) & B\otimes(TB'_1\otimes T(C''_2\otimes C'_1)) \arrow[l, "a"'] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"'] \\
A\otimes T(A'_1\otimes(C''_2\otimes C'_1)) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes T(v''_1u'_1)"] & & & B\otimes T(B'_1\otimes(C''_2\otimes C'_1)) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes T(w'_1v'_1)"'] \\
A\otimes T(A'_3\otimes(C'_3\otimes C'_2)) & & & B\otimes T(B'_3\otimes(C'_3\otimes C'_2)) \\
A\otimes(TA'_3\otimes T(C'_3\otimes C'_2)) \arrow[r, "a"] \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"'] & (A\otimes TA'_3)\otimes T(C'_3\otimes C'_2) \arrow[r, "u_3\otimes\mathrm{id}"] & (B\otimes TB'_3)\otimes T(C'_3\otimes C'_2) & B\otimes(TB'_3\otimes T(C'_3\otimes C'_2)) \arrow[l, "a"'] \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"]
\end{tikzcd}
$$

D'où $(A'_1, B'_1, u_1)\mathcal{R}_{A,B}(A'_3, B'_3, u_3)$. $\square$

Nous désignons par $[A', B', u]$ la clase d'équivalence de (A', B', u).

Remarks 4.17.

(1) Soient $[A'_1, B'_1, u_1], [A'_2, B'_2, u_2] \in \Phi(A,B)/\mathcal{R}_{A,B}$, $u' \colon A'_1 \xrightarrow{\sim} A'_2, v' \colon B'_1 \xrightarrow{\sim} B'_2$ tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A \otimes TA'_1 \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes Tu'"'] & B \otimes TB'_1 \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes Tv'"] \\
A \otimes TA'_2 \arrow[r, "u_2"] & B \otimes TB'_2
\end{tikzcd}$$

soit commutatif. Alors $[A'_1, B'_1, u_1] = [A'_2, B'_2, u_2]$. En effet, prenons un objet quelconque C'_1 de A'. Le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
A \otimes T(A'_1 \otimes C'_1) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes T(u'\otimes\mathrm{id})"] & A \otimes (TA'_1 \otimes TC'_1) \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"'] \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes(Tu'\otimes\mathrm{id})"'] & (A \otimes TA'_1) \otimes TC'_1 \arrow[r, "u_1\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes Tu')\otimes\mathrm{id}"'] & (B \otimes TB'_1) \otimes TC'_1 \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes Tv')\otimes\mathrm{id}"'] & B \otimes (TB'_1 \otimes TC'_1) \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes(Tv'\otimes\mathrm{id})"'] & B \otimes T(B'_1 \otimes C'_1) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes T(v'\otimes\mathrm{id})"'] \\
A \otimes T(A'_2 \otimes C'_1) & A \otimes (TA'_2 \otimes TC'_1) \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"'] \arrow[r, "a"] & (A \otimes TA'_2) \otimes TC'_1 \arrow[r, "u_2\otimes\mathrm{id}"] & (B \otimes TB'_2) \otimes TC'_1 & B \otimes (TB'_2 \otimes TC'_1) \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"] & B \otimes T(B'_2 \otimes C'_1)
\end{tikzcd}$$

ayant ses régions commutatives, ce qu'on peut vérifier aussitôt, nous donne la commutativité de son circuit extérieur.

(2) Soient $[A', B', u] \in \Phi(A,B)/\mathcal{R}_{A,B}$, $u' \colon B'' \xrightarrow{\sim} B'' \in \mathrm{Fl}\,\underline{A}'$. Alors $[A', B', u] = [A' \otimes B'', B' \otimes B'', \widetilde{u}]$, $\widetilde{u}$ étant défini par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
A \otimes T(A' \otimes B'') \arrow[d, "\widetilde{u}"'] & A \otimes (TA' \otimes TB'') \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"'] \arrow[r, "a"] & (A \otimes TA') \otimes TB'' \arrow[d, "u\otimes Tu'"] \\
B \otimes T(B' \otimes B'') & B \otimes (TB' \otimes TB'') \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"'] \arrow[r, "a"] & (B \otimes TB') \otimes TB''
\end{tikzcd}$$

En effet considérons le diagramme ci-dessous où C' est un objet quelconque de $\underline{A}'$. Dans ce diagramme, la commutativité des régions (I), (VI), (IX) résulte de la Proposition 2.172; celle de (II), (X) de la fonctorialité de $\check{T}$; celle de (III),(VII),(VIII) de la fonctorialité de a; celle de (IV) est évidente; celle de (V) est donnée par le diagramme commutatif définisant $\widetilde{u}$; enfin celle de (XI) vient de la définition de $v' = ((\mathrm{id}\otimes u')\otimes\mathrm{id})a'$. D'où la commutativité du circuit extérieur qui donne l'égalité $[A', B', u] = [A' \otimes B'', B' \otimes B'', \widetilde{u}]$.

$$\begin{tikzcd}
A \otimes T(A' \otimes (B'' \otimes C')) \arrow[ddddd, "\mathrm{id} \otimes Ta'"'] & A \otimes (TA' \otimes T(B'' \otimes C')) \arrow[l, "\mathrm{id} \otimes \check{T}"'] \arrow[r, "a"] & (A \otimes TA') \otimes T(B'' \otimes C') \arrow[r, "u \otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(II)}"] & (B \otimes TB') \otimes T(B'' \otimes C') \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(VI)}"] & B \otimes (TB' \otimes T(B'' \otimes C')) \arrow[l, "a"'] \arrow[r, dash, "\mathrm{id} \otimes \check{T}"] & {} \\
 & & (A \otimes TA') \otimes (TB'' \otimes TC') \arrow[u, "\mathrm{id} \otimes \check{T}"] \arrow[r, "u \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "a"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(III)}"] & (B \otimes TB') \otimes (TB'' \otimes TC') \arrow[u, "\mathrm{id} \otimes \check{T}"'] \arrow[d, "a"] & & \\
 & {} \arrow[r, phantom, "\mathrm{(I)}"] & ((A \otimes TA') \otimes TB'') \otimes TC' \arrow[r, "(u \otimes \mathrm{id}) \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(IV)}"] & ((B \otimes TB') \otimes TB'') \otimes TC' \arrow[d, "(\mathrm{id} \otimes Tu') \otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(VII)}"] & (B \otimes (TB' \otimes TB'')) \otimes TC' \arrow[l, "a \otimes \mathrm{id}"'] \arrow[d, "(\mathrm{id} \otimes (\mathrm{id} \otimes Tu') \otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(VIII)}"] & {} \arrow[l, "a"'] \\
 & & ((A \otimes TA') \otimes TB'') \otimes TC' \arrow[r, "(u \otimes Tu') \otimes \mathrm{id}"] & ((B \otimes TB') \otimes TB'') \otimes TC' & (B \otimes (TB' \otimes TB'')) \otimes TC' \arrow[l, "a \otimes \mathrm{id}"'] \arrow[d, phantom, "\mathrm{(IX)}"] & {} \arrow[l, "a"'] \\
 & & (A \otimes (TA' \otimes TB'')) \otimes TC' \arrow[u, "a \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "(\mathrm{id} \otimes \check{T}) \otimes \mathrm{id}"] \arrow[r, phantom, "\mathrm{(V)}"] & (B \otimes (TB' \otimes TB'')) \otimes TC' \arrow[u, "a \otimes \mathrm{id}"'] \arrow[d, "(\mathrm{id} \otimes \check{T}) \otimes \mathrm{id}"] & {} & \\
A \otimes T((A' \otimes B'') \otimes C') & A \otimes (T(A' \otimes B'') \otimes TC') \arrow[l, "\mathrm{id} \otimes \check{T}"'] \arrow[r, "a"] & (A \otimes T(A' \otimes B'')) \otimes TC' \arrow[r, "\widetilde{u} \otimes \mathrm{id}"] & (B \otimes T(B' \otimes B'')) \otimes TC' & B \otimes (T(B' \otimes B'') \otimes TC') \arrow[l, "a"'] \arrow[r, dash, "\mathrm{id} \otimes \check{T}"] & {}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & B\otimes T(B'\otimes(B''\otimes C')) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes Ta'"'] \arrow[dddddd, bend left=60, "\mathrm{id}\otimes Ta'"] & \\
& B\otimes T((B'\otimes B'')\otimes C') \arrow[ddddd, bend left=50, "\mathrm{id}\otimes T((\mathrm{id}\otimes u')\otimes\mathrm{id})"'] & \arrow[dd, phantom, "(\mathrm{XI})"] \\
& B\otimes(T(B'\otimes B'')\otimes TC') \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"'] \arrow[r, phantom, "(\mathrm{X})"] & \\
{} \arrow[r, dash] & B\otimes((TB'\otimes TB'')\otimes TC') \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes(\check{T}\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes((\mathrm{id}\otimes Tu')\otimes\mathrm{id})"'] & \\
{} \arrow[r, dash] & B\otimes((TB'\otimes TB'')\otimes TC') \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes(\check{T}\otimes\mathrm{id})"'] & \\
& B\otimes(T(B'\otimes B'')\otimes TC') \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"'] & \\
{} \arrow[r] & B\otimes T((B'\otimes B'')\otimes C') &
\end{tikzcd}$$

(3) Soient $[A', B', u] \in \Phi(A,B)/\mathcal{R}_{A,B}$, $v'\colon A'' \xrightarrow{\sim} A'' \in \mathrm{Fl}\,\underline{A}'$. Alors $[A', B', u] = [A''\otimes A', A''\otimes B', \overset{\wr}{u}]$, $\overset{\wr}{u}$ étant défini par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
A\otimes T(A''\otimes A') \arrow[d, "\overset{\wr}{u}"'] & A\otimes(TA''\otimes TA'') \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"'] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes c"] & A\otimes(TA'\otimes TA'') \arrow[r, "a"] & (A\otimes TA')\otimes TA'' \arrow[d, "u\otimes Tv'"] \\
B\otimes T(A''\otimes B') & B\otimes(TA''\otimes TB') \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"'] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes c"] & B\otimes(TB'\otimes TA'') \arrow[r, "a"] & (B\otimes TB')\otimes TA''
\end{tikzcd}$$

En effet il suffit de considérer le diagramme suivant dont toutes les régions sont commutatives, ce qui implique le circuit extérieur commutatif et par suite l'égalité $[A', B', u] = [A''\otimes A', A''\otimes B', \overset{\wr}{u}]$. Dans ce diagramme, C' est un objet quelconque de $\underline{A}'$ et $w' = (c'\otimes\mathrm{id})((\mathrm{id}\otimes v')\otimes\mathrm{id})a'$.

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes T(A' \otimes (A'' \otimes C')) \arrow[ddd, "\mathrm{id} \otimes Ta'"] \arrow[dddddd, bend right, "\mathrm{id} \otimes T((c' \otimes \mathrm{id})a')"'] & A \otimes (TA' \otimes T(A'' \otimes C')) \arrow[l, "\mathrm{id} \otimes \check{T}"'] \arrow[r, "a"] & (A \otimes TA') \otimes T(A'' \otimes C') \arrow[r, "u \otimes \mathrm{id}"] & (B \otimes TB') \otimes T(A'' \otimes C') & \arrow[l, "a"'] \\
 & & (A \otimes TA') \otimes (TA'' \otimes TC') \arrow[u, "\mathrm{id} \otimes \check{T}"'] \arrow[d, "a"] \arrow[r, "u \otimes \mathrm{id}"] & (B \otimes TB') \otimes (TA'' \otimes TC') \arrow[u, "\mathrm{id} \otimes \check{T}"'] \arrow[d, "a"] & \\
 & & ((A \otimes TA') \otimes TA'') \otimes TC' \arrow[r, "(u \otimes \mathrm{id}) \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, equal] & ((B \otimes TB') \otimes TA'') \otimes TC' \arrow[d, "(\mathrm{id} \otimes Tv') \otimes \mathrm{id}"] & \arrow[l, "a \otimes \mathrm{id}"'] \\
A \otimes T((A' \otimes A'') \otimes C') \arrow[ddd, "\mathrm{id} \otimes T(c' \otimes \mathrm{id})"] & & ((A \otimes TA') \otimes TA'') \otimes TC' \arrow[r, "(u \otimes Tv') \otimes \mathrm{id}"] & ((B \otimes TB') \otimes TA'') \otimes TC' & \arrow[l, "a \otimes \mathrm{id}"'] \\
 & & (A \otimes (TA' \otimes TA'')) \otimes TC' \arrow[u, "a \otimes \mathrm{id}"'] \arrow[d, "(\mathrm{id} \otimes c) \otimes \mathrm{id}"] & (B \otimes (TB' \otimes TA'')) \otimes TC' \arrow[u, "a \otimes \mathrm{id}"'] \arrow[d, "(\mathrm{id} \otimes c) \otimes \mathrm{id}"] & \\
 & & (A \otimes (TA'' \otimes TA')) \otimes TC' \arrow[d, "(\mathrm{id} \otimes \check{T}) \otimes \mathrm{id}"] & (B \otimes (TA'' \otimes TB')) \otimes TC' \arrow[d, "(\mathrm{id} \otimes \check{T}) \otimes \mathrm{id}"] & \\
A \otimes T((A'' \otimes A') \otimes C') & A \otimes (T(A'' \otimes A') \otimes TC') \arrow[l, "\mathrm{id} \otimes \check{T}"'] \arrow[r, "a"] & (A \otimes T(A'' \otimes A')) \otimes TC' \arrow[r, "\overset{\wr}{u} \otimes \mathrm{id}"] & (B \otimes T(A'' \otimes B')) \otimes TC' & \arrow[l, "a"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, dash] & B\otimes(TB'\otimes T(A''\otimes C')) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"] & B\otimes T(B'\otimes(A''\otimes C')) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes Ta'"'] \arrow[ddddddd, bend left, "\mathrm{id}\otimes Tw'"] \\
 & & B\otimes T((B'\otimes A'')\otimes C') \arrow[ddddd, bend left, "\mathrm{id}\otimes T((\mathrm{id}\otimes v')\otimes \mathrm{id})"] \\
 & & B\otimes(T(B'\otimes A'')\otimes TC') \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"] \\
{} \arrow[r, dash] & (B\otimes(TB'\otimes TA''))\otimes TC' \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes(\mathrm{id}\otimes Tv'))\otimes\mathrm{id}"'] & B\otimes((TB'\otimes TA'')\otimes TC') \arrow[l, "a"'] \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes(\check{T}\otimes\mathrm{id})"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes((\mathrm{id}\otimes Tv')\otimes\mathrm{id})"'] \\
{} \arrow[r, dash] & (B\otimes(TB'\otimes TA''))\otimes TC' & B\otimes((TB'\otimes TA'')\otimes TC') \arrow[l, "a"'] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes(\check{T}\otimes\mathrm{id})"'] \\
 & & B\otimes(T(B'\otimes A'')\otimes TC') \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"'] \\
 & & B\otimes T((B'\otimes A'')\otimes C') \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes T(c'\otimes\mathrm{id})"'] \\
{} \arrow[r, dash] & B\otimes(T(A''\otimes B')\otimes TC') \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"] & B\otimes T((A''\otimes B'(\otimes C')
\end{tikzcd}
$$

Proposition 4.18. *Soient* $A, B, C \in \operatorname{Ob} \underline{A}$, $[A', B', u] \in \Phi(A,B)/\mathcal{R}_{A,B}$, $[B'', C'', v] \in \Phi(B,C)/\mathcal{R}_{B,C}$. *Alors la classe d'équivalence*

$$[A' \otimes B'', B' \otimes C'', w] \in \Phi(A,C)/\mathcal{R}_{A,C}$$

avec w *défini par le diagramme commutatif*

(4.19)
$$
\begin{tikzcd}
A\otimes T(A'\otimes B'') \arrow[dddd, "w"] & A\otimes(TA'\otimes TB'') \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"'] \arrow[r, "a"] & (A\otimes TA')\otimes TB'' \arrow[r, "u\otimes\mathrm{id}"] & (B\otimes TB')\otimes TB'' \\
 & & & B\otimes(TB'\otimes TB'') \arrow[u, "a"'] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes c"'] \\
 & & & B\otimes(TB''\otimes TB') \arrow[d, "a"'] \\
 & & & (B\otimes TB'')\otimes TB' \arrow[d, "v\otimes\mathrm{id}"'] \\
C\otimes T(B'\otimes C'') & C\otimes(TB'\otimes TC'') \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"'] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes c"] & C\otimes(TC''\otimes TB'') \arrow[r, "a"] & (C\otimes TC'')\otimes TB'
\end{tikzcd}
$$

est indépendante des représentants des classes $[A', B', u], [B'', C'', v]$.

Proof. Soient $[A', B', u] = [A'_1, B'_1, u_1], [B'', C'', v] = [B''_1, C''_1, v_1]$. Montrons d'abord que

$$[A'\otimes B'', B'\otimes C'', w] = [A'_1\otimes B'', B'_1\otimes C'', \Omega],$$

Ω étant défini de la même façon que w. L'égalité $[A', B', u] = [A'_1, B'_1, u_1]$ s'exprime par l'existence des isomorphismes $u'\colon A'\otimes C' \xrightarrow{\sim} A'_1\otimes C'_1, v'\colon B'\otimes C' \xrightarrow{\sim} B'_1\otimes C'_1$ tels qu'on ait la commutativité du diagramme

$$
\begin{tikzcd}
A\otimes T(A'\otimes C') \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes Tu'"'] & (A\otimes TA')\otimes TC' \arrow[r, "u\otimes\mathrm{id}"] & (B\otimes TB')\otimes TC' \arrow[r, dashed] & B\otimes T(B'\otimes C') \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes Tv'"'] \\
A\otimes T(A'_1\otimes C'_1) \arrow[r, dashed] & (A\otimes TA'_1)\otimes TC'_1 \arrow[r, "u\otimes\mathrm{id}"] & (B\otimes TB'_1)\otimes TC'_1 \arrow[r, dashed] & B\otimes T(B'_1\otimes C'_1)
\end{tikzcd}
$$

où les flèches en pointillé sont des composés des flèches construits à l'aide de $a, a^{-1}, \check{T}$, $\check{T}^{-1}$, des identités et de la loi $\otimes$ (voir diag. (4.11)). Désormais pour un $\otimes$-foncteur AC (resp. ACU) $(F, \check{F})$ d'une $\otimes$-catégorie AC (resp. ACU) $\underline{C}$ dans une $\otimes$-catégorie AC (respectivement ACU) $\underline{C}'$, en vertu de la Proposition 2.172 (resp. 2.170) nous marquerons souvent, pour abréger, en pointillé les flèches construits à l'aide de $a', (a')^{-1}, c', (c')^{-1}, Fa, Fa^{-1}, Fc, Fc^{-1}\check{F}, \check{F}^{-1}$, des identités et de la loi $\otimes$ (resp. a', $(a')^{-1}, c', (c')^{-1}, g', (g')^{-1}, d', (d')^{-1}, Fa, Fa^{-1}, Fc, Fc^{-1}, Fg, Fg^{-1}, Fd$, $Fd^{-1}, \widehat{F}, \widehat{F}^{-1}, \check{F}, \check{F}^{-1}$, des identités et de la loi $\otimes$), et les composés de ces flèches.

Soient u'_1, u'_2, v'_1, v'_2 les flèches de $\underline{A}'$ définis par les diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{tikzcd}
A' \otimes (B'' \otimes C') \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes c'"] \arrow[d, "u'_1"'] & A' \otimes (C' \otimes B'') \arrow[r, "a'"] & (A' \otimes C') \otimes B'' \arrow[d, "u' \otimes \mathrm{id}"'] \\
A'_1 \otimes (B'' \otimes C'_1) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes c'"] & A'_1 \otimes (C'_1 \otimes B'') \arrow[r, "a'"] & (A'_1 \otimes C'_1) \otimes B''
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(A' \otimes B'') \otimes C' \arrow[d, "u'_2"'] & A' \otimes (B'' \otimes C') \arrow[l, "a'"'] \arrow[d, "u'_1"'] \\
(A'_1 \otimes B'') \otimes C'_1 & A'_1 \otimes (B'' \otimes C'_1) \arrow[l, "a'"']
\end{tikzcd}$$

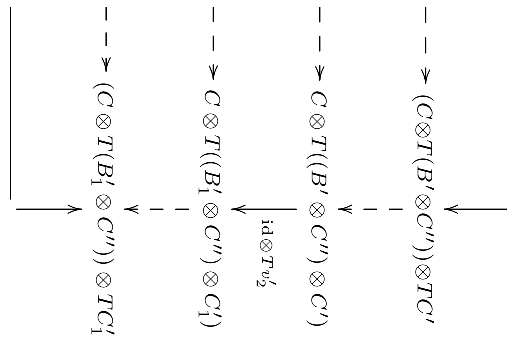
$$\begin{tikzcd}
B' \otimes (B'' \otimes C') \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes c'"] \arrow[d, "v'_1"'] & B' \otimes (C' \otimes B'') \arrow[r, "a'"] & (B' \otimes C') \otimes B'' \arrow[d, "v' \otimes \mathrm{id}"'] \\
B'_1 \otimes (B'' \otimes C'_1) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes c'"] & B'_1 \otimes (C'_1 \otimes B'') \arrow[r, "a'"] & (B'_1 \otimes C'_1) \otimes B''
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(B' \otimes C'') \otimes C' \arrow[d, "v'_2"'] & B' \otimes (C'' \otimes C') \arrow[l, "a'"'] \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes c'"] & B' \otimes (C' \otimes C'') \arrow[d, "a'"'] \\
(B'_1 \otimes C'') \otimes C'_1 & & (B' \otimes C') \otimes C'' \arrow[d, "v' \otimes \mathrm{id}"'] \\
B'_1 \otimes (C'' \otimes C'_1) \arrow[u, "a'"'] \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes c'"] & B'_1 \otimes (C'_1 \otimes C'') \arrow[r, "a'"] & (B'_1 \otimes C'_1) \otimes C''
\end{tikzcd}$$

Ensuite considérons le diagramme suivant dont la commutativité des régions (I), (XX) résulte de la définition de w et Ω (voir diag. (4.19)); celle de (II),(IV), (VI), (XV), (XVII),(XIX) résulte de la Proposition 2.172;

$$
\begin{tikzcd}
(A\otimes T(A'\otimes B''))\otimes TC' \arrow[rr, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[rrrrr, bend left, dash, "w\otimes \mathrm{id}"] \arrow[drr, phantom, "\mathrm{(II)}"] & & ((A\otimes TA')\otimes TB'')\otimes TC' \arrow[r, "(u\otimes \mathrm{id})\otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(III)}"] & ((B\otimes TB')\otimes TB'')\otimes TC' \arrow[rr, dashed, dash] \arrow[d, dashed] \arrow[drr, phantom, "\mathrm{(IV)}"] & \arrow[r, phantom, "\mathrm{(I)}"] & {} \\
A\otimes T((A'\otimes B'')\otimes C') \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes Tu'_2"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(VII)}"] & A\otimes T(A'\otimes (B''\otimes C')) \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes Tu'_1"] & (A\otimes TA')\otimes T(B''\otimes C') \arrow[r, "u\otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(VIII)}"] & (B\otimes TB')\otimes T(B''\otimes C') \arrow[r, dashed] & B\otimes T(B'\otimes (B''\otimes C')) \arrow[r, dashed, dash] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes Tv'_1"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(IX)}"] & {} \\
A\otimes T((A'_1\otimes B'')\otimes C'_1) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[drr, phantom, "\mathrm{(XV)}"] & A\otimes T(A'_1\otimes (B''\otimes C'_1)) \arrow[r, dashed] & (A\otimes TA'_1)\otimes T(B''\otimes C'_1) \arrow[r, "u_1\otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(XVI)}"] & (B\otimes TB')\otimes T(B''\otimes C'_1) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[drr, phantom, "\mathrm{(XVII)}"] & B\otimes T(B'_1\otimes (B''\otimes C'_1)) \arrow[r, dashed, dash] & {} \\
(A\otimes T(A'_1\otimes B''))\otimes TC'_1 \arrow[rr, dashed] \arrow[rrrrr, bend right, dash, "\mathrm{(XX)}", "w\otimes \mathrm{id}"'] & & ((A\otimes TA'_1)\otimes TB'')\otimes TC'_1 \arrow[r, "(u_1\otimes \mathrm{id})\otimes \mathrm{id}"] & ((B\otimes TB'_1)\otimes TB'')\otimes TC'_1 \arrow[rr, dashed, dash] & & {}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[rrr, dashed] & & & ((B \otimes TB') \otimes TB'') \otimes TC' \arrow[r, "(v \otimes \mathrm{id}) \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{V})"] & ((C \otimes TC'') \otimes TB') \otimes TC' \arrow[d, dashed] \arrow[rr, dashed] \arrow[u, phantom, "(\mathrm{I})"] & & {} \\
{} \arrow[r, dashed] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IX})"] & B \otimes T((B' \otimes C') \otimes B'') \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes T(v \otimes \mathrm{id})"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{X})"] & B \otimes T(B'' \otimes (B' \otimes C')) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes T(\mathrm{id} \otimes v')"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{XI})"] \arrow[u, phantom, "(\mathrm{IV})"] & (B \otimes TB'') \otimes T(B' \otimes C') \arrow[r, "v \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes Tv'"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{XII})"] & (C \otimes TC'') \otimes T(B' \otimes C') \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes Tv'"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{XIII})"] & C \otimes T(C'' \otimes (B' \otimes C')) \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes T(\mathrm{id} \otimes v')"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{XIV})"] \arrow[u, phantom, "(\mathrm{VI})"] & {} \\
{} \arrow[r, dashed] & B \otimes T((B'_1 \otimes C'_1) \otimes B'') \arrow[r] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{XVII})"] & B \otimes T(B'' \otimes (B'_1 \otimes C'_1)) \arrow[r] & (B \otimes TB'') \otimes T(B'_1 \otimes C'_1) \arrow[r, "v \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{XVIII})"] & (C \otimes TC'') \otimes T(B'_1 \otimes C'_1) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & C \otimes T(C'' \otimes (B'_1 \otimes C'_1)) \arrow[r, dashed] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{XIX})"] & {} \\
{} \arrow[rrr, dashed] & & & ((B \otimes TB'') \otimes TB'_1) \otimes TC'_1 \arrow[r, "(v \otimes \mathrm{id}) \otimes \mathrm{id}"] \arrow[r, phantom, shift right=4, "(\mathrm{XX})"'] & ((C \otimes TC'') \otimes TB'_1) \otimes TC'_1 \arrow[rr, dashed] & & {}
\end{tikzcd}
$$



celle de (III), (V),(X), (XI), (XIII), (XVI),(XVIII) résulte de la fonctorialité de $a, c', \check{T}$; celle de (VII),(IX), (XIV) de la définition de u_1', u_2', v_1', v_2'; celle de (VIII) de l'hypothése et de la commutativité du diagram (4.15); enfin celle de (XII) est évidente. D'où la commutativité du circuit extérieur, ce qui montre qu'on a bien $[A'\otimes B'', B'\otimes C'', w] = [A_1'\otimes B'', B_1'\otimes C'', \Omega]$. La démonstration de l'égalité $[A_1'\otimes B'', B_1'\otimes C'', \Omega] = [A_1'\otimes B_1'', B_1'\otimes C_1'', w_1]$ étant analogue, nous ne le faisons pas. On obtient donc

$$[A'\otimes B'', B'\otimes C'', w] = [A_1'\otimes B_1'', B_1'\otimes C_1'', w_1]$$

ce qui démontre la proposition. □

On pose

$$[A'\otimes B'', B'\otimes C'', w] = [B'', C'', v]\circ[A', B', u].$$

Proposition 4.20. *Soient* $[A', B', u]\in\Phi(A,B)/\mathcal{R}_{A,B}, [B'', C'', v]\in\Phi(B,C)/\mathcal{R}_{B,C}$ *et* $[C', D', w]\in\Phi(C,D)/\mathcal{R}_{C,D}$. *Alors*

$$[C', D', w]\circ([B'', C'', v]\circ[A', B', u]) = ([C', D', w]\circ[B'', C'', v])\circ[A', B', u].$$

Proof. En vertu de la définicion de $\circ$ dans la Proposition 4.18, nous avons

$$\begin{array}{rcl} [C', D', w]\circ([B'', C'', v]\circ[A', B', u]) & = & [A'\otimes(B''\otimes C'), B'\otimes(C''\otimes D'), \alpha] \\ ([C', D', w]\circ[B'', C'', v])\circ[A', B', u] & = & [(A'\otimes B'')\otimes C', (B'\otimes C'')\otimes D', \beta] \end{array}$$

avec α, β définis par les diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{tikzcd}
A \otimes T(A' \otimes (B'' \otimes C')) \arrow[r, dashed] \arrow[ddd, "\alpha"'] & (A \otimes TA') \otimes T(B'' \otimes C') \arrow[r, "u \otimes \mathrm{id}"] & (B \otimes TB') \otimes T(B'' \otimes C') \arrow[d, dashed] \\
 & & ((B \otimes TB'') \otimes TC') \otimes TB' \arrow[d, "(v \otimes \mathrm{id}) \otimes \mathrm{id}"'] \\
 & & ((C \otimes TC'') \otimes TC') \otimes TB' \arrow[d, dashed] \\
D \otimes T(B' \otimes (C'' \otimes D')) \arrow[r, dashed] & ((D \otimes TD') \otimes TC'') \otimes TB' & ((C \otimes TC') \otimes TC'') \otimes TB' \arrow[l, "(w \otimes \mathrm{id}) \otimes \mathrm{id}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \otimes T((A' \otimes B'') \otimes C') \arrow[r, dashed] \arrow[ddd, "\beta"'] & ((A \otimes TA') \otimes TB'') \otimes TC' \arrow[r, "(u \otimes \mathrm{id}) \otimes \mathrm{id}"] & ((B \otimes TB') \otimes TB'') \otimes TC' \arrow[d, dashed] \\
 & & ((B \otimes TB'') \otimes TB') \otimes TC' \arrow[d, "(v \otimes \mathrm{id}) \otimes \mathrm{id}"'] \\
 & & ((C \otimes TC'') \otimes TB') \otimes TC' \arrow[d, dashed] \\
D \otimes T((B' \otimes C'') \otimes D') \arrow[r, dashed] & (D \otimes TD') \otimes T(B' \otimes C'') & (C \otimes TC') \otimes T(B' \otimes C''). \arrow[l, "w \otimes \mathrm{id}"']
\end{tikzcd}$$

Ensuite pour la démonstration il suffit de considérer le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
A \otimes T(A' \otimes (B'' \otimes C')) \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes Ta'"] \arrow[ddddd, bend right=60, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & (A \otimes TA') \otimes T(B'' \otimes C') \arrow[r, "u \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IV})"] & (B \otimes TB') \otimes T(B'' \otimes C') \arrow[d, dashed] \arrow[ddr, bend left] & \\
A \otimes T((A' \otimes B'') \otimes C') \arrow[r, dashed] \arrow[ddd, "\beta"'] \arrow[dddrr, phantom, "(\mathrm{II})"] & ((A \otimes TA') \otimes TB'') \otimes TC' \arrow[r, "(u \otimes \mathrm{id}) \otimes \mathrm{id}"] & ((B \otimes TB') \otimes TB'') \otimes TC' \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{V})"] & \\
\arrow[d, phantom, "(\mathrm{I})"] & & ((B \otimes TB'') \otimes TB') \otimes TC' \arrow[r, dashed] \arrow[d, "(v \otimes \mathrm{id}) \otimes \mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VI})"] & ((B \otimes TB'') \otimes TC') \otimes TB' \arrow[d, "(v \otimes \mathrm{id}) \otimes \mathrm{id}"] \\
 & & ((C \otimes TC'') \otimes TB') \otimes TC' \arrow[r, dashed] \arrow[d] \arrow[ddr, phantom, "(\mathrm{VII})"] & ((C \otimes TC'') \otimes TC') \otimes TB' \arrow[ddl, bend left] \\
D \otimes T((B' \otimes C'') \otimes D') \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VIII})"] & (D \otimes TD') \otimes T(B' \otimes C'') \arrow[l, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IX})"] & (C \otimes TC') \otimes T(B' \otimes C'') \arrow[l, "w \otimes \mathrm{id}"'] \arrow[d, dashed] & \\
D \otimes T(B' \otimes (C'' \otimes D')) \arrow[u, "\mathrm{id} \otimes Ta'"'] & ((D \otimes TD') \otimes TC'') \otimes TB') \arrow[l, dashed] & ((C \otimes TC') \otimes TC'') \otimes TB') \arrow[l, "(w \otimes \mathrm{id}) \otimes \mathrm{id}"'] &
\end{tikzcd}$$

dans lequel la commutativité des régions (II), (III), (IV), (V), (VII), (VIII), (IX) et du circuit extérieur peut être vérifiée aussitôt, ce qui donne la commutativité de la région (I) et par suite l'égalité voulue en vertu de la Remarque 4.17(1). □

Proposition 4.21. *Soit* $[A', B', u] \in \Phi(A, B)/\mathcal{R}_{A,B}$. *Alors*

$$[A', B', u] \circ [C', C', \mathrm{id}_{A\otimes TC'}] = [C', C', \mathrm{id}_{B\otimes TC'}] \circ [A', B', u] = [A', B', u]$$

pour tout objet C' *de* $\underline{A}'$.

Proof. Il suffit d'appliquer la Proposition 2.172 et les Remarques 4.17, (2) et (3). □

Remark 4.22. Jusqu'ici tout semble bien marcher, on serait tenté de poser pour la construction de la catégorie $\underline{P}$

$$\begin{aligned} \mathrm{Ob}\,\underline{P} &= \mathrm{Ob}\,\underline{A} \\ \mathrm{Hom}_{\underline{P}}(A, B) &= \Phi(A, B)/\mathcal{R}_{A,B}, \quad A, B \in \mathrm{Ob}\,\underline{P}, \end{aligned}$$

la composition des flèches étant définie comme dans la Proposition 4.18. Avec les Propositions 4.20 en 4.21, $\underline{P}$ est effectivement une catégorie, mais elle ne répond pas au problème posé, l'ennui venant des flèches $T(c'_{A',A'})$, où $c'_{A',A'}$ sont les flèches de symétrie canonique dans la $\otimes$-catégorie AC $\underline{A}'$, [car] les flèches $T(c'_{A',A'})$ sont en géneral différentes des identités! Au cas où $T(c'_{A',A'}) = \mathrm{id}$ pour tout $A' \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}'$, ce qui arrive quand $\underline{A}'$ est stricte, on peut munir $\underline{P}$ d'une loi $\otimes$ et puis des contraintes d'associativité, de commutativité et d'unité de façon naturelle pour que $\underline{P}$ réponde à la question. Comme nous avons fait jusqu'ici, nous ne pouvons construire $\underline{P}$ en partant de $\underline{A}, \underline{A}', (T, \check{T})$ avec les hypothèses données au début du no. Pour pouvoir continuer, examinons de plus près le problème posé. Supposons que $(\underline{P}, (D, \check{D}), \lambda)$ en soit une solution, alors pour tout fléche de symétrie canonique $c'_{A',A'} \colon A' \otimes A' \xrightarrow{\sim} A' \otimes A', A' \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}'$, le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} DT(A' \otimes A') \arrow[r, "\lambda_{A'\otimes A'}", "\sim"'] \arrow[d, "DT(c'_{A',A'})"'] & I_{\underline{P}}(A' \otimes A') \arrow[d, "I_{\underline{P}}(c'_{A',A'}) = \mathrm{id}"] \\ DT(A' \otimes A') \arrow[r, "\lambda_{A'\otimes A'}", "\sim"'] & I_{\underline{P}}(A' \otimes A') \end{tikzcd}$$

nous donne $DT(c'_{A',A'}) = \mathrm{id}$, ce qui montre que $(D, \check{D})$ se factorise en $\underline{A} \to \underline{A}^{\mathcal{S}} \to \underline{P}$, $\mathcal{S}$ étant la partie multiplicative de $\underline{A}$ engendré par l'ensemble des endomorphismes de $\underline{A}$ de la forme $T(c'_{A',A'})$ et $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ la $\otimes$-catégorie AC quotient de $\underline{A}$ définie par $\mathcal{S}$ (Définitions 4.3 et 4.5). Donc si on part de $\underline{A}^{\mathcal{S}}$, $\underline{A}'$ et du $\otimes$-foncteur composé $\underline{A}' \to \underline{A} \to \underline{A}^{\mathcal{S}}$, la construction de $\underline{P}$ marchera comme nous avons signalé ci-dessus. Dans le but de simplifier les notations, nous pouvons considérer le problème comme posé pour $(T, \check{T}) \colon \underline{A}' \to \underline{A}$ avec $T(c'_{A',A'}) = \mathrm{id}$ pour tout $A' \in \mathrm{Ob}\underline{A}'$.

Proposition 4.23. *Soient* $[A', B', u] \in \Phi(A, B)/\mathcal{R}_{A,B} = \mathrm{Hom}_{\underline{P}}(A, B)$, $[B'', C'', v] \in \Phi(B, C)/\mathcal{R}_{B,C} = \mathrm{Hom}_{\underline{P}}(B, C)$ [1]. *Alors*

$$[B'', C'', v] \circ [A', B', u] = [A', C', vu].$$

Si u est un isomorphisme dans $\underline{A}$, $[A', B', u]$ est un isomorphisme dans $\underline{P}$, son inverse étant $[B', A', u^{-1}]$.

Proof. En vertu de la définition de la loi de composition des flèches de $\underline{P}$ (Proposition 4.18), nous avons

$$[B'', C'', v] \circ [A', B', u] = [A' \otimes B', B' \otimes C', w],$$

avec w défini par le diagramme commutatif (4.19) où l'on fait $B'' = B'$. Or $c_{TB',TB'} = \mathrm{id}$ en vertu du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
TB' \otimes TB' \arrow[r, "\check{T}", "\sim"'] \arrow[d, "c'_{TB',TB'}"'] & T(B' \otimes B') \arrow[d, "T(c'_{B',B'})"] \\
TB' \otimes TB' \arrow[r, "\check{T}", "\sim"'] & T(B' \otimes B')
\end{tikzcd}$$

et de l'hypothèse $T(c'_{B',B'}) = \mathrm{id}$ pour tout $B' \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}'$ (Remarque 4.22). Par conséquent le diagramme commutatif (4.19) devient le contour extérieur du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
A \otimes T(A' \otimes B'') \arrow[d, "w"'] \arrow[drr, "w_1"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & & A \otimes (TA' \otimes TB'') \arrow[ll, "\mathrm{id} \otimes \check{T}"'] \arrow[r, "a"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{II})"] & (A \otimes TA') \otimes TB'' \arrow[r, "u \otimes \mathrm{id}"] & (B \otimes TB') \otimes TB'' \arrow[d, "v \otimes \mathrm{id}"] \\
C \otimes T(B' \otimes C'') & & A \otimes (TA' \otimes TB'') \arrow[ll, "\mathrm{id} \otimes Tc'"'] & C \otimes (TC' \otimes TB'') \arrow[l, "\mathrm{id} \otimes \check{T}"'] \arrow[r, "a"] & (C \otimes TC') \otimes TB'
\end{tikzcd}$$

dans lequel w_1 est défini tel que la région (II) soit commutative, ce qui donne la commutativité de la région (I). En vertu de la Remarque 4.17(2), on a $[A', C', vu] = [A' \otimes B', C' \otimes B', w_1]$; et de la Remarque 4.17(1), on a $[A' \otimes B', C' \otimes B', w_1] = [A' \otimes B', B' \otimes C', w]$. D'où l'égalité voulue. $\square$

Supposons que u soit un isomorphisme dans $\underline{A}$. D'après ce que nous venons de démontrer, nous avons

$$[B', A', u^{-1}] \circ [A', B', u] = [A', A', \mathrm{id}_{A \otimes TA'}]$$
$$[A', B', u] \circ [B', A', u^{-1}] = [B', B', \mathrm{id}_{B \otimes TB'}]$$

[1] Voir la définition de la catégorie $\underline{P}$ dans la Remarque 4.22.

ce qui montre, en vertu de la Proposition 4.21, que $[B', A', u^{-1}]$ est l'inverse de $[A', B', u]$.

Nous allons maintenant munir $\underline{P}$ d'une $\otimes$-structure et des contraintes d'associativité, de commutativité et d'unité.

Proposition 4.24. *Soient* $[A', B', u] \in \mathrm{Hom}_{\underline{P}}(A, B), [E', F', v] \in \mathrm{Hom}_{\underline{P}}(E, F)$. *Alors la classe d'équivalence*

$$[A' \otimes E', B' \otimes F', w]$$

avec w *défini par le diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} (A \otimes TA') \otimes (E \otimes TE') \arrow[r, "u \otimes v"] \arrow[d, dashed] & (B \otimes TB') \otimes (F \otimes TF') \arrow[d, dashed] \\ (A \otimes E) \otimes T(A' \otimes E') \arrow[r, "w"] & (B \otimes F) \otimes T(B' \otimes F') \end{tikzcd} \tag{4.25}$$

est indépendant des représentants des classes $[A', B', u], [E', F', v]$.

Proof. Soient $[A'_1, B'_1, u_1] = [A', B', u], [E'_1, F'_1, v_1] = [E', F', v]$. Montrons d'abord

$$[A' \otimes E', B' \otimes F', w] = [A'_1 \otimes E', B'_1 \otimes F', \Omega]$$

Ω étant défini par un diagramme commutatif analogue à (4.25) où l'on a remplacé A', B', u par A'_1, B'_1, u_1. L'hypothése $[A', B', u] = [A'_1, B'_1, u_1]$ nous donne des objets C', C'_1 de $\underline{A}'$ et des isomorphismes $u' \colon A' \otimes C' \xrightarrow{\sim} A'_1 \otimes C'_1$, $v' \colon B' \otimes C' \xrightarrow{\sim} B'_1 \otimes C'_1$ tels que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} A \otimes T(A' \otimes C') \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes Tu'"'] & (A \otimes TA') \otimes TC' \arrow[r, "u \otimes \mathrm{id}"] & (B \otimes TB') \otimes TC' \arrow[r, dashed] & B \otimes T(B' \otimes C') \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes Tv'"] \\ A \otimes T(A'_1 \otimes C'_1) \arrow[r, dashed] & (A \otimes TA'_1) \otimes TC'_1 \arrow[r, "u_1 \otimes \mathrm{id}"] & (B \otimes TB'_1) \otimes TC'_1 \arrow[r, dashed] & B \otimes T(B'_1 \otimes C'_1). \end{tikzcd}$$

Considérons maintenant le diagramme

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
(A\otimes E)\otimes T((A'\otimes E')\otimes C') \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] \arrow[d, phantom, shift right=8ex, "(\mathrm{X})"] \arrow[ddddd, bend right=60, "\mathrm{id}\otimes Tu'_1"'] & ((A\otimes E)\otimes T(A'\otimes E'))\otimes TC' \arrow[r, "w\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & ((B\otimes F)\otimes T(B'\otimes F'))\otimes TC' \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & (B\otimes F)\otimes T((B'\otimes F')\otimes C') \arrow[d, dashed] \arrow[d, phantom, shift left=8ex, "(\mathrm{XIII})"] \arrow[ddddd, bend left=60, "\mathrm{id}\otimes Tv'_1"] \\
(A\otimes E)\otimes T((A'\otimes C')\otimes E') \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[d, phantom, shift right=8ex, "(\mathrm{XI})"] \arrow[ddd, bend right=50, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes T(u'\otimes\mathrm{id})"'] & ((A\otimes TA')\otimes(E\otimes TE'))\otimes TC' \arrow[r, "(u\otimes v)\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IV})"] & ((B\otimes TB')\otimes(F\otimes TF'))\otimes TC' \arrow[r, dashed] & (B\otimes F)\otimes T((B'\otimes C')\otimes F') \arrow[d, dashed] \arrow[d, phantom, shift left=8ex, "(\mathrm{XII})"] \arrow[ddd, bend left=50, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes T(v'\otimes\mathrm{id})"] \\
(A\otimes T(A'\otimes C'))\otimes(E\otimes TE') \arrow[r, dashed] \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes Tu')\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"] & ((A\otimes TA')\otimes TC')\otimes(E\otimes TE') \arrow[r, "(u\otimes\mathrm{id})\otimes v"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{V})"] & ((B\otimes TB')\otimes TC')\otimes(F\otimes TF') \arrow[r, dashed] & (B\otimes T(B'\otimes C'))\otimes(F\otimes TF') \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes Tv')\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"'] \\
(A\otimes T(A'_1\otimes C'_1))\otimes(E\otimes TE') \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & ((A\otimes TA'_1)\otimes TC'_1)\otimes(E\otimes TE') \arrow[r, "(u_1\otimes\mathrm{id})\otimes v"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VI})"] & ((B\otimes TB'_1)\otimes TC'_1)\otimes(F\otimes TF') \arrow[r, dashed] & (B\otimes T(B'_1\otimes C'_1))\otimes(F\otimes TF') \arrow[d, dashed] \\
(A\otimes E)\otimes T((A'_1\otimes C'_1)\otimes E') \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VII})"] & ((A\otimes TA'_1)\otimes(E\otimes TE'))\otimes TC'_1 \arrow[r, "(u_1\otimes v)\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VIII})"] & ((B\otimes TB'_1)\otimes(F\otimes TF'))\otimes TC'_1 \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IX})"] & (B\otimes F)\otimes T((B'\otimes C'_1)\otimes F') \arrow[d, dashed] \\
(A\otimes E)\otimes T((A'_1\otimes E')\otimes C'_1) \arrow[r, dashed] & ((A\otimes E)\otimes T(A'_1\otimes E'))\otimes TC'_1 \arrow[r, "\Omega\otimes\mathrm{id}"] & ((B\otimes F)\otimes T(B'_1\otimes F'))\otimes TC'_1 \arrow[r, dashed] & (B\otimes F)\otimes T((B'_1\otimes F')\otimes C'_1)
\end{tikzcd}
$$

où la commutativité des régions (I), (III), (VII),(IX) résulte de la Proposition 2.172; celle de (II),(VIII) de la définition de w et Ω (diag. (4.25)); celle de (IV), (VI), (XI),(XII) de la fonctorialité de $a, c, \check{T}$; celle de (V) de l'égalité $[A', B', u'] = [A'_1, B'_1, u'_1]$; enfin celle de (X),(XIII) de la définition de u'_1, v'_1 par les diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{tikzcd}
(A' \otimes C') \otimes E' \arrow[r, "u' \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, dashed] & (A'_1 \otimes C'_1) \otimes E' \arrow[d, dashed] \\
(A' \otimes E') \otimes C' \arrow[r, "u'_1"] & (A'_1 \otimes E') \otimes C'_1
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(B' \otimes C') \otimes F' \arrow[r, "v' \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, dashed] & (B'_1 \otimes C'_1) \otimes F' \arrow[d, dashed] \\
(B' \otimes F') \otimes C' \arrow[r, "v'_1"] & (B'_1 \otimes F) \otimes C'_1.
\end{tikzcd}$$

On en conclut la commutativité du circuit extérieur, ce qui donne l'égalité

$$[A' \otimes E', B' \otimes F', w] = [A'_1 \otimes E', B'_1 \otimes F', \Omega].$$

De la même manière on démontre que $[A'_1 \otimes E', B'_1 \otimes F', \Omega] = [A'_1 \otimes E'_1, B'_1 \otimes F'_1, w_1]$, ce qui achéve la démonstration. $\square$

Proposition 4.26. *Les applications suivantes*

$$\begin{array}{lcl}
\otimes & : & \mathrm{Ob}(\underline{P} \times \underline{P}) \to \mathrm{Ob}\,\underline{P}, \quad (A, E) \mapsto A \otimes E \\
\otimes & : & \mathrm{Fl}(\underline{P} \times \underline{P}) \to \mathrm{Fl}\,\underline{P}, \quad ([A', B', u], [E', F', v]) \mapsto [A' \otimes E', B' \otimes F', w]
\end{array}$$

où $[A', B', u] \colon A \to B, [E', F', v] \colon E \to F$ sont des flèches de $\underline{P}$, et w est défini par le diagramme commutatif (4.25)*, définissent un foncteur*

$$\otimes \colon \underline{P} \times \underline{P} \to \underline{P}.$$

Proof. Tout d'abord remarquons que pour deux flèches $f \colon A \to B, g \colon B \to C$ de $\underline{P}$, on peut toujours les mettre sous la forme $f = [A', B', u], g = [B', C', v]$ telle que "l'extremité" B' de f coïncide avec "l'origine" B' de g (Remarques 4.17, (2) et (3)). Cela étant, soient

$$A \xrightarrow{[A', B', u]} B \xrightarrow{[B', C', x]} C,$$

$$E \xrightarrow{[E', F', v]} F \xrightarrow{[F', G', y]} G$$

et soient

$$\begin{aligned}
[A' \otimes E', B' \otimes F', w] &= [A', B', u] \otimes [E', F', v] \\
[B' \otimes F', C' \otimes G', z] &= [B', C', x] \otimes [F', G', y].
\end{aligned}$$

Montrons que

$$[A' \otimes E', C' \otimes G', zw] = [A', C', xy] \otimes [E', G', yv].$$

Pour cela, considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes TA') \otimes (E \otimes TE') \arrow[rr, "xu \otimes yv"] \arrow[d, equal] & & (C \otimes TC') \otimes (G \otimes TG') \arrow[d, equal] \\
(A \otimes TA') \otimes (E \otimes TE') \arrow[r, "u \otimes v"] \arrow[d, dashed] & (B \otimes TB') \otimes (F \otimes TF') \arrow[r, "x \otimes y"] \arrow[d, dashed] & (C \otimes TC') \otimes (G \otimes TG') \arrow[d, dashed] \\
(A \otimes E) \otimes T(A' \otimes E') \arrow[r, "w"] & (B \otimes F) \otimes T(B' \otimes F') \arrow[r, "z"] & (C \otimes G) \otimes T(C' \otimes G')
\end{tikzcd}$$

où la commutativité de la région (I) est évidente, et celle de (II),(III) vient de la définition de w et z respectivement. D'où la commutativité du circuit extérieur, qui donne l'égalité voulue.

Enfin soit

$$A \xrightarrow{[A', A', \mathrm{id}_{A \otimes TA'}]} A$$

la flèche d'identité de l'objet A (Proposition 4.21). La flèche

$$[A', A', \mathrm{id}_{A \otimes TA'}] \otimes [A', A', \mathrm{id}_{A \otimes TA'}] = [A' \otimes A', A' \otimes A', \mathrm{id}_{(A \otimes A) \otimes T(A' \otimes A')}]$$

est bien la fléche d'identité de l'objet $A \otimes A$, ce qui achéve la démosntration. $\underline{P}$ est donc une $\otimes$-catégorie. $\square$

Proposition 4.27. $[A', A', a_{A,B,C} \otimes \mathrm{id}_{TA'}]\colon A \otimes (B \otimes C) \xrightarrow{\sim} (A \otimes B) \otimes C$ *est une contrainte d'associativité pour la* $\otimes$*-catégorie* $\underline{P}$*,* A' *étant un objet quelconque de* $\underline{A}'$.

Proof. Tout d'abord remarquons que pour A, B, C donnés, la flèche $[A', A', a \otimes \mathrm{id}_{TA'}]$ est bien définie en vertu des égalités

$$\begin{aligned} [A', A', a_{A,B,C} \otimes \mathrm{id}_{TA'}] &= [A' \otimes B', A' \otimes B', a_{A,B,C} \otimes \mathrm{id}_{T(A' \otimes B')}] \\ &= [B', B', a_{A,B,C} \otimes \mathrm{id}_{TB'}] \end{aligned}$$

(Remarques 4.17, (2) et (3)) pout tout objet B' de $\underline{A}'$. D'où on peut écrire

$$[A', A', a_{A,B,C} \otimes \mathrm{id}_{TA'}] = [A' \otimes (B' \otimes C'), A' \otimes (B' \otimes C'), a_{A,B,C} \otimes \mathrm{id}_{T(A' \otimes (B' \otimes C'))}]$$

et, en vertu de la Remarque 4.17 (1)

$$\begin{aligned} &[A' \otimes (B' \otimes C'), A' \otimes (B' \otimes C'), a_{A,B,C} \otimes \mathrm{id}_{T(A' \otimes (B' \otimes C'))}] \\ &= [A' \otimes (B' \otimes C'), (A' \otimes B') \otimes C', a_{A,B,C} \otimes Ta'_{A',B',C'}] \end{aligned}$$

pour $B', C' \in \mathrm{Ob}\, \underline{A}'$.

Cela étant, montrons que $[A', A', a_{A,B,C} \otimes \mathrm{id}_{TA'}]$ est fonctoriel en A, B, C. Il nous suffit de montrer qu'il est fonctoriel en un des trois arguments, par exemple A, la démonstration pour les deux autres étant analogue. Soit $[A', A'_1, u]\colon A \to A_1$. Nous allons montrer que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
A \otimes (B \otimes C) \arrow[r, "{\left[A'\otimes(B'\otimes C'),(A'\otimes B')\otimes C', a_{A,B,C}\otimes Ta'_{A',B',C'}\right]}"] \arrow[d, "{[A',A'_1,u]\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})}"'] & (A \otimes B) \otimes C \arrow[d, "{([A',A'_1,u]\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}}"] \\
A_1 \otimes (B \otimes C) \arrow[r, "{\left[A'_1\otimes(B'\otimes C'),(A'_1\otimes B')\otimes C', a_{A,B,C}\otimes Ta'_{A'_1,B',C'}\right]}"] & (A_1 \otimes B) \otimes C.
\end{tikzcd}$$

D'abord nous avons

$$\mathrm{id}_B = [B', B', \mathrm{id}_{B\otimes TB'}], \quad \mathrm{id}_C = [C', C', \mathrm{id}_{C\otimes TC'}].$$

Posons

$$[A', A'_1, u] \otimes ([B', B', \mathrm{id}] \otimes [C', C', \mathrm{id}]) = [A' \otimes (B' \otimes C'), A'_1 \otimes (B' \otimes C'), u_1]$$

$$([A', A'_1, u] \otimes [B', B', \mathrm{id}]) \otimes [C', C', \mathrm{id}] = [(A' \otimes B') \otimes C', (A'_1 \otimes B') \otimes C', u_2],$$

où u_1 et u_2 sont définis par les diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes (B \otimes C)) \otimes T(A' \otimes (B' \otimes C')) \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, dashed] & (A_1 \otimes (B \otimes C)) \otimes T(A'_1 \otimes (B' \otimes C')) \arrow[d, dashed] \\
(A \otimes TA') \otimes ((B \otimes TB') \otimes (C \otimes TC')) \arrow[r, "u\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"] & (A_1 \otimes TA'_1) \otimes ((B \otimes TB') \otimes (C \otimes TC'))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
((A \otimes B) \otimes C) \otimes T((A' \otimes B') \otimes C') \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, dashed] & ((A_1 \otimes B) \otimes C) \otimes T((A'_1 \otimes B') \otimes C') \arrow[d, dashed] \\
((A \otimes TA') \otimes (B \otimes TB')) \otimes (C \otimes TC') \arrow[r, "(u\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"] & ((A_1 \otimes TA'_1) \otimes (B \otimes TB')) \otimes (C \otimes TC')
\end{tikzcd}$$

en vertu de la définition du produit tensoriel des flèches de $\underline{P}$ dans la Proposition 4.24. Donc la démonstration de la commutativité du diagramme revient à celle de l'égalité

$$[A'\otimes(B'\otimes C'), (A'_1\otimes B')\otimes C', u_2(a\otimes Ta')] = [A'\otimes(B'\otimes C'), (A'_1\otimes B')\otimes C', (a\otimes Ta')u_1].$$

Or le diagramme suivant

$$
\begin{tikzcd}
(A\otimes(B\otimes C))\otimes T(A'\otimes(B'\otimes C')) \arrow[dddd, "a\otimes Ta'"'] \arrow[dr, dashed] \arrow[rrrr, bend left, "u_1"] & & & & (A_1\otimes(B\otimes C))\otimes T(A_1'\otimes(B'\otimes C')) \arrow[dddd, "a\otimes Ta'"] \\
& (A\otimes TA')\otimes((B\otimes TB')\otimes(C\otimes TC')) \arrow[rr, "u\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"] \arrow[dd, "a"] \arrow[ul, phantom, "\text{(II)}"] & \arrow[u, phantom, "\text{(I)}"] & (A_1\otimes TA_1')\otimes((B\otimes TB')\otimes(C\otimes TC')) \arrow[ur, dashed] \arrow[dd, "a"'] & \\
& & \text{(III)} & & \text{(IV)} \\
& ((A\otimes TA')\otimes(B\otimes TB'))\otimes(C\otimes TC') \arrow[rr, "(u\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"'] & \arrow[d, phantom, "\text{(V)}"] & ((A_1\otimes TA_1')\otimes(B\otimes TB'))\otimes(C\otimes TC') \arrow[dr, dashed] & \\
((A\otimes B)\otimes C)\otimes T((A'\otimes B')\otimes C') \arrow[ur, dashed] \arrow[rrrr, bend right, "u_2"'] & & & & ((A_1\otimes B)\otimes C)\otimes T((A_1'\otimes B')\otimes C')
\end{tikzcd}
$$

a les régions (I),(IV) commutatives en vertu de la définition de u_1, u_2 respectivement; les régions (II),(IV) en vertu de la Proposition 2.172; enfin la région (III) en vertu de la fonctorialité de a. On en conclut la commutativité du circuit extérieur, et par suite l'égalité $u_2(a \otimes Ta') = (a \otimes Ta')u_1$.

Pour montrer que l'axiome du pentagone est satisfait, écrivons les flèches

$$[A', A', a_{A,B,C} \otimes \mathrm{id}_{TA'}]\colon A \otimes (B \otimes C) \xrightarrow{\sim} (A \otimes B) \otimes C$$

sous la forme

$$[A' \otimes (B' \otimes C'), (A' \otimes B') \otimes C', a_{A,B,C} \otimes Ta'_{A',B',C'}]$$

et remarquons qu'on a

$$\begin{gathered}[W', W', \mathrm{id}_{W \otimes TW'}] \otimes [X' \otimes (Y' \otimes Z'), (X' \otimes Y') \otimes Z', a_{X,Y,Z} \otimes Ta'_{X',Y',Z'}] = \\ [W' \otimes (X' \otimes (Y' \otimes Z')), W' \otimes ((X' \otimes Y') \otimes Z'), (\mathrm{id}_W \otimes a_{X,Y,Z}) \otimes T(\mathrm{id}_{W'} \otimes a'_{X',Y',Z'})]\end{gathered}$$

et

$$\begin{gathered}[W' \otimes (X' \otimes Y'), (W' \otimes X') \otimes Y', a_{W,X,Y} \otimes Ta'_{W',X',Y'}] \otimes [Z', Z', \mathrm{id}_{Z \otimes TZ'}] = \\ [(W' \otimes (X' \otimes Y')) \otimes Z', ((W' \otimes X') \otimes Y') \otimes Z', (a_{W,X,Y} \otimes \mathrm{id}_Z) \otimes T(a'_{W',X',Y'} \otimes \mathrm{id}_{Z'})]\end{gathered}$$

Ces remarques faites, l'axiome du pentagone est réalisé dans $\underline{P}$ en vertu du fait qu'il est réalisé dans $\underline{A}$ et $\underline{A}'$. D'où la proposition. □

Proposition 4.28. $[A', A', c_{A,B} \otimes \mathrm{id}_{TA'}]\colon A \otimes B \xrightarrow{\sim} B \otimes A$ *est une contrainte de commutativité pour la* $\otimes$*-catégorie* $\underline{P}$*,* A' *étant un objet quelconque de* $\underline{A}'$*.*

Proof. En vertu des Remarques 4.17, (2) et (3), on a

$$[A', A', c_{A,B} \otimes \mathrm{id}_{TA'}] = [A' \otimes B', A' \otimes B', c_{A,B} \otimes \mathrm{id}_{T(A' \otimes B')}] = [B', B', c_{A,B} \otimes \mathrm{id}_{TB'}]$$

pour tout $B' \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}'$, ce qui montre que la flèche $[A', A', c_{A,B} \otimes \mathrm{id}_{TA'}]$ est bien définie pour A, B donnés. Ensuite la fonctorialité et l'autocompatibilité (relation (2.20)) de $[A', A', c_{A,B} \otimes \mathrm{id}_{TA'}]$ s'obtiennent en remarquant qu'on a

$$[A', A', c_{A,B} \otimes \mathrm{id}_{TA'}] = [A' \otimes B', B' \otimes A', c_{A,B} \otimes Tc'_{A',B'}]$$

B' étant un objet quelconque de $\underline{A}'$. □

Proposition 4.29. *Soit* $A'_0 \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}'$*. Alors le triple*

$$(\underline{1}_{\underline{P}} = TA'_0,\ g_A = [A'_0 \otimes A', A', t_A],\ d_A = [A'_0 \otimes A', A', p_A])$$

où A' est un objet quelconque de $\underline{A}'$, A varie dans $\mathrm{Ob}\,\underline{A}$*, et les isomorphismes t_A, p_A sont définis par les diagrammes commutatifs*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes T(A'_0 \otimes A') \arrow[d, "t_A"'] & A \otimes (TA'_0 \otimes TA') \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"'] \arrow[d, "a"] \\
(TA'_0 \otimes A) \otimes TA' & (A \otimes TA'_0) \otimes TA' \arrow[l, "c\otimes\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \otimes T(A'_0 \otimes A') \arrow[d, "p_A"'] & A \otimes (TA'_0 \otimes TA') \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\check{T}"'] \arrow[d, "a"] \\
(A \otimes TA'_0) \otimes TA' \arrow[r, equal] & (A \otimes TA'_0) \otimes TA'
\end{tikzcd}$$

constitue une contrainte d'unité pour la catégorie $\underline{P}$.

Proof. D'abord démontrons que les isomorphismes ne dépendent pas de A'. Soit B' un objet quelconque de $\underline{A}'$. Les diagrammes suivants

$$\begin{tikzcd}
A \otimes T((A'_0 \otimes A') \otimes B') \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes T(\cdot)"'] & (A \otimes T(A'_0 \otimes A')) \otimes TB' \arrow[r, "t_A\otimes\mathrm{id}"] & ((TA'_0 \otimes A') \otimes TA') \otimes TB' \arrow[r, dashed] & (TA'_0 \otimes A) \otimes T(A' \otimes B') \arrow[d, dashed, "\mathrm{id}\otimes T(\cdot)"] \\
A \otimes T((A'_0 \otimes B') \otimes A) \arrow[r, dashed] & (A \otimes T(A'_0 \otimes B')) \otimes TA' \arrow[r, "t_A\otimes\mathrm{id}"] & ((TA'_0 \otimes A) \otimes TB') \otimes TA' \arrow[r, dashed] & (TA'_0 \otimes A) \otimes T(B' \otimes A')
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \otimes T((A'_0 \otimes A') \otimes B') \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes T(\cdot)"'] & (A \otimes T(A'_0 \otimes A')) \otimes TB' \arrow[r, "p_A\otimes\mathrm{id}"] & ((A \otimes TA'_0) \otimes TA') \otimes TB' \arrow[r, dashed] & (A \otimes TA'_0) \otimes T(A' \otimes B') \arrow[d, dashed, "\mathrm{id}\otimes T(\cdot)"] \\
A \otimes T((A'_0 \otimes B') \otimes A') \arrow[r, dashed] & (A \otimes T(A'_0 \otimes B')) \otimes TA' \arrow[r, "p_A\otimes\mathrm{id}"] & ((A \otimes TA'_0) \otimes TB') \otimes TA' \arrow[r, dashed] & (A \otimes TA'_0) \otimes T(B' \otimes A')
\end{tikzcd}$$

sont commutatifs en remarquant que t_A et p_A sont des composés des flèches construits à l'aide de $a, c, \check{T}$, des identités et de la loi $\otimes$, et en appliquant la Proposition 2.172, ce qui montre que

$$[A'_0 \otimes A', A', t_A] = [A'_0 \otimes B', B', t_A]$$

et

$$[A'_0 \otimes A', A', p_A] = [A'_0 \otimes B', B', p_A],$$

i.e., $[A'_0 \otimes A', A', t_A], [A'_0 \otimes A', A', p_A]$ ne dépendent pas de A'. Ces isomorphismes sont en plus fonctoriels en A en vertu de la Proposition 2.172 et de la fonctorialité de c, $\check{T}$. Enfin pour $A = \underline{1}_{\underline{P}}$, on a $t_A = p_A$ en vertu de $T(c'_{A',A'}) = \mathrm{id}$ por tout $A' \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}'$ (Remarque 4.22), ce qui donne $g_{\underline{1}_{\underline{P}}} = d_{\underline{1}_{\underline{P}}}$. $\square$

Proposition 4.30. *La $\otimes$-catégorie $\underline{P}$, munie des contraintes d'associativité*

$$[A'_0 \otimes A', A', a_{A,B,C} \otimes \mathrm{id}_{TA'}],$$

de commutativité

$$[A', A', c_{A,B} \otimes \mathrm{id}_{TA'}]$$

et d'unité

$$(\underline{1}_{\underline{P}}, [A'_0 \otimes A', A', t_A], [A'_0 \otimes A', A', p_A])$$

est une $\otimes$-catégorie ACU.

Proof. En vertu de la Proposition 2.106, il nous suffit de démontrer que $[A', A', a\otimes \mathrm{id}]$ est compatible, respectivement, avec $[A', A', c \otimes \mathrm{id}]$ et $(\underline{1}_{\underline{P}}, g, d)$.

La compatibilité de $[A', A', a \otimes \mathrm{id}]$ avec $[A', A', c \otimes \mathrm{id}]$ s'obtient en remarquant comme dans les Propositions 4.27 et 4.28 qu'on peut écrire

$$[A', A', a_{X,Y,Z} \otimes \mathrm{id}_{TA'}] = [X' \otimes (Y' \otimes Z'), (X' \otimes Y') \otimes Z', a_{X,Y,Z} \otimes Ta'_{X',Y',Z'}]$$

$$[A', A', c_{X,Y,Z} \otimes \mathrm{id}_{TA'}] = [(X' \otimes Y') \otimes Z', Z' \otimes (X' \otimes Y'), c_{X,Y,Z} \otimes Tc'_{X'\otimes Y',Z'}]$$

$$\begin{gathered}[X' \otimes Z', Z' \otimes X', c_{X,Z} \otimes Tc'_{X',Z'}] \otimes [Y', Y', \mathrm{id}_{Y\otimes TY'}] = \\ [(X' \otimes Z') \otimes Y', (Z' \otimes X') \otimes Y', (c_{X,Z} \otimes \mathrm{id}_Y) \otimes T(c'_{X',Z'} \otimes \mathrm{id}_{Y'})]\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}[X', X', \mathrm{id}_{X\otimes TX'}] \otimes [Y' \otimes Z', Z' \otimes Y', c_{Y,Z} \otimes Tc'_{Y',Z'}] = \\ [X' \otimes (Y' \otimes Z'), X' \otimes (Z' \otimes Y'), (\mathrm{id}_X \otimes c_{Y,Z}) \otimes T(\mathrm{id}_{X'} \otimes c'_{Y',Z'})]\end{gathered}$$

et que l'axiome de l'hexagone est satisfait dans $\underline{A}$ et $\underline{A}'$.

Enfin la compatibilité de $[A', A', a \otimes \mathrm{id}]$ avec $(\underline{1}_{\underline{P}}, g, d)$ résulte aussitôt de la Proposition 2.172. $\square$

Proposition 4.31. *Soient*

$$\begin{aligned} D &: \mathrm{Ob}\,\underline{A} \to \mathrm{Ob}\,\underline{P}, \quad A \mapsto A \\ D &: \mathrm{Fl}\,\underline{A} \to \mathrm{Fl}\,\underline{P}, \quad (u\colon A \to B) \mapsto [A', A', u \otimes \mathrm{id}_{TA'}] \end{aligned}$$

A' étant un objet quelconque de $\underline{A}'$,

$$\check{D}_{A,B} = \mathrm{id}_{A\otimes B}$$

pour $A, B \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}$. Alors $(D, \check{D})$ est un $\otimes$-foncteur de $\underline{A}$ dans $\underline{P}$ compatible avec les contraintes d'associativité et de commutativité dans $\underline{A}$ et $\underline{P}$.

Proof. Comme on a remarqué dans les Propositions 4.27 et 4.28, la flèche

$$[A', A', u \otimes \mathrm{id}_{TA'}]$$

est indépendante de l'objet A'. En vertu des Propositions 4.21 et 4.23, nous avons

$$[A', A', \mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_{TA'}] = \mathrm{id}_A \quad (\text{dans } \underline{P})$$

$$[A', A', vu \otimes \mathrm{id}_{TA'}] = [A', A', v \otimes \mathrm{id}_{TA'}] \circ [A', A', u \otimes \mathrm{id}_{TA'}],$$

ce qui montre que D est un foncteur de $\underline{A}$ dans $\underline{P}$. En outre, pour $u\colon A \to A_1$ et $v\colon B \to B_1$, l'égalité

$$[A', A', u \otimes \mathrm{id}_{TA'}] \otimes [B', B', v \otimes \mathrm{id}_{TB'}] = [A' \otimes B', A' \otimes B', (u \otimes v) \otimes \mathrm{id}_{T(A'\otimes B')}]$$

venant de la fonctorialité de $a, c, \check{T}$ nous montre que $\check{D}$ est un isomorphisme fonctoriel. Enfin la compatibilité de $(D, \check{D})$ avec les contraintes d'associativité et de commutativité dans $\underline{A}$ et $\underline{P}$ se vérifie aussitôt en partant de la définition du $\otimes$-foncteur $(D, \check{D})$ et des contraintes d'associativité et de commutativité dans $\underline{P}$. $\square$

Proposition 4.32. *Il existe un $\otimes$-isomorphisme*

$$\lambda\colon (D, \check{D}) \circ (T, \check{T}) \xrightarrow{\sim} (I_{\underline{P}}, \check{I}_{\underline{P}})$$

où $(I_{\underline{P}}, \check{I}_{\underline{P}})$ est le $\otimes$-foncteur $\underline{1}_{\underline{P}}$ constant de $\underline{A}'$ dans $\underline{P}$ (Définition 4.7).

Proof. Soit A' un objet de $\underline{A}'$, considérons la fléche $\lambda_{A'}$ dans $\underline{P}$

$$DTA' = TA' \xrightarrow{\lambda_{A'} = [A'_0, A', c_{TA', TA'_0}]} I_{\underline{P}}A' = TA'_0 \tag{4.33}$$

$\lambda_{A'}$ est bien un isomorphisme dans $\underline{P}$ puisque c_{TA', TA'_0} est un isomorphisme dans $\underline{A}$ (Proposition 4.23). Montrons que λ est fonctoriel en A'. Considérons le diagramme suivant où $u'\colon A' \xrightarrow{\sim} A''$ est une fléche de $\underline{A}'$:

$$\begin{tikzcd}
DTA' = TA' \arrow[r, "{\left[A'_0, A', c_{TA', TA'_0}\right]}"] \arrow[d, "{DTu' = [A'_0, A'_0, Tu' \otimes \mathrm{id}_{TA'}]}"'] & I_{\underline{P}}A' = TA'_0 \arrow[d, equal, "I_{\underline{P}}u'"] \\
DTA'' = TA'' \arrow[r, "{\left[A'_0, A'', c_{TA'', TA'_0}\right]}"] & I_{\underline{P}}A'' = TA'_0
\end{tikzcd}$$

dont la commutativité se realise si on a l'égalité

$$[A'_0, A', c_{TA', TA'_0}] = [A'_0, A'', c_{TA'', TA'_0}(Tu' \otimes \mathrm{id}_{TA'_0})].$$

Or la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
TA' \otimes TA'_0 \arrow[r, "c_{TA', TA'_0}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes T\mathrm{id}"'] & TA'_0 \otimes TA' \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes Tu'"] \\
TA' \otimes TA'_0 \arrow[r, "(\mathrm{id} \otimes Tu') c_{TA', TA'_0}"] & TA'_0 \otimes TA''
\end{tikzcd}$$

nous donne

$$[A'_0, A', c_{TA', TA'_0}] = [A'_0, A'', (\mathrm{id} \otimes Tu') c_{TA', TA'_0}]$$

en vertu de la Remarque 4.17(1), et celle du diagramme

$$\begin{tikzcd} TA' \otimes TA'_0 \arrow[r, "c_{TA',TA'_0}"] \arrow[d, "Tu' \otimes \mathrm{id}"'] & TA'_0 \otimes TA' \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes Tu'"] \\ TA'' \otimes TA'_0 \arrow[r, "c_{TA'',TA'_0}"] & TA'_0 \otimes TA'' \end{tikzcd}$$

venant de la fonctorialité de c, nous donne

$$[A'_0, A'', c_{TA'',TA'_0}(Tu' \otimes \mathrm{id}_{TA'_0})] = [A'_0, A'', (\mathrm{id} \otimes Tu')c_{TA',TA'_0}].$$

D'où l'égalité voulue, ce qui montre que λ est un morphisme fonctoriel. Il nous reste à prouver que λ est une $\otimes$-morphisme, i.e., le diagramme

$$\begin{tikzcd} DTA' \otimes DTB' \arrow[r, "\check{DT}"] \arrow[d, "\lambda_{A'} \otimes \lambda_{B'}"'] & DT(A' \otimes B') \arrow[d, "\lambda_{A' \otimes B'}"] \\ I_{\underline{P}}A' \otimes I_{\underline{P}}B' \arrow[r, "\check{I}_{\underline{P}}"] & I_{\underline{P}}(A' \otimes B') \end{tikzcd}$$

est commutatif pour $A', B' \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}'$. La définition de $\check{DT}_{A',B'}$ (Définition 2.139) nous donne

$$\check{DT}_{A',B'} = [C', C', \check{T}_{TA',TB'} \otimes \mathrm{id}_{TC'}], \quad C' \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}',$$

que nous écrivons ici

$$\check{DT}_{A',B'} = [A'_0 \otimes (A'_0 \otimes A'_0), A'_0 \otimes (A'_0 \otimes A'_0), \check{T}_{TA',TB'} \otimes \mathrm{id}_{T(A'_0 \otimes (A'_0 \otimes A'_0))}].$$

En plus en appliquant les Remarques 4.17, (2) et (3), où on prend successivement les isomorphismes $\mathrm{id}\colon A'_0 \to A'_0$, $\mathrm{id}\colon A'_0 \otimes A'_0 \to A'_0 \otimes A'_0$ et $\mathrm{id}\colon A' \otimes B' \to A' \otimes B'$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \lambda_{A'} \otimes \lambda_{B'} &= [A'_0, A', c_{TA',TA'_0}] \otimes [A'_0, B', c_{TB',TA'_0}] = [A'_0 \otimes A'_0, A' \otimes B', w] \\ &= [A'_0 \otimes (A'_0 \otimes A'_0), A'_0 \otimes (A' \otimes B'), \tilde{w}], \end{aligned}$$

w étant défini par (4.25),

$$\begin{aligned} \lambda_{A' \otimes B'} &= [A'_0, A' \otimes B', c_{T(A' \otimes B'),TA'_0}] \\ &= [A'_0 \otimes (A'_0 \otimes A'_0), (A' \otimes B') \otimes (A'_0 \otimes A'_0), \widetilde{c}_{T(A' \otimes B'),TA'_0}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \check{I}_{\underline{P}}(A', B') &= d^{-1}_{\underline{1}_{\underline{P}}} = [A'_0, A'_0 \otimes A'_0, p^{-1}_{TA'_0}] = \\ &= [A'_0 \otimes (A' \otimes B'), (A'_0 \otimes A'_0) \otimes (A' \otimes B'), \widetilde{p^{-1}_{TA'_0}}]. \end{aligned}$$

Cela étant, la commutativité du diagramme considéré résulte de la Remarque 4.17(1) et de la Proposition 2.172. $\square$

Proposition 4.34. *Soient $\underline{Q}$ une $\otimes$-catégorie* ACU*, $(E, \check{E})$ un $\otimes$-foncteur de $\underline{A}$ dans $\underline{Q}$ compatible avec les contraintes d'associativité et de commutativité dans $\underline{A}$ et $\underline{Q}$ tel qu'il existe un $\otimes$-isomorphisme*

$$\mu\colon (E, \check{E}) \circ (T, \check{T}) \xrightarrow{\sim} (I_{\underline{Q}}, \check{I}_{\underline{Q}}).$$

Alors il existe un $\otimes$-foncteur ACU *et un seul $(E', \check{E}')$ de $\underline{A}$ dans $\underline{Q}$ tel que $(E, \check{E}) = (E', \check{E}') \circ (D, \check{D})$ et que le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
E'(DTA') \arrow[r, "E'(\lambda_{A'})"] & E'(\underline{1}_{\underline{P}}) \\
E'TA' \arrow[u, equal] \arrow[r, "\mu_{A'}"] & E'(\underline{1}_{\underline{Q}}) \arrow[u, "\widehat{E}'"']
\end{tikzcd}$$

soit commutatif pour tout $A' \in \mathrm{Ob}\underline{A}'$, $\widehat{E}'\colon \underline{1}_{\underline{Q}} \xrightarrow{\sim} E'(\underline{1}_{\underline{P}})$ étant l'isomorphisme venant de la compatibilité de $(E', \check{E}')$ avec les unités de $\underline{P}$ et $\underline{Q}$.

Proof.

(1) Unicité de $(E', \check{E}')$. Supposons que $(E', \check{E}')$ existe. Alors l'égalité $(E, \check{E}) = (E', \check{E}') \circ (D, \check{D})$ nous donne

$$E'D = E, \quad \check{E'}D = \check{E}$$

ou, en vertu de la définition de $(D, \check{D})$ (Proposition 4.31),

$$E'(A) = E(A), \quad \check{E}'_{A,B} = \check{E}_{A,B} \tag{4.35}$$

pour $A, B \in \mathrm{Ob}\,\underline{P} = \mathrm{Ob}\,\underline{A}$. Faisons $A' = A'_0$ dans la formule (4.33) donnant $\lambda_{A'}$, nous obtenons $\lambda_{A'_0} = \mathrm{id}$ puisque $T(c'_{A'_0, A'_0}) = \mathrm{id}$, ce qui nous donne

$$\widehat{E}' = \mu_{A'_0}^{-1} \tag{4.36}$$

à partir du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
E'(DTA'_0) \arrow[r, "E'(\lambda_{A'_0}) = \mathrm{id}"] & E'(\underline{1}_{\underline{P}}) \\
E'TA' \arrow[u, equal] \arrow[r, "\mu_{A'_0}"] & E'(\underline{1}_{\underline{Q}}). \arrow[u, "\widehat{E}'"']
\end{tikzcd}$$

Puisque $(E', \check{E}')$ est compatible avec les unités $(\underline{1}_{\underline{P}}, g, d)$ et $(\underline{1}_{\underline{Q}}, g, d)$ de $\underline{P}$ et $\underline{Q}$ respectivement, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
E'A \arrow[r, "E'd_A"] \arrow[d, "d_{E'A}"] & E'(A \otimes \underline{1}_{\underline{P}}) \\
E'A \otimes \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \widehat{E}'"] & E'A \otimes E'\underline{1}_{\underline{P}}. \arrow[u, "\check{E}'"']
\end{tikzcd}$$

qui donne l'unicité de $E'd_A$ en vertu de (4.35) et (4.36). L'unicité de $E'\lambda_{A'}$ vient du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
E'(DTA') \arrow[r, "E'(\lambda_{A'})"] \arrow[d, equal] & E'(\underline{1}_{\underline{P}}) \\
E'TA' \arrow[r, "\mu_{A'}"] & \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[u, "\widehat{E}'"']
\end{tikzcd}$$

et de la formule (4.36). D'où l'unicité de $\mathrm{id}_{E'A} \otimes E'\lambda_{A'}$ et par conséquent l'unicité de $E'(\mathrm{id}_A \otimes \lambda_{A'})$ en vertu de (4.35) et du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
E'(A \otimes TA') \arrow[r, "E'(\mathrm{id}_A \otimes \lambda_{A'})"] & E'(A \otimes TA'_0) \\
E'A \otimes E'TA' \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes E'\lambda_{A'}"] \arrow[u, "\check{E}'"'] & E'A \otimes ETA'_0 \arrow[u, "\check{E}'"']
\end{tikzcd}$$

Enfin soit $[A', B', u]\colon A \to B$ une flèche de $\underline{P}$. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "d_A"] \arrow[d, "{[A', B', u]}"'] & A \otimes \underline{1}_{\underline{P}} = A \otimes TA'_0 \arrow[r, "\mathrm{id}_A \otimes \lambda_{A'}^{-1}"] & A \otimes TA' \arrow[d, "Du"] \\
B \arrow[r, "d_B"] & B \otimes \underline{1}_{\underline{P}} = B \otimes TA'_0 \arrow[r, "\mathrm{id}_B \otimes \lambda_{B'}^{-1}"] & B \otimes TB'
\end{tikzcd}$$

et écrivons, successivement, en nous servant de la Remarque 4.17(3) où l'on prend les isomorphismes $\mathrm{id}\colon A' \to A', \mathrm{id}\colon A'_0 \to A'_0$

$$
\begin{aligned}
d_A &= [A'_0 \otimes A', A', p_A] = [A' \otimes (A'_0 \otimes A'), A' \otimes A', \overset{\wr}{p_A}] \\
\mathrm{id}_A \otimes \lambda^{-1}_{A'} &= [A', A', \mathrm{id}_{A\otimes TA'}] \otimes [A', A'_0, c_{TA'_0,TA'}] = [A' \otimes A', A' \otimes A'_0, w] \\
Du &= [A' \otimes A'_0, A' \otimes A'_0, u \otimes \mathrm{id}_{T(A'\otimes A'_0)}] \\
d_B \circ [A', B', u] &= [A'_0 \otimes B', B', p_B] \circ [A'_0 \otimes A', A' \otimes B', \overset{\wr}{u}] \\
&= [A'_0 \otimes A', B', p_B \circ \overset{\wr}{u}] = [A' \otimes (A'_0 \otimes A'), A' \otimes B, \overset{\wr}{(p_B \circ \overset{\wr}{u})}] \\
\mathrm{id}_B \otimes \lambda^{-1}_{B'} &= [A', A', \mathrm{id}_{B\otimes TA'}] \otimes [B', A'_0, c_{TA'_0,TB'}] = [A' \otimes B', A' \otimes A'_0, w_1]
\end{aligned}
$$

w et w_1 étant définis par le diagramme commutatif (4.25). Il ne nous reste qu'à composer les flèches et nous servir de la Proposition 2.172 et de la fonctorialité de $\check{T}$ et des contraintes d'associativité et de commutativité pour avoir la commutativité du diagramme considéré. Appliquons à ce diagramme le foncteur E', nous obtenons le diagramme commutatif

$$
\begin{tikzcd}
E'A \arrow[r, "E'd_A"] \arrow[d, "{E'[A',B',u]}"'] & E'(A \otimes TA'_0) \arrow[r, "E'(\mathrm{id}_A\otimes\lambda^{-1}_{A'})"] & E'(A \otimes TA') \arrow[d, "E'Du=Ew"] \\
E'B \arrow[r, "E'd_B"] & E'(B \otimes TA'_0) \arrow[r, "E'(\mathrm{id}_B\otimes\lambda^{-1}_{B'})"] & E'(B \otimes TB')
\end{tikzcd}
$$

ce qui donne effectivement l'unicité de $E'[A', B', u]$ en vertu de l'unicité de $E'd_A, E'd_B, E'(\mathrm{id}_A \otimes \lambda^{-1}_{A'}), E'(\mathrm{id}_B \otimes \lambda^{-1}_{B'})$ qu'on vient de démontrer ci-dessus. D'où l'unicité du $\otimes$-foncteur $(E', \check{E}')$.

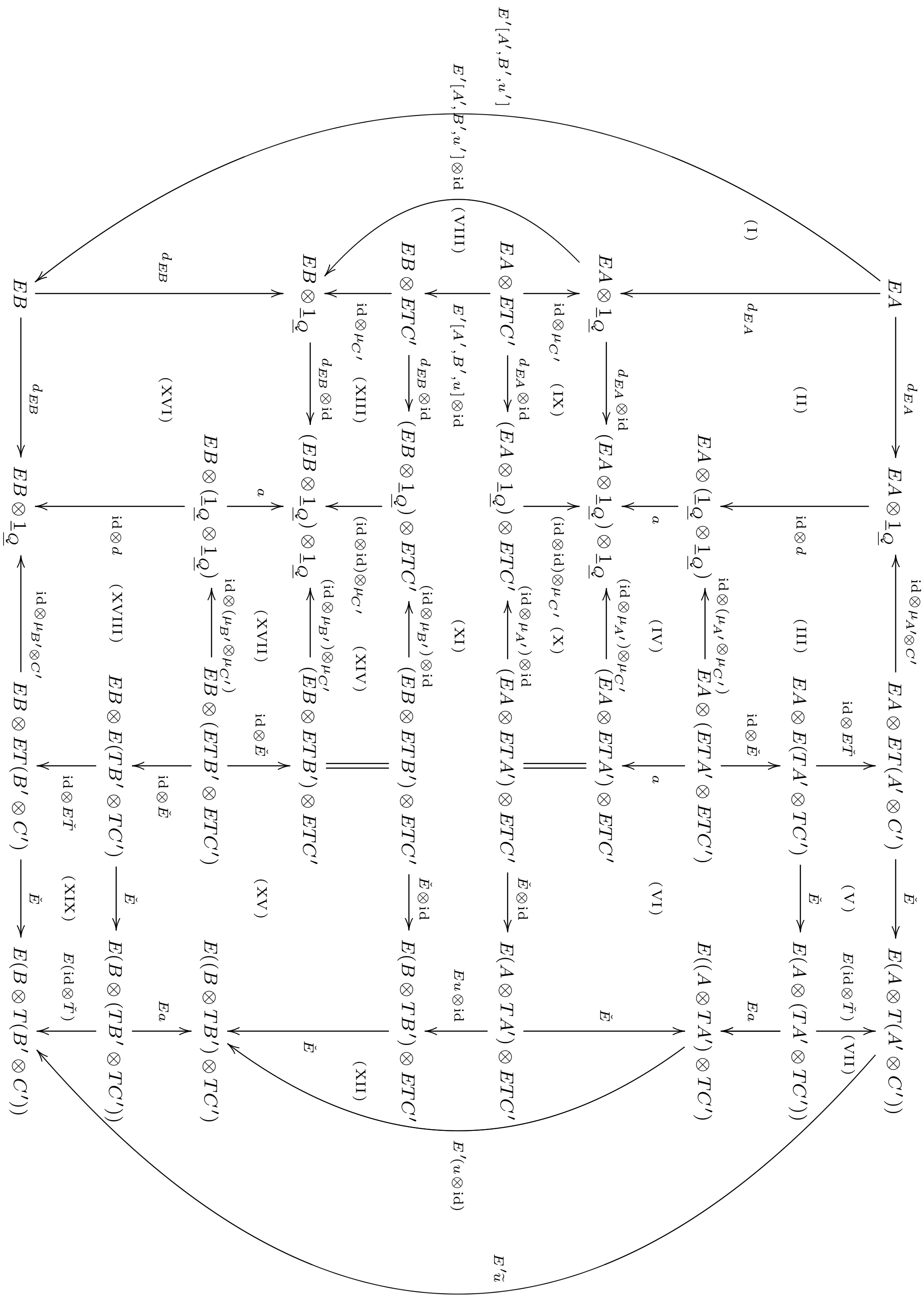
(2) Existence de $(E', \check{E}')$. Soient $A, B \in \mathrm{Ob}\,\underline{P}$ et $[A', B', u]\colon A \to B$ une flèche de $\underline{P}$. Définissons $E'A, \check{E}'_{A,B}$ par les formules (4.35) et $E'[A', B', u]$ par le diagramme commutatif

$$
\begin{tikzcd}
E'A = EA \arrow[r, "d_{EA}"] \arrow[d, "{E'[A',B',u]}"'] & EA \otimes \underline{1}_Q & EA \otimes ETA' \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\mu_{A'}"'] \arrow[r, "\check{E}"] & E(A \otimes TA') \arrow[d, "Eu"] \\
E'B = EB \arrow[r, "d_{EB}"] & EB \otimes \underline{1}_Q & EB \otimes ETB' \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\mu_{B'}"'] \arrow[r, "\check{E}"] & E(B \otimes TB').
\end{tikzcd}
\tag{4.37}
$$

Prouvons que $E'[A', B', u]$ est independant des représentants de la classe $[A', B', u]$. D'abord nous allons montrer que

$$E'[A', B', u] = E'[A' \otimes C', B' \otimes C', \widetilde{w}\,]$$

où C' est un objet quelconque de $\underline{A}'$, $\widetilde{w}$ défini dans la Remarque 4.17(2) avec l'isomorphisme $\mathrm{id}\colon C' \to C'$. Pour cela considérons le diagramme suivant



dont la commutativité de la région (I) résulte de la fonctorialité de d; celle de (II), (XVI) de la compatibilité de la contrainte d'associativité a de $\underline{Q}$ avec sa contrainte d'unité $(\underline{1}_{\underline{Q}}, g, d)$; celle de (III), (XVIII) du fait que μ est un $\otimes$-morphisme; celle de (IV), (XVII) de la fonctorialité de a; celle de (V),(XII), (XIX) de la fonctorialité de $\check{E}$; celle de (VI), (XV) de la compatibilité de $(E, \check{E})$ avec les contraintes d'associativité; celle de (VII) de la définition de $\widetilde{u}$ (Remarque 4.17(2)); celle de (VIII), (IX), (X), (XIII), (XIV) s'obtient en composant les flèches; celle de (XI) est donnée par le diagramme commutatif (4.37); d'où la commutativité du circuit extérieur qui donne $E'[A', B', u] = E'[A' \otimes C', B' \otimes C', \widetilde{u}]$. Ensuite soient $(A', B', u), (A'_1, B'_1, u_1)$ tels que $u' \colon A' \to A'_1$, $v' \colon B' \to B'_1$ et que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A \otimes TA' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes Tu'"'] & B \otimes TB' \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes Tv'"] \\
A \otimes TA'_1 \arrow[r, "u_1"] & B \otimes TB'_1
\end{tikzcd}$$

soit commutatif. D'après la Remarque 4.17(1) on a $[A', B', u] = [A'_1, B'_1, u_1]$. Prouvons que $E'[A', B', u] = E'[A'_1, B'_1, u_1]$. Pour cela considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
EA \arrow[r, "d_{EA}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & EA \otimes \underline{1} \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & EA \otimes ETA'_1 \arrow[l, "\mathrm{id} \otimes \mu_{A'_1}"'] \arrow[r, "\check{E}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & E(A \otimes TA'_1) \arrow[ddd, bend left, "Eu_1"] \\
EA \arrow[r, "d_{EA}"] \arrow[d, "{E'[A', B', u]}"] & EA \otimes \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[r, phantom, "(\mathrm{IV})"] & EA \otimes ETA' \arrow[l, "\mathrm{id} \otimes \mu_{A'}"'] \arrow[r, "\check{E}"] \arrow[u, "\mathrm{id} \otimes ETu'"'] & E(A \otimes TA') \arrow[u, "E(\mathrm{id} \otimes Tu')"'] \arrow[d, "Eu"'] \arrow[d, phantom, shift left=5ex, "(\mathrm{VIII})"] \\
EB \arrow[r, "d_{EB}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{V})"] & EB \otimes \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VI})"] & EB \otimes ETB' \arrow[l, "\mathrm{id} \otimes \mu_{B'}"'] \arrow[r, "\check{E}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes ETv'"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VII})"] & E(B \otimes TB') \arrow[d, "E(\mathrm{id} \otimes Tv')"'] \\
EB \arrow[r, "d_{EB}"] & EB \otimes \underline{1}_{\underline{Q}} & EB \otimes ETB'_1 \arrow[l, "\mathrm{id} \otimes \mu_{B'_1}"'] \arrow[r, "\check{E}"] & E(B \otimes TB'_1)
\end{tikzcd}$$

dont la commutativité des régions (I),(V) est évidente; celle de (II), (VI) résulte de la fonctorialité de μ; celle de (III), (VII) de la fonctorialité de $\check{E}$; celle de (IV) est donnée par le diagramme commutatif (4.37); enfin celle de (VIII) vient de l'hypothèse sur $(A', B', u), (A'_1, B'_1, u_1)$; d'où la commutativité du circuit extérieur qui donne l'égalité $E'[A', B', u] = E'[A'_1, B'_1, u_1]$. Enfin soient $(A', B', u), (A'_1, B'_1, u_1)$ tels qu'il existe des objets C', C'_1 et des isomorphismes $u' \colon A' \otimes C' \xrightarrow{\sim} A'_1 \otimes C'_1, v' \colon B' \otimes C' \xrightarrow{\sim} B'_1 \otimes C'_1$ de $\underline{A}'$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} A\otimes T(A'\otimes C') \arrow[r, "\widetilde{u}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes Tu'"'] & B\otimes T(B'\otimes C') \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes Tv'"] \\ A\otimes T(A'_1\otimes C'_1) \arrow[r, "\widetilde{u}_1"] & B\otimes T(B'_1\otimes C'_1). \end{tikzcd}$$

D'après ce que nous venons de démontrer nous avons

$$\begin{array}{rcl} E'[A',B',u] = E'[A'\otimes C', B'\otimes C', \widetilde{u}\,] & = & E'[A'_1\otimes C'_1, B'_1\otimes C'_1, \widetilde{u}_1\,] \\ & = & E'[A'_1, B'_1, \widetilde{u}_1\,] \end{array}$$

ce qui montre que $E'[A',B',u]$ ne depend pas effectivement des représentants de la classe $[A',B',u]$. Le diagramme commutatif (4.37) nous montre qu'en plus

$$\begin{array}{rcl} E'([B',C',v]\circ[A',B',u]) & = & E'[B',C',v]\circ E'[A',B',u] \\ E'[A',A',\mathrm{id}_{A\otimes TA'}] & = & \mathrm{id}_{E'A} \end{array}$$

ce qui fait que E' est bien un foncteur.

Il nous reste à prouver que $\check{E}'_{A,B} = \check{E}_{A,B}$ est fonctoriel en A, B pour que $(E', \check{E}')$ soit un $\otimes$-foncteur. Pour cela, nous démontrons d'abord la commutativité du diagramme

(4.38)
$$\begin{tikzcd} EA\otimes EA_1 \arrow[r, "\check{E}"] \arrow[d, "{E'[A',B',u]\otimes\mathrm{id}}"'] & E(A\otimes A_1) \arrow[d, "{E'([A',B',u]\otimes[A'_1,A'_1,\mathrm{id}_{A_1\otimes TA'_1}])}"] \\ EB\otimes EA_1 \arrow[r, "\check{E}"] & E(B\otimes A_1) \end{tikzcd}$$

(4.39)
$$\begin{tikzcd} EB\otimes EA_1 \arrow[r, "\check{E}"] \arrow[d, "{\mathrm{id}\otimes E'[A'_1,B'_1,u_1]}"'] & E(B\otimes A_1) \arrow[d, "{E'([B',B',\mathrm{id}]\otimes[A'_1,B'_1,u_1])}"] \\ EB\otimes EB_1 \arrow[r, "\check{E}"] & E(B\otimes B_1) \end{tikzcd}$$

ce qui donne la commuativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} EA\otimes EA_1 \arrow[r, "\check{E}"] \arrow[d, "{E'[A',B',u]\otimes E'[A'_1,B'_1,u_1]}"'] & E(A\otimes A_1) \arrow[d, "{E'([A',B',u]\otimes[A'_1,B'_1,u_1])}"] \\ EB\otimes EB_1 \arrow[r, "\check{E}"] & E(B\otimes B_1). \end{tikzcd}$$

Posons

$$E'([A',B',u]\otimes[A'_1,A'_1,\mathrm{id}_{A_1\otimes TA'_1}]) = E'[A'\otimes A'_1, B'\otimes A'_1, w],$$

w étant défini par le diagramme commutatif (4.25), et soit $\widetilde{u}$ la fléche dans $\underline{A}$ défini par le diagramme commutatif (Remarque 4.17(2))

$$\begin{tikzcd}
A \otimes T(A' \otimes A'_1) \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\widetilde{u}"'] & (A \otimes TA') \otimes TA'_1 \arrow[d, "u \otimes T\mathrm{id}"] \\
B \otimes T(B' \otimes A'_1) \arrow[r, dashed] & (B \otimes TB') \otimes TA'_1.
\end{tikzcd}$$

Considérons le diagramme suivant

$$
\begin{tikzcd}
EA\otimes EA_1 \arrow[r, "d_{EA}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[ddd, "\check{E}"'] \arrow[ddddddd, bend right=60, "{E'[A'\otimes A_1',B'\otimes A_1',\widetilde{u}]\otimes\mathrm{id}}"'] \arrow[dddd, phantom, "\mathrm{(I)}"', shift right=8ex] & (EA\otimes\underline{1}_Q)\otimes EA_1 \arrow[ddd, dashed] & (EA\otimes ET(A'\otimes A_1'))\otimes EA_1 \arrow[l, "(\mathrm{id}\otimes\mu_{A'\otimes A_1'})\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[r, "\check{E}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[ddd, dashed] & E(A\otimes T(A'\otimes A_1'))\otimes EA_1 \arrow[d, dashed] \arrow[ddddddd, bend left=80, "E\widetilde{u}\otimes\mathrm{id}"] \\
 & & & E((A\otimes TA')\otimes TA_1')\otimes EA_1 \arrow[d, dashed] \arrow[ddddd, bend left=70, "E(u\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, phantom, "\mathrm{(X)}", shift left=5ex] \\
\arrow[r, phantom, "\mathrm{(II)}"] & \arrow[r, phantom, "\mathrm{(III)}"] & \arrow[r, phantom, "\mathrm{(IV)}"] & E((A\otimes TA')\otimes(A_1\otimes TA_1')) \arrow[d, dashed] \arrow[ddd, bend left=70, "E(u\otimes\mathrm{id})"] \\
E(A\otimes A_1) \arrow[r, "d_{E(A\otimes A_1)}"] \arrow[d, "{E'[A'\otimes A_1',B'\otimes A_1',w]}"'] & E(A\otimes A_1)\otimes\underline{1}_Q \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(V)}"] & E(A\otimes A_1)\otimes ET(A'\otimes A_1') \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\mu_{A'\otimes A_1'}"'] \arrow[r, "\check{E}"] & E((A\otimes A_1)\otimes T(A'\otimes A_1')) \arrow[d, "Ew"] \arrow[d, phantom, "\mathrm{(IX)}", shift left=6ex] \\
E(B\otimes A_1) \arrow[r, "d_{E(B\otimes A_1)}"] & E(B\otimes A_1)\otimes\underline{1}_Q & E(B\otimes A_1)\otimes ET(B'\otimes A_1') \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\mu_{B'\otimes A_1'}"'] \arrow[r, "\check{E}"] & E((B\otimes A_1)\otimes T(B'\otimes A_1')) \\
\arrow[r, phantom, "\mathrm{(VI)}"] & \arrow[r, phantom, "\mathrm{(VII)}"] & \arrow[r, phantom, "\mathrm{(VIII)}"] & E((B\otimes TB')\otimes(A_1\otimes TA_1')) \arrow[u, dashed] \\
 & & & E((B\otimes TB')\otimes TA_1')\otimes EA_1 \arrow[u, dashed] \arrow[u, phantom, "\mathrm{(XI)}"', shift right=8ex] \\
EB\otimes EA_1 \arrow[r, "d_{EB}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[uuu, "\check{E}"] & (EB\otimes\underline{1}_Q)\otimes EA_1 \arrow[uuu, dashed] & (EB\otimes ET(B'\otimes A_1'))\otimes EA_1 \arrow[l, "(\mathrm{id}\otimes\mu_{B'\otimes A_1'})\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[r, "\check{E}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[uuu, dashed] & E(B\otimes T(B'\otimes A_1'))\otimes EA_1 \arrow[u, dashed]
\end{tikzcd}
$$

La commutativité des régions (II),(IV),(VI),(VIII) résulte de la Proposition 2.172; celle de (III),(VII),(X) de la fonctorialité de $\check{E}$ et des contraintes d'associativité, de commutativité; celle de (V) et du circuit extérieur est donnée par la définition de $E'[A', B', u]$ (Diag. (4.37)); celle de (IX) par la définition de w (Diag. (4.25)); enfin celle de (XI) par la définition de $\widetilde{u}$. D'oú la commutativité de la région (I) qui n'est autre que le diagramme (4.38) en remarquant que $E'[A'\otimes A'_1, B'\otimes A'_1, \widetilde{u}\,] = E'[A', B', u]$. De la même façon on démontre que le diagramme (4.39) est commutatif, ce qui montre que $\check{E}'_{A,B}$ est fonctoriel en A, B. Le couple $(E', \check{E}')$ ainsi défini est bien un $\otimes$-foncteur. Dans le cas où $[A', B', u] = Dv = [A', A', v \otimes \mathrm{id}_{TA'}]\colon A \to B$ le diagramme commutatif (4.37) est le contour extérieur du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
EA \arrow[r, "d_{EA}"] \arrow[d, "E'Dv"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & EA \otimes \underline{1}_Q \arrow[d, "Ev\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & EA \otimes ETA' \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\mu_{A'}"'] \arrow[r, "\check{E}"] \arrow[d, "Ev\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & E(A \otimes TA') \arrow[d, "E(v\otimes\mathrm{id})"] \\
EB \arrow[r, "d_{EB}"] & EB \otimes \underline{1}_Q & EB \otimes ETA' \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\mu_{A'}"'] \arrow[r, "\check{E}"] & E(B \otimes TA')
\end{tikzcd}$$

dont les régions (II) et (III) sont manifestement commutatives. D'où la commutativité de la région (I) qui donne, en vertu de la naturalité de d, $E'Dv = Ev$. On en conclut, avec le définition de $(D, \check{D})$ (Proposition 4.31) et de $(E', \check{E}')$ (Formula (4.35)) que $(E, \check{E}) = (E', \check{E}') \circ (D, \check{D})$.

(3) Compatibilité de $(E', \check{E}')$ avec les contraintes. Pour les contraintes d'associativité et de commutativité, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned}
E'[A', A', a_{A,B,C} \otimes \mathrm{id}_{TA'}] &= E'D(a_{A,B,C}) = E(a_{A,B,C}) \\
E'[A', A', c_{A,B} \otimes \mathrm{id}_{TA'}] &= E'D(c_{A,B}) = E(c_{A,B}) \\
\check{E}'_{A,B} &= \check{E}_{A,B}
\end{aligned}$$

pour avoir aussitôt les compatibilités. Quant à la contrainte d'unité de $\underline{P}$, nous avons pour l'image par E' de son objet unité $\underline{1}_P$:

$$E'(\underline{1}_P) = E'(TA'_0) = E(TA'_0) \underset{\mu_{A'_0}}{\overset{\sim}{\to}} \underline{1}_Q.$$

D'où $E'(\underline{1}_P)$ est régulier et par suite $(E', \check{E}')$ est compatible avec les unités en vertu de la Proposition 2.160.

(4) Enfin il nous reste à démontrer la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
ETA' \arrow[r, equal] \arrow[d, "\mu_{A'}"] & E'DTA' \arrow[d, "E'\lambda_{A'}"] \\
\underline{1}_Q \arrow[r, "\widehat{E}'"] & E'\underline{1}_P = E'TA'_0.
\end{tikzcd}$$

En vertu des formules (4.33) et (4.36), nous avons

$$\begin{array}{rcl} \lambda_{A'} & = & [A'_0, A', c_{TA',TA'_0}] \\ \widehat{E}' & = & \mu^{-1}_{A'_0}. \end{array}$$

La démonstration revient donc à démontrer l'égalité

$$E'\lambda_{A'} = E'[A'_0, A', c_{TA',TA'_0}] = \mu^{-1}_{A'_0}\mu_{A'}.$$

Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
ETA' \arrow[r, "d_{ETA'}"] \arrow[d, "E'\lambda_{A'}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{(I)}"] & ETA' \otimes \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[r, "\mu_{A'}\otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mu^{-1}_{A'_0}\mu_{A'}\otimes \mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{(II)}"] & \underline{1}_{\underline{Q}} \otimes \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[d, "c=\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "\text{(III)}"] & ETA' \otimes ETA'_0 \arrow[l, "\mu_{A'}\otimes\mu_{A'_0}"'] \arrow[r, "\check{E}"] \arrow[d, "c"] \arrow[dr, phantom, "\text{(IV)}"] & E(TA' \otimes TA'_0) \arrow[d, "Ec"] \\
ETA'_0 \arrow[r, "d_{ETA'_0}"] & ETA'_0 \otimes \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[r, "\mu_{A'_0}\otimes \mathrm{id}"] & \underline{1}_{\underline{Q}} \otimes \underline{1}_{\underline{Q}} & ETA'_0 \otimes ETA' \arrow[l, "\mu_{A'_0}\otimes\mu_{A'}"'] \arrow[r, "\check{E}"] & E(TA'_0 \otimes TA')
\end{tikzcd}$$

où la commutativité de la région (II) est évidente; celle de (III) résulte de la fonctorialité de la contrainte de commutativité c de $\underline{Q}$; celle de (IV) de la compatibilité de $(E, \check{E})$ avec les contraintes de commutativité dans $\underline{A}$ et $\underline{Q}$, enfin celle du circuit extérieur de la définition de $E'[A'_0, A', c] = E'\lambda_{A'}$ (Diagramme (4.37)). D'où la commutativité de (I) qui donne, en vertu de la naturalité de d, $E'\lambda_{A'} = \mu^{-1}_{A'_0}\mu_{A'}$. La proposition est ainsi démontrée. Le triple $(\underline{P}, (D, \check{D}), \lambda)$ est donc une solution du problème universel posé.

$\square$

Remark 4.40. Dans la Remarque 4.22 nous avons supposé $T(c'_{A',A'}) = \mathrm{id}$ pour tout $A' \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}$ pour simplifier les notations dans la construction du triple $(\underline{P}, (D, \check{D}), \lambda)$. En vérité, c'est le $\otimes$-foncteur AC composé $(\tau, \check{\tau}) = (H, \check{H}) \circ (T, \check{T})\colon \underline{A}' \to \underline{A}^{\mathcal{S}}$, qui possède la proprieté $\tau(c'_{A',A'}) = \mathrm{id}$, $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ étant la $\otimes$-catégorie AC quotient de $\underline{A}$ définie par la partie multiplicative $\mathcal{S}$ engendrée par l'ensemble des endomorphismes de la forme $T(c'_{A',A'})$ et $(H, \check{H})$ le $\otimes$-foncteur canonique de $\underline{A}$ dans $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ (Définition 4.5); ci qui nous conduit à la définition suivante.

Definition 4.41. Soient $\underline{A}$ une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte AC: (a, c), A' une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte AC: (a', c') et dont la catégorie sous-jacente est un groupoïde, $(T, \check{T})\colon \underline{A}' \to \underline{A}$ un $\otimes$-foncteur AC, $\mathcal{S}$ la partie multiplicative engendrée par l'ensemble des endomorphismes de $\underline{A}$ de la forme $T(c'_{A',A'})$, $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ la $\otimes$-catégorie AC quotient de $\underline{A}$ défini par $\mathcal{S}$, et $(H, \check{H})$ le $\otimes$-foncteur canonique de $\underline{A}$ dans $\underline{A}^{\mathcal{S}}$. On appelle $\otimes$-*catégorie* ACU de la $\otimes$-catégorie AC $\underline{A}$ défini par $(A', (T, \check{T}))$ la $\otimes$-catégorie ACU $\underline{P}$ suivante:

(1) $\mathrm{Ob}\,\underline{P} = \mathrm{Ob}\,\underline{A}$,

(2) $\mathrm{Hom}_{\underline{P}}(A,B) = \Phi(A,B)/\mathcal{R}_{A,B}$, où $A, B \in \mathrm{Ob}\,\underline{P}$, $\Phi(A,B)$ étant l'ensemble des triples (A', B', u) où $A', B' \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}'$, $\mu \in \mathrm{Fl}\,\underline{A}$, $u\colon A \otimes TA' \to B \otimes TB'$; $\mathcal{R}_{A,B}$ la relation lineaire définie dans $\Phi(A,B)$ de la façon suivante:

$$(A'_1, B'_1, u_1)\mathcal{R}_{A,B}(A'_2, B'_2, u_2)$$

si et seulement s'il existe des objets C'_1, C'_2 de $\underline{A}'$ et des isomorphismes

$$u'\colon A'_1 \otimes C'_1 \xrightarrow{\sim} A'_2 \otimes C'_2, \quad v'\colon B'_1 \otimes C'_1 \xrightarrow{\sim} B'_2 \otimes C'_2$$

de $\underline{A}'$ tels que soit commutatif dans $\underline{A}^{\mathcal{S}}$ le diagramme suivant (i.e., ce diagramme est dans $\underline{A}$ et il est transformé par le foncteur H en un diagramme commutatif dans $\underline{A}^{\mathcal{S}}$)

$$\begin{tikzcd}
A\otimes T(A'_1\otimes C'_1) \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes Tu'"'] & (A\otimes TA'_1)\otimes TC'_1 \arrow[r, "u_1\otimes \mathrm{id}"] & (B\otimes TB'_1)\otimes TC'_1 \arrow[r, dashed] & B\otimes T(B'_1\otimes C'_1) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes Tv'"] \\
A\otimes T(A'_2\otimes C'_2) \arrow[r, dashed] & (A\otimes TA'_2)\otimes TC'_2 \arrow[r, "u_2\otimes \mathrm{id}"] & (B\otimes TB'_2)\otimes TC'_2 \arrow[r, dashed] & B\otimes T(B'_2\otimes C'_2)
\end{tikzcd}$$

(3) Composition des flèches dans $\underline{P}$. Soient $[A', B', u]\colon A \to B, [B'', C'', v]\colon B \to C$.

$$[B'', C'', v] \circ [A', B', u] = [A' \otimes B'', B' \otimes C'', \omega]$$

ω étant défini par le diagramme commutatif (4.19).

(4) $\otimes$-structure sur $\underline{P}$

$$A \otimes E\,(\text{ dans } \underline{P}) = A \otimes E\,(\text{ dans } \underline{A})$$

$$[A', B', u] \otimes [E', F', v] = [A' \otimes E', B' \otimes F', w]$$

w étant défini par le diagramme commutatif (4.25).

(5) Contrainte ACU dans $\underline{P}$

$$([A', A', a \otimes \mathrm{id}], [A', A', c \otimes \mathrm{id}], (TA'_0, [A'_0 \otimes A', A', p_A]))$$

t_A et p_A étant définis dans la Proposition 4.29.

On appelle $\otimes$-*foncteur canonique* de $\underline{A}$ dans $\underline{P}$ le $\otimes$-foncteur AC $(D, \check{D})$:

$$D(A) = A,\, D(u) = [A', A', u \otimes \mathrm{id}_{TA'}],\, \check{D}_{A,B} = \mathrm{id}_{A\otimes B}$$

pour $A, B \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}, u\colon A \to B$.

On appelle $\otimes$-*isomorphisme canonique* le $\otimes$-isomorphisme

$$\lambda\colon (D, \check{D}) \circ (T, \check{T}) \xrightarrow{\sim} (I_{\underline{P}}, \check{I}_{\underline{P}})$$

défini dans la Proposition 4.32.

On voit aussitôt que si $\underline{A}$ est un groupoïde et si pour tout $A \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}$, il existe $B \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}$, $A' \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}'$ tels que $A \otimes B \simeq TA'$, alors $\underline{P}$ est une Pic-catégorie (Définition 3.50).

Les hypothèses et les notations restant les mêmes que dans la Définition 4.41, en plus nous notons par $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\mathrm{ACU}}(\underline{P},\underline{Q})$ la catégorie ayant pour objets les $\otimes$-foncteurs ACU de $\underline{P}$ (Définition 4.41) dans une $\otimes$-catégorie ACU $\underline{Q}$, pour morphismes les $\otimes$-morphismes unifères (Définition 2.152); par $\mathrm{Hom}^{\otimes,\mathrm{AC}}(\underline{A},\underline{Q})$ l'ensemble des $\otimes$-foncteurs AC de $\underline{A}$ dans $\underline{Q}$; et par $\underline{\mathcal{C}}$ la catégorie définie de la manière suivante:

$$\mathrm{Ob}\,\underline{\mathcal{C}} = \{((E,\check{E}),\mu) | (E,\check{E}) \in \mathrm{Hom}^{\otimes,\mathrm{AC}}(\underline{A},\underline{Q}),\, \mu\colon (E,\check{E}) \circ (T,\check{T}) \xrightarrow{\sim} I_{\underline{Q}}\,(\otimes\text{-isom.})\}$$

$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{C}}}(((E,\check{E}),\mu),((E,\check{E}),\nu))$ = l'ensemble des $\otimes$-morphismes τ du $\otimes$-foncteur $(E,\check{E})$ dans le $\otimes$-foncteur $(F,\check{F})$ tels que soit commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} ET \arrow[r, "\mu", "\sim"'] \arrow[d, "\tau T"'] & I_{\underline{Q}} \arrow[d, equal] \\ FT \arrow[r, "\nu", "\sim"'] & I_{\underline{Q}} \end{tikzcd} \tag{4.42}$$

$(I_{\underline{Q}},\check{I}_{\underline{Q}})$ étant le $\otimes$-foncteur $\underline{1}_{\underline{Q}}$ constant de $\underline{A}'$ dans $\underline{Q}$ (Définition 4.7). Alors nous avons la proposition suivante

Proposition 4.43. *Les catégories* $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\mathrm{ACU}}(\underline{P},\underline{Q})$ *et* $\underline{\mathcal{C}}$ *sont isomorphes.*

Proof. Posons

$$S : \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\mathrm{ACU}}(\underline{P},\underline{Q}) \longrightarrow \underline{\mathcal{C}}$$

$$\begin{tikzcd} (E',\check{E}') \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\tau'"] & ((E,\check{E}) = (E',\check{E}')\circ(D,\check{D}),\, \mu = (\widehat{E}')^{-1}\circ E'\lambda) \arrow[d, "\tau=\tau' D"] \\ (F',\check{F}') \arrow[r, mapsto] & ((F,\check{F}) = (F',\check{F}')\circ(D,\check{D}),\, \nu = (\widehat{F}')^{-1}\circ F'\lambda). \end{tikzcd}$$

En vertu de les Propositions 2.142 et (2.146), $(E,\check{E}) = (E',\check{E}')\circ(D,\check{D})$ et $(F,\check{F}) = (F',\check{F}')\circ(D,\check{D})$ appartiennent bien à $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\mathrm{ACU}}(\underline{P},\underline{Q})$. De plus $\tau = \tau' D$ est un

$\otimes$-morphisme (Définition 2.138). Ensuite considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
ETA' = E'DTA' \arrow[r, "E'\lambda_{A'}"] \arrow[d, "\tau_{TA'} = \tau'_{DA'}"'] \arrow[rr, bend left, "\mu_{A'}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & E'\underline{1}_{\underline{P}} \arrow[d, "\tau'_{\underline{1}_{\underline{P}}}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[l, "\widehat{E}'"'] \arrow[d, equal] \\
FTA' = F'DTA' \arrow[r, "F'\lambda_{A'}"'] \arrow[rr, bend right, "\nu_{A'}"'] & F'\underline{1}_{\underline{P}} & \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[l, "\widehat{F}'"]
\end{tikzcd}$$

(I) (IV)

où les régions (I), (IV) sont commutatives par la définition de μ, ν; (II) par la naturalité de τ'; (III) en vertu du fait que τ' est unifère; d'où la commutativité du circuit extérieur qui montre que τ est effectivement une flèche de $\underline{\mathcal{C}}$. Enfin on vérifie aussitôt que $S(s'\tau') = S(s')S(\tau')$ et $S(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$, par conséquent S est bien un foncteur.

Montrons maintenant que S est un isomorphisme. En vertu de la proposition 4.34, S est une bijection entre $\mathrm{Ob}(\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\mathrm{ACU}}(\underline{P}, \underline{Q}))$ et $\mathrm{Ob}\,\underline{\mathcal{C}}$. Il nous reste à prouver que S est aussi une bijection entre $\mathrm{Fl}(\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\mathrm{ACU}}(\underline{P}, \underline{Q}))$ et $\mathrm{Fl}\,\underline{\mathcal{C}}$. On voit aussitôt que S est une injection en vertu de $\tau_X = \tau'_{DX} = \tau'_X$ pour tout objet X de $\underline{A}$. Donnons-nous une flèche τ de $\underline{\mathcal{C}}$, i.e., un $\otimes$-morphisme de $(E, \check{E})$ dans $(F, \check{F})$ tel qu'on ait la commutativité du diagramme (4.42) et soient $(E', \check{E}'), (F', \check{F}') \in \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\mathrm{ACU}}(\underline{P}, \underline{Q})$ tels que $(E, \check{E}) = (E', \check{E}') \circ (D, \check{D}), (F, \check{F}) = (F', \check{F}') \circ (D, \check{D})$ (Proposition 4.34). En vertu de la Proposition 4.34 (Formule (4.35)), $E'A = EA, F'A = FA$ pour tout $A \in \mathrm{Ob}\,\underline{P} = \mathrm{Ob}\,\underline{A}$. Posons $\tau'_A = \tau_A, A \in \mathrm{Ob}\,\underline{P}$, et montrons que τ' est un $\otimes$-morphisme uniföre de $(E', \check{E}')$ dans $(F', \check{F}')$. D'abord considérons le diagramme ci-dessous où les régions (I),(III) sont commutatives par la définition de $E'[A', B', u]$, $F'[A', B', u]$ (Diagramme (4.37)); (VI),(VII) par la fonctorialité de d; (V),(VIII) en vertu du fait que τ est une flèche de $\underline{\mathcal{C}}$; (IV), (IX) et le circuit extérieur puisque τ est un $\otimes$-morphisme; d'où la commutativité de la région (II) qui montre que τ'_A est fonctoriel en A.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
E(A\otimes TA') \arrow[d, "Eu"'] \arrow[rrrrrrr, bend left=30, "\tau_{A\otimes TA'}", "(\mathrm{VI})"'] & EA\otimes ETA' \arrow[l, "\check{E}"'] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\mu_{A'}"] \arrow[rrrrr, bend left=30, "\tau_A\otimes\tau_{TA'}", "(\mathrm{V})"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & EA\otimes\underline{1}_Q \arrow[rrr, bend left=40, "\tau_A\otimes\mathrm{id}", "(\mathrm{IV})"'] & EA \arrow[l, "d_{EA}"'] \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "{E'[A',B',u]}"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & FA \arrow[r, "d_{FA}"] \arrow[d, "{F'[A',B',u]}"] & FA\otimes\underline{1}_Q \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & FA\otimes FTA' \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\nu_{A'}"'] \arrow[r, "\check{F}"] & F(A\otimes TA') \arrow[d, "Fu"] \\
E(B\otimes TB') \arrow[rrrrrrr, bend right=30, "\tau_{B\otimes TB'}", "(\mathrm{IX})"'] & EB\otimes ETB' \arrow[l, "\check{E}"'] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\mu_{B'}"] \arrow[rrrrr, bend right=30, "\tau_B\otimes\tau_{TB'}", "(\mathrm{VIII})"'] & EB\otimes\underline{1}_Q \arrow[rrr, bend right=40, "\tau_B\otimes\mathrm{id}", "(\mathrm{VII})"'] & EB \arrow[l, "d_{EB}"'] \arrow[r, "\tau_B"] & FB \arrow[r, "d_{FB}"] & FB\otimes\underline{1}_Q & FB\otimes FTB' \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\nu_{B'}"'] \arrow[r, "\check{F}"] & F(B\otimes TB')
\end{tikzcd}
$$

On vérifie aussitôt que τ' est un $\otimes$-morphisme puisque τ en est un et puisque

$$E'A = EA, \quad F'A = FA, \quad \check{E}'_{A,B} = \check{E}_{A,B}, \quad \check{F}'_{A,B} = \check{F}_{A,B}$$

pour $A, B \in \mathrm{Ob}\,\underline{P}$ (Formule (4.35)). Enfin, par la définition de τ', nous avons

$$\tau'_{\underline{1}_P} = \tau'_{TA'_0} = \tau_{TA'_0} = \nu^{-1}_{A'_0}\mu_{A'_0},$$

la dernière égalité étant le résultat de la commutativité du diagramme (4.42). On en conclut que τ' est unifère en appliquant la Proposition 2.154. $\square$

4.2. **Le problème d'inverser des objets.**

4.2.1. *Construction de la $\otimes$-catégorie de fractions d'une $\otimes$-catégorie* ACU.

Dans tout ce numéro, $\underline{C}$ est une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte ACU: $(a, c, (\underline{1}, g, d))$, $\underline{C}'$ une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte ACU: $(a', c', (\underline{1}', g', d'))$ et dont la catégorie sous-jacente est un groupoïde, $(F, \check{F})\colon \underline{C}' \to \underline{C}$ un $\otimes$-foncteur ACU. On se propose de chercher une $\otimes$-catégorie ACU $\underline{P}$ et un $\otimes$-foncteur ACU $(\mathcal{D}, \check{\mathcal{D}})\colon \underline{C} \to \underline{P}$ ayant les propriétés suivantes:

(1) $\mathcal{D}FX'$ est inversible dans $\underline{P}$ pour tout $X' \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}'$.
(2) Pour tout $\otimes$-foncteur ACU $(\mathcal{E}, \check{\mathcal{E}})$ de $\underline{C}$ dans une $\otimes$-catégorie ACU $\underline{Q}$ tel que $\mathcal{E}FX'$ soit inversible dans $\underline{Q}$ pour tout $X' \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}'$, il existe un $\otimes$-foncteur ACU $(E', \check{E}')$ unique (à $\otimes$-isomorphisme près) de $\underline{P}$ dans $\underline{Q}$ tel que $(\mathcal{E}, \check{\mathcal{E}}) = (E', \check{E}') \circ (\mathcal{D}, \check{\mathcal{D}})$.

Pour la construction de la solution du problème, nous avons besoin des lemmes suivants.

Lemma 4.44. *Les catégories* $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\mathrm{ACU}}(\underline{C} \times \underline{C}', \underline{Q})$ *et*

$$\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\mathrm{ACU}}(\underline{C}, \underline{Q}) \times \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\mathrm{ACU}}(\underline{C}', \underline{Q})$$

sont équivalentes, $\underline{Q}$ *étant une $\otimes$-catégorie munie d'un contrainte* ACU, $(a, c, (\underline{1}_Q, g, d))$.

Proof. D'abord remarquons que $\underline{C} \times \underline{C}'$ est une $\otimes$-catégorie ACU dont la loi $\otimes$ et les contraintes viennent des $\otimes$-catégories ACU $\underline{C}$ et $\underline{C}'$ de façon naturells, i.e., nous avons

$$\begin{array}{rcll} (X, X') \otimes (Y, Y') & = & (X \otimes Y, X' \otimes Y') & \quad X, Y \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}, X', Y' \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}' \\ (u, u') \otimes (v, v') & = & (u \otimes v, u' \otimes v') & \quad u, v \in \mathrm{Fl}\,\underline{C}, u', v' \in \mathrm{Fl}\,\underline{C}' \end{array}$$

contrainte d'associativité: (a, a')

contrainte de commutativité: (c, c')

contrainte d'unité: $((\underline{1},\underline{1}'),(g,g'),(d,d'))$

ce qui nous permet de parler de la catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\mathrm{ACU}}(\underline{C}\times\underline{C}',\underline{Q})$. Ensuite considérons le $\otimes$-foncteur $(i,\check{\imath})$ de $\underline{C}$ dans $\underline{C}\times\underline{C}'$ défini de la manière suivante

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "u"'] & iX = (X,\underline{1}') \arrow[d, "iu=(u,\mathrm{id}_{\underline{1}'})"] \\ Y \arrow[r, mapsto] & iY = (Y,\underline{1}') \end{tikzcd}$$

$$\check{\imath} = (\mathrm{id}_{X\otimes Y},(d')^{-1}).$$

On vérifie aussitôt que $(i,\check{\imath})$ est un $\otimes$-foncteur ACU. On définit de la même manière le $\otimes$-foncteur $(i',\check{\imath}')\colon \underline{C}'\to\underline{C}\times\underline{C}'$.

Cela étant, construisons un foncteur L de la maniére suivante

$$L\colon \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\mathrm{ACU}}(\underline{C}\times\underline{C}',\underline{Q}) \to \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\mathrm{ACU}}(\underline{C},\underline{Q}) \times \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\mathrm{ACU}}(\underline{C}',\underline{Q})$$

$$L(E,\check{E}) = ((Ei,(\check{E}i)),(E'i,(\check{E}'i))), \quad (E,\check{E})\in \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\mathrm{ACU}}(\underline{C}\times\underline{C}',\underline{Q})$$

$$L(\tau) = (\tau i,\tau i'), \quad \tau\colon (E,\check{E})\to(F,\check{F})\,(\otimes\text{-morphisme unifère })$$

et un foncteur M comme ci-dessous

$$M\colon \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\mathrm{ACU}}(\underline{C},\underline{Q}) \times \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\mathrm{ACU}}(\underline{C}',\underline{Q}) \to \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\mathrm{ACU}}(\underline{C}\times\underline{C}',\underline{Q})$$

$$M((\mathcal{E},\check{\mathcal{E}}),(\mathcal{E}',\check{\mathcal{E}}')) = (\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}',(\mathcal{E}\mathbin{\check{\otimes}}\mathcal{E}')),$$

$$((\mathcal{E},\check{\mathcal{E}}),(\mathcal{E}',\check{\mathcal{E}}'))\in \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\mathrm{ACU}}(\underline{C},\underline{Q}) \times \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\mathrm{ACU}}(\underline{C}',\underline{Q})$$

$$M(\rho,\rho') = \rho\otimes\rho',$$
$$\rho\colon (\mathcal{E},\check{\mathcal{E}})\to(\mathcal{F},\check{\mathcal{F}}),\ \rho'\colon (\mathcal{E}',\check{\mathcal{E}}')\to(\mathcal{F}',\check{\mathcal{F}}')\,(\otimes\text{-morphismes unifères})$$

où $(\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}')(X,X')=\mathcal{E}X\otimes\mathcal{E}'X',(\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}')(f,f')=\mathcal{E}f\otimes\mathcal{E}'f',(f,f')\colon(X,X')\to(Y,Y')$ avec $(\mathcal{E}\check{\otimes}\mathcal{E}')$ défini par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}')(X,X')\otimes(\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}')(Y,Y') \arrow[r, equal] \arrow[d, "(\mathcal{E}\check{\otimes}\mathcal{E}')"'] & (\mathcal{E}X\otimes\mathcal{E}'X')\otimes(\mathcal{E}Y\otimes\mathcal{E}'Y') \arrow[r, "a"] & ((\mathcal{E}X\otimes\mathcal{E}'X')\otimes\mathcal{E}Y)\otimes\mathcal{E}'Y' \\
 & & (\mathcal{E}X\otimes(\mathcal{E}'X'\otimes\mathcal{E}Y))\otimes\mathcal{E}'Y' \arrow[u, "a\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes c)\otimes\mathrm{id}"] \\
(\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}')((X,X')\otimes(Y,Y')) \arrow[d, equal] & & (\mathcal{E}X\otimes(\mathcal{E}Y\otimes\mathcal{E}'X'))\otimes\mathcal{E}'Y' \arrow[d, "a\otimes\mathrm{id}"] \\
\mathcal{E}(X\otimes Y)\otimes\mathcal{E}'(X'\otimes Y') & (\mathcal{E}X\otimes\mathcal{E}Y)\otimes(\mathcal{E}'X'\otimes\mathcal{E}'Y') \arrow[l, "\check{\mathcal{E}}\otimes\check{\mathcal{E}}'"'] \arrow[r, "a"] & ((\mathcal{E}X\otimes\mathcal{E}Y)\otimes\mathcal{E}'X')\otimes\mathcal{E}'Y'
\end{tikzcd}$$

et $\rho\otimes\rho'$ par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}')(X,X') \arrow[r, "(\rho\otimes\rho')_{(X,X')}"] \arrow[d, equal] & (\mathcal{F}\otimes\mathcal{F}')(X,X') \arrow[d, equal] \\
\mathcal{E}X\otimes\mathcal{E}'X' \arrow[r, "\rho_X\otimes\rho'_{X'}"] & \mathcal{F}X\otimes\mathcal{F}'X'.
\end{tikzcd}$$

Prouvons d'abord que L est un foncteur. Les $\otimes$-foncteurs $(Ei,(\check{Ei})),(Ei',(\check{Ei'}))$ sont compatibles avec les contraintes d'associativité, de commutativité et d'unité puisque $(E,\check{E}),(i,\check{i}),(i',\check{i}')$ les sont (Propositions 2.142, 2.146 et 2.151). D'où

$$L(E,\check{E})=((Ei,(\check{Ei})),(Ei',(\check{Ei'})))\in\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\mathrm{ACU}}(\underline{C},\underline{Q})\times\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\mathrm{ACU}}(\underline{C}',\underline{Q}).$$

On a aussi

$$L(\tau)=(\tau i,\tau i')\in\mathrm{Fl}(\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\mathrm{ACU}}(\underline{C},\underline{Q})\times\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\mathrm{ACU}}(\underline{C}',\underline{Q}))$$

puisque d'abord $\tau i,\tau i'$ sont des $\otimes$-morphismes (Définition 2.138) et ensuite

$$\begin{aligned}\tau i_{\underline{1}} &= \tau_{i\underline{1}}=\tau_{(\underline{1},\underline{1}')}\\ \tau i'_{\underline{1}'} &= \tau_{i'\underline{1}'}=\tau_{(\underline{1},\underline{1}')}\end{aligned}$$

ce qui montre que $\tau i_{\underline{1}}$ et $\tau i'_{\underline{1}'}$ sont des isomorphismes (τ est unifère) et par suite τi et $\tau i'$ sont unifères (Proposition 2.154). Enfin la définition de $L(\tau)$ nous donne

$$L(s\tau)=L(s)L(\tau),\quad L(\mathrm{id})=\mathrm{id}.$$

Donc L est un foncteur. Montrons maintenant que M est un foncteur. Il est clair que $(\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}',(\mathcal{E}\check{\otimes}\mathcal{E}'))$ est un $\otimes$-foncteur. Sa compatibilité avec les contraintes de commutativité vient de la considération du diagramme

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{E}(X\otimes Y)\otimes\mathcal{E}'(X'\otimes Y') \arrow[d, "\mathcal{E}c\otimes\mathcal{E}'c'"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(II)}"] & (\mathcal{E}X\otimes\mathcal{E}Y)\otimes(\mathcal{E}'X'\otimes\mathcal{E}'Y') \arrow[l, "\check{\mathcal{E}}\otimes\check{\mathcal{E}}'"'] \arrow[d, "c\otimes c"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(III)}"] & (\mathcal{E}X\otimes\mathcal{E}'X')\otimes(\mathcal{E}Y\otimes\mathcal{E}'Y') \arrow[l, dashed] \arrow[d, "c"] \arrow[ll, bend right=20, "(\mathcal{E}\check{\otimes}\mathcal{E}')"'] \arrow[ll, phantom, bend right=10, "\mathrm{(I)}"] \\
\mathcal{E}(Y\otimes X)\otimes\mathcal{E}'(Y'\otimes X') & (\mathcal{E}Y\otimes\mathcal{E}X)\otimes(\mathcal{E}'Y'\otimes\mathcal{E}'X') \arrow[l, "\check{\mathcal{E}}\otimes\check{\mathcal{E}}'"'] & (\mathcal{E}Y\otimes\mathcal{E}'Y')\otimes(\mathcal{E}X\otimes\mathcal{E}'X') \arrow[l, dashed] \arrow[ll, bend left=20, "(\mathcal{E}\check{\otimes}\mathcal{E}')"] \arrow[ll, phantom, bend left=10, "\mathrm{(IV)}"]
\end{tikzcd}
$$

dans lequel la commutativité des régions (I), (IV) résulte de la définition de $(\mathcal{E}\check{\otimes}\mathcal{E}')$; celle de (II) de la compatibilité de $(\mathcal{E},\check{\mathcal{E}}),(\mathcal{E}',\check{\mathcal{E}}')$ avec les contraintes de commutativité; celle de (III) de la Proposition 2.65; d'où la commutativité du circuit extérieur. Pour la compatibilité de $(\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}',(\mathcal{E}\check{\otimes}\mathcal{E}'))$ avec les contraintes d'associativité, considérons le diagramme suivant

$$
\begin{tikzcd}
(\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}')((X,X')\otimes((Y,Y')\otimes(Z,Z'))) \arrow[d, equal] & \arrow[d, phantom, "(\mathrm{I})"] & (\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}')(X,X')\otimes(\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}')((Y,Y')\otimes(Z,Z')) \arrow[ll, "(\mathcal{E}\check{\otimes}\mathcal{E}')"'] \arrow[d] & \arrow[l] \\
\mathcal{E}(X\otimes(Y\otimes Z))\otimes\mathcal{E}'(X'\otimes(Y'\otimes Z')) \arrow[d, equal] & (\mathcal{E}X\otimes\mathcal{E}(Y\otimes Z))\otimes(\mathcal{E}'X'\otimes\mathcal{E}'(Y'\otimes Z')) \arrow[l, "\mathcal{E}\otimes\check{\mathcal{E}}'"'] \arrow[r, dashed] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{III})"] & (\mathcal{E}X\otimes\mathcal{E}'X')\otimes(\mathcal{E}(Y\otimes Z)\otimes\mathcal{E}'(Y'\otimes Z')) \arrow[d, dashed] & \arrow[l] \\
\mathcal{E}(X\otimes(Y\otimes Z))\otimes\mathcal{E}'(X'\otimes(Y'\otimes Z')) \arrow[d, "\mathcal{E}a\otimes\mathcal{E}'a'"'] & \arrow[d, phantom, "(\mathrm{VI})"] & (\mathcal{E}X\otimes\mathcal{E}(Y\otimes Z))\otimes(\mathcal{E}'X'\otimes\mathcal{E}'(Y'\otimes Z')) \arrow[ll, "\check{\mathcal{E}}\otimes\check{\mathcal{E}}'"'] & \arrow[l] \\
\mathcal{E}((X\otimes Y)\otimes Z)\otimes\mathcal{E}'((X'\otimes Y')\otimes Z') \arrow[d, equal] & \arrow[d, phantom, "(\mathrm{VIII})"] & (\mathcal{E}(X\otimes Y)\otimes\mathcal{E}Z)\otimes(\mathcal{E}'(X'\otimes Y')\otimes\mathcal{E}'Z') \arrow[ll, "\check{\mathcal{E}}\otimes\check{\mathcal{E}}'"'] \arrow[d] & \arrow[l] \\
\mathcal{E}((X\otimes Y)\otimes Z)\otimes\mathcal{E}'((X'\otimes Y')\otimes Z') \arrow[d, equal] & (\mathcal{E}(X\otimes Y)\otimes\mathcal{E}Z)\otimes(\mathcal{E}'(X'\otimes Y')\otimes\mathcal{E}'Z') \arrow[l, "\check{\mathcal{E}}\otimes\check{\mathcal{E}}'"'] \arrow[r, dashed] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{XI})"] & (\mathcal{E}(X\otimes Y)\otimes\mathcal{E}'(X'\otimes Y'))\otimes(\mathcal{E}Z\otimes\mathcal{E}'Z') \arrow[d, equal] & \arrow[l] \\
(\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}')(((X,X')\otimes(Y,Y'))\otimes(Z,Z')) & & (\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}')((X,X')\otimes(Y,Y'))\otimes(\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}')(Z,Z') \arrow[ll, "(\mathcal{E}\check{\otimes}\mathcal{E}')"] & \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
{} & & (\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}')(X,X')\otimes((\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}')(Y,Y')\otimes(\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}')(Z,Z')) \arrow[ll, dash, "\mathrm{id}\otimes(\mathcal{E}\check{\otimes}\mathcal{E}')"'] \arrow[d, equal] \arrow[dl, phantom, "(\mathrm{II})"] \\
{} & (\mathcal{E}X\otimes\mathcal{E}'X')\otimes((\mathcal{E}Y\otimes\mathcal{E}Z)\otimes(\mathcal{E}'Y'\otimes\mathcal{E}'Z')) \arrow[l, dash, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes(\check{\mathcal{E}}\otimes\check{\mathcal{E}}')"'] \arrow[d, dashed] \arrow[dl, phantom, "(\mathrm{IV})"] & (\mathcal{E}X\otimes\mathcal{E}'X')\otimes((\mathcal{E}Y\otimes\mathcal{E}'Y')\otimes(\mathcal{E}Z\otimes\mathcal{E}'Z')) \arrow[l, dashed] \arrow[d, equal] \arrow[dl, phantom, "(\mathrm{V})"] \\
{} & (\mathcal{E}X\otimes(\mathcal{E}Y\otimes\mathcal{E}Z))\otimes(\mathcal{E}'X'\otimes(\mathcal{E}'Y'\otimes\mathcal{E}'Z')) \arrow[l, dash, "(\mathrm{id}\otimes\check{\mathcal{E}})\otimes(\mathrm{id}\otimes\check{\mathcal{E}}')"'] \arrow[d, "a\otimes a"] & (\mathcal{E}X\otimes\mathcal{E}'X')\otimes((\mathcal{E}Y\otimes\mathcal{E}'Y')\otimes(\mathcal{E}Z\otimes\mathcal{E}'Z')) \arrow[l, dashed] \arrow[d, "a"] \arrow[dl, phantom, "(\mathrm{VII})"] \\
{} & ((\mathcal{E}X\otimes\mathcal{E}Y)\otimes\mathcal{E}Z)\otimes((\mathcal{E}'X'\otimes\mathcal{E}'Y')\otimes\mathcal{E}'Z') \arrow[l, dash, "(\check{\mathcal{E}}\otimes\mathrm{id})\otimes(\check{\mathcal{E}}'\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[d, dashed] \arrow[dl, phantom, "(\mathrm{IX})"] & ((\mathcal{E}X\otimes\mathcal{E}'X')\otimes(\mathcal{E}Y\otimes\mathcal{E}'Y'))\otimes(\mathcal{E}Z\otimes\mathcal{E}'Z') \arrow[l, dashed] \arrow[d, equal] \arrow[dl, phantom, "(\mathrm{X})"] \\
{} & ((\mathcal{E}X\otimes\mathcal{E}Y)\otimes(\mathcal{E}'X'\otimes\mathcal{E}'Y'))\otimes(\mathcal{E}Z\otimes\mathcal{E}'Z') \arrow[l, dash, "(\check{\mathcal{E}}\otimes\check{\mathcal{E}}')\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{XII})"] & ((\mathcal{E}X\otimes\mathcal{E}'X')\otimes(\mathcal{E}Y\otimes\mathcal{E}'Y'))\otimes(\mathcal{E}Z\otimes\mathcal{E}'Z') \arrow[l, dashed] \arrow[d, equal] \\
{} & & ((\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}')(X,X')\otimes(\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}')(Y,Y'))\otimes(\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}')(Z,Z') \arrow[ll, dash, "(\mathcal{E}\check{\otimes}\mathcal{E}')\otimes\mathrm{id}"]
\end{tikzcd}
$$

où les régions (I),(II), (XI),(XII) sont commutatives par la définition de $\mathcal{E}\check{\otimes}\mathcal{E}'$; (III),(VIII) par évidence; (IV),(IX) par la naturalité de a et c; (V), (VII), (X) par la Proposition 2.65; enfin (VI) par la compatibilité de $(\mathcal{E},\check{\mathcal{E}}),(\mathcal{E}',\check{\mathcal{E}}')$ avec les contraintes d'associativité. On en déduit la commutativité du circuit extérieur qui montre que $(\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}', \mathcal{E}\,\check{\otimes}\,\mathcal{E}')$ est compatible avec les contraintes d'associativité. Enfin, $(\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}', \mathcal{E}\,\check{\otimes}\,\mathcal{E}')$ est compatible avec les contraintes d'unité en remarquant que

$$(\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}')(\underline{1},\underline{1}') = \mathcal{E}\underline{1}\otimes\mathcal{E}'\underline{1}' \underset{\widehat{\mathcal{E}}\otimes\widehat{\mathcal{E}}'}{\xrightarrow{\sim}} \underline{1}_{\underline{Q}}\otimes\underline{1}_{\underline{Q}} \underset{d}{\xrightarrow{\sim}} \underline{1}_{\underline{Q}},$$

i.e., $(\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}')(\underline{1},\underline{1}')$ est régulier, et en appliquant la Proposition 2.160. Tout cela nous permet de conclure que

$$M((\mathcal{E},\check{\mathcal{E}}),(\mathcal{E}',\check{\mathcal{E}}')) = (\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}',(\mathcal{E}\,\check{\otimes}\,\mathcal{E}')) \in \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\mathrm{ACU}}(\underline{C}\times\underline{C}',\underline{Q}).$$

Il est immédiat que $M(\rho,\rho') = \rho\otimes\rho'$ est un $\otimes$-morphisme unifère quand ρ,ρ' le sont, et

$$\begin{array}{rcl} M(\tau\rho,\tau'\rho') & = & M(\tau,\tau')M(\rho,\rho') \\ M(\mathrm{id},\mathrm{id}) & = & \mathrm{id}. \end{array}$$

Par conséquent M est un foncteur.

En vertu de la définition des foncteurs L, M nous avons

$$ML(E,\check{E}) = (Ei\otimes Ei'^{le\prime},(Ei\,\check{\otimes}\,Ei')).$$

Pour tout couple $(X,X')\in\mathrm{Ob}(\underline{C}\times\underline{C}')$, définissons $\alpha_{(E,\check{E})}(X,X')$ par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
ML(E,\check{E})(X,X') \arrow[rr, "\alpha_{(E,\check{E})}(X,X')"] \arrow[d, equal] & & (E,\check{E})(X,X') \arrow[d, equal] \\
E(X,\underline{1}')\otimes E(\underline{1},X') \arrow[r, "\check{E}"] & E(X\otimes\underline{1},\underline{1}'\otimes X') & E(X,X') \arrow[l, "E(d_X,g'_{X'})"']
\end{tikzcd}$$

Il est clair que $\alpha_{(E,\check{E})}(X,X')$ est un isomorphisme pour tout couple (X,X') comme étant le composé de deux isomorphismes. Prouvons que $\alpha_{(E,\check{E})}$ est un $\otimes$-morphisme unifère. $\alpha_{(E,\check{E})}(X,X')$ est bien fonctoriel en X,X' comme étant le composé de deux flèches qui sont fonctorielles en X,X'. Ensuite considérons le diagramme

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
E((X,X')\otimes(Y,Y')) \arrow[d, equal] \arrow[ddddd, bend right=60, "\check{E}"'] & & (Ei\otimes Ei')((X,X')\otimes(Y,Y')) \arrow[ll, "\alpha_{(E,\check{E})}((X,X')\otimes(Y,Y'))"'] \arrow[d, equal] \arrow[ddddd, bend left=60, "(Ei\check{\otimes}Ei')"] \arrow[dl, phantom, "(\mathrm{I})"] \\
E(X\otimes Y,X'\otimes Y') \arrow[r, "E(d_{X\otimes Y},g'_{X'\otimes Y'})"] \arrow[dd, equal] \arrow[ddr, phantom, "(\mathrm{II})"] \arrow[ddd, phantom, "(\mathrm{VII})"'] & E((X\otimes Y)\otimes\underline{1},\underline{1}'\otimes(X'\otimes Y')) \arrow[d, "E(\mathrm{id}\otimes d,d'\otimes\mathrm{id})"] & E(X\otimes Y,\underline{1}')\otimes E(\underline{1},X'\otimes Y') \arrow[l, "\check{E}"'] \arrow[d, "E(\mathrm{id},d')\otimes E(d,\mathrm{id})"] \arrow[dl, phantom, "(\mathrm{III})"] \\
 & E((X\otimes Y)\otimes(\underline{1}\otimes\underline{1}),(\underline{1}'\otimes\underline{1}')\otimes(X'\otimes Y')) & E(X\otimes Y,\underline{1}'\otimes\underline{1}')\otimes E(\underline{1}\otimes\underline{1},X'\otimes Y') \arrow[l, "\check{E}"'] \arrow[d, "\check{E}\otimes\check{E}"] \arrow[dl, phantom, "(\mathrm{IV})"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{VIII})", shift left=8ex] \\
E(X\otimes Y,X'\otimes Y') \arrow[r, "E(d_X\otimes d_Y,g'_X\otimes g'_Y)"] & E((X\otimes\underline{1})\otimes(Y\otimes\underline{1}),(\underline{1}'\otimes X')\otimes(\underline{1}'\otimes Y')) \arrow[u, "E(\cdot)"'] & (E(X\otimes\underline{1}')\otimes E(Y,\underline{1}'))\otimes(E(1,X')\otimes E(\underline{1},Y')) \arrow[d, dashed] \\
E(X,X')\otimes E(Y,Y') \arrow[u, "\check{E}"] \arrow[r, "E(d_X,g'_X)\otimes E(d_Y,g'_Y)"] \arrow[d, equal] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{V})"] & E(X\otimes\underline{1},\underline{1}'\otimes X')\otimes E(Y\otimes\underline{1},\underline{1}'\otimes Y') \arrow[u, "\check{E}"'] & (E(X,\underline{1}')\otimes E(\underline{1},X'))\otimes(E(Y,\underline{1}')\otimes E(\underline{1},Y')) \arrow[l, "\check{E}\otimes\check{E}"'] \arrow[d, equal] \arrow[dl, phantom, "(\mathrm{VI})"] \\
E(X,X')\otimes E(Y,Y')) & & (Ei\otimes Ei')(X,X')\otimes(Ei\otimes Ei')(Y,Y') \arrow[ll, "\alpha_{(E,\check{E})}(X,X')\otimes\alpha_{(E,\check{E})}(Y,Y')"]
\end{tikzcd}
$$

oú la fléche $E(\cdot)$ est défini par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
E((X\otimes \underline{1})\otimes(Y\otimes \underline{1}),(\underline{1}'\otimes X')\otimes(\underline{1}'\otimes Y')) \arrow[r, "E(a,a')"] \arrow[d, "E(\cdot)"] & E(((X\otimes \underline{1})\otimes Y)\otimes \underline{1},((\underline{1}'\otimes X')\otimes \underline{1}')\otimes Y') \\
E((X\otimes Y)\otimes(\underline{1}\otimes \underline{1}),(\underline{1}'\otimes \underline{1}')\otimes(X'\otimes Y')) \arrow[d, "E(a,a')"] & E((X\otimes(\underline{1}\otimes Y))\otimes \underline{1},(\underline{1}'\otimes(X'\otimes \underline{1}')\otimes Y')) \arrow[u, "E(a\otimes \mathrm{id},a'\otimes \mathrm{id})"'] \arrow[d, "E((\mathrm{id}\otimes c)\otimes \mathrm{id},(\mathrm{id}\otimes c')\otimes \mathrm{id})"] \\
E(((X\otimes Y)\otimes \underline{1})\otimes \underline{1},((\underline{1}'\otimes \underline{1}')\otimes X')\otimes Y') & E((X\otimes(Y\otimes \underline{1}))\otimes \underline{1},(\underline{1}'\otimes(\underline{1}'\otimes X')\otimes Y') \arrow[l, "E(a\otimes \mathrm{id},a'\otimes \mathrm{id})"']
\end{tikzcd}$$

i.e., la flèche $(\cdot)$ est le composé des flèches construits à l'aide des contraintes d'associativité (a,a'), de commutativité (c,c'), des identités et de la loi $\otimes$ dans $\underline{C}\times\underline{C}'$.

Les régions (I), (VI) du diagramme considéré sont commutatives par la définition de $\alpha_{(E,\check{E})}$; (II) par la Proposition 2.115; (III), (V) par la naturalité de $\check{E}$; (IV) par la Proposition 2.170; (VII) par évidence; (VIII) par la définition de $(Ei\check{\otimes}Ei')$. On en déduit la commutativité du circuit extérieur qui exprime que $\alpha_{(E,\check{E})}$ est un $\otimes$-morphisme. Le fait que $\alpha_{(E,\check{E})}$ est unifère résulte du Corollaire 2.155. De plus, $\alpha_{(E,\check{E})}$ est fonctoriel en $(E,\check{E})$, i.e., pour tout $\otimes$-morphisme unifère $\tau\colon(E,\check{E})\to(F,\check{F})$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(Ei\otimes Ei',(Ei\check{\otimes}Ei')) \arrow[r, "\alpha_{(E,\check{E})}"] \arrow[d, "\tau i\otimes\tau i'"'] & (E,\check{E}) \arrow[d, "\tau"] \\
(Fi\otimes Fi',(Fi\check{\otimes}Fi')) \arrow[r, "\alpha_{(F,\check{F})}"] & (F,\check{F})
\end{tikzcd}$$

est commutatif. En effet, considérons le diagramme ci-dessous dont les régions (I), (IV) sont commutatives par la définition de $\alpha_{(E,\check{E})}(X,X'),\alpha_{(F,\check{F})}(X,X')$; (II), (III) en vertu du fait que τ est un $\otimes$-morphisme:

$$\begin{tikzcd}
E(X,\underline{1}')\otimes E(\underline{1},X') \arrow[r, "\check{E}"] \arrow[d, "\tau_{(X,\underline{1}')}\otimes\tau_{(\underline{1},X')}"'] \arrow[rr, bend left, "\alpha_{(E,\check{E})}(X,X')"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(II)}"] & E(X\otimes\underline{1},\underline{1}'\otimes X') \arrow[d, "\tau_{(X\otimes\underline{1},\underline{1}'\otimes X')}"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(III)}"] & E(X,X') \arrow[l, "E(d_X,g'_{X'})"'] \arrow[d, "\tau_{(X,X')}"] \\
F(X,\underline{1}')\otimes F(\underline{1},X') \arrow[r, "\check{F}"] \arrow[rr, bend right, "\alpha_{(F,\check{F})}(X,X')"'] & F(X\otimes\underline{1},\underline{1}'\otimes X') & F(X,X'). \arrow[l, "F(d_X,g'_{X'})"']
\end{tikzcd}$$

Par conséquent on obtient la commutativité du circuit extérieur. Nous avons ainsi trouvé un isomorphisme de foncteurs

$$\alpha\colon ML \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_{\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\mathrm{ACU}}(\underline{C}\times\underline{C}',\underline{Q})}.$$

Toujours partant de la définition des foncteurs L, M nous obtenons

$$LM((\mathcal{E},\check{\mathcal{E}}),(\mathcal{E}',\check{\mathcal{E}}')) = (((\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}')i,((\mathcal{E}\check{\otimes}\mathcal{E}')i)),((\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}')i',((\mathcal{E}\check{\otimes}\mathcal{E}')i'))).$$

Pour tout $X \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$, définissons $\beta_{(\mathcal{E},\check{\mathcal{E}}),(\mathcal{E}',\check{\mathcal{E}}')}(X)$ par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}')i(X) \arrow[rr, "\beta_{(\mathcal{E},\check{\mathcal{E}}),(\mathcal{E}',\check{\mathcal{E}}')}(X)"] \arrow[d, equal] & & \mathcal{E}X \arrow[d, "d_{\mathcal{E}X}"] \\
(\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}')(X,\underline{1}') = \mathcal{E}X\otimes\mathcal{E}'\underline{1}' & & \mathcal{E}X\otimes\underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[ll, "\mathrm{id}\otimes\widehat{\mathcal{E}'}"']
\end{tikzcd}$$

$\widehat{\mathcal{E}'}$ étant l'isomorphisme venant de la compatibilité de $(\mathcal{E}',\check{\mathcal{E}}')$ avec les unités. Il est clair que $\beta_{(\mathcal{E},\check{\mathcal{E}}),(\mathcal{E}',\check{\mathcal{E}}')}(X)$ est un isomorphisme pour tout $X \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$. Prouvons que $\beta_{(\mathcal{E},\check{\mathcal{E}}),(\mathcal{E}',\check{\mathcal{E}}')}$ est un $\otimes$-morphisme unifère. D'abord on voit aussitôt que $\beta_{(\mathcal{E},\check{\mathcal{E}}),(\mathcal{E}',\check{\mathcal{E}}')}(X)$ est fonctoriel en X. Pour montrer que $\beta_{(\mathcal{E},\check{\mathcal{E}}),(\mathcal{E}',\check{\mathcal{E}}')}$ est un $\otimes$-morphisme nous considérons le diagramme

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{E}X \otimes \mathcal{E}Y \arrow[rrr, "\check{E}"] \arrow[d, "d\otimes d"] & \arrow[d, phantom, "(\mathrm{I})"] & & \mathcal{E}(X \otimes Y) \arrow[d, "d"] \\
(\mathcal{E}X \otimes \underline{1}_{\underline{Q}}) \otimes (\mathcal{E}Y \otimes \underline{1}_{\underline{Q}}) \arrow[r, dashed] \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes\widehat{\mathcal{E}}')\otimes(\mathrm{id}\otimes\widehat{\mathcal{E}}')"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & (\mathcal{E}X \otimes \mathcal{E}Y) \otimes (\underline{1}_{\underline{Q}} \otimes \underline{1}_{\underline{Q}}) \arrow[rr, "\check{E}\otimes d"] \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes(\widehat{\mathcal{E}}'\otimes\widehat{\mathcal{E}}')"] & \arrow[d, phantom, "(\mathrm{III})"] & \mathcal{E}(X \otimes Y) \otimes \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\widehat{\mathcal{E}}'"] \\
(\mathcal{E}X \otimes \mathcal{E}'\underline{1}') \otimes (\mathcal{E}Y \otimes \mathcal{E}'\underline{1}') \arrow[r, dashed] \arrow[d, equal] & (\mathcal{E}X \otimes \mathcal{E}Y) \otimes (\mathcal{E}'\underline{1}' \otimes \mathcal{E}'\underline{1}') \arrow[r, "\check{\mathcal{E}}\otimes\check{\mathcal{E}}'"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{IV})"] & \mathcal{E}(X \otimes Y) \otimes \mathcal{E}'(\underline{1}' \otimes \underline{1}') \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\mathcal{E}'d'"] & \mathcal{E}(X \otimes Y) \otimes \mathcal{E}'\underline{1}' \arrow[d, equal] \\
(\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}')i(X) \otimes (\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}')i(Y) \arrow[rrr, "((\mathcal{E}\check{\otimes}\mathcal{E}')i)"] & & & (\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}')i(X \otimes Y)
\end{tikzcd}
$$

dans lequel les régions (I),(III) sont commutatives en vertu de la Proposition 2.170; (II) en vertu de la fonctorialité des contraintes d'associativité et de commutativité; (IV) en vertu de la définition de $((\mathcal{E} \check{\otimes} \mathcal{E}')i)$. On en conclut la commutativité du circuit extérieur, ce qui prouve que $\beta_{(\mathcal{E},\check{\mathcal{E}}),(\mathcal{E}',\check{\mathcal{E}}')}$ est un $\otimes$-morphisme. β est en plus un isomorphisme, ce qui implique que $\beta_{(\mathcal{E},\check{\mathcal{E}}),(\mathcal{E}',\check{\mathcal{E}}')}$ est unifère (Corollaire 2.155). Le fait que $\beta_{(\mathcal{E},\check{\mathcal{E}}),(\mathcal{E}',\check{\mathcal{E}}')}$ est fonctoriel en $(\mathcal{E},\check{\mathcal{E}}),(\mathcal{E}',\check{\mathcal{E}}')$, i.e., pour tout $\otimes$-morphisme unifère $\rho\colon (\mathcal{E},\check{\mathcal{E}}) \to (\mathcal{F},\check{\mathcal{F}})$ et tout $\otimes$-morphisme unifère $\rho'\colon (\mathcal{E}',\check{\mathcal{E}}') \to (\mathcal{F}',\check{\mathcal{F}}')$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
((\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}')i, ((\mathcal{E} \check{\otimes} \mathcal{E}')i)) \arrow[r, "\beta_{(\mathcal{E},\check{\mathcal{E}}),(\mathcal{E}',\check{\mathcal{E}}')}"] \arrow[d, "(\rho\otimes\rho')i"'] & (\mathcal{E},\check{\mathcal{E}}) \arrow[d, "\rho"] \\
((\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}')i, ((\mathcal{F} \check{\otimes} \mathcal{F}')i)) \arrow[r, "\beta_{(\mathcal{F},\check{\mathcal{F}}),(\mathcal{F}',\check{\mathcal{F}}')}"] & (\mathcal{F},\check{\mathcal{F}})
\end{tikzcd}$$

est commutatif, résulte de la considération du diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}X \arrow[r, "d_{\mathcal{E}X}"] \arrow[d, "\rho_X"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(I)}"] & \mathcal{E}X \otimes \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\widehat{\mathcal{E}'}"] \arrow[d, "\rho_X\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(II)}"] & \mathcal{E}X \otimes \mathcal{E}'\underline{1}' \arrow[d, "\rho_X\otimes\rho'_{\underline{1}'}"] \\
\mathcal{F}X \arrow[r, "d_{\mathcal{F}X}"] & \mathcal{F}X \otimes \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\widehat{\mathcal{F}'}"] & \mathcal{F}X \otimes \mathcal{F}'\underline{1}'
\end{tikzcd}$$

dont la région (I) est commutative en vertu de la naturalité de d et la région (II) du fait qui ρ' est unifère. D'où la commutativité du circuit extérieur.

De la même manière, nous définissons $\beta'_{(\mathcal{E},\check{\mathcal{E}}),(\mathcal{E}',\check{\mathcal{E}}')}$ par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}')i'X' \arrow[r, "\beta'_{(\mathcal{E},\check{\mathcal{E}}),(\mathcal{E}',\check{\mathcal{E}}')}(X')"] \arrow[d, equal] & \mathcal{E}'X' \arrow[d, "g_{\mathcal{E}'X'}"] \\
(\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}')(\underline{1},X') = \mathcal{E}\underline{1}\otimes\mathcal{E}'X' & \underline{1}_{\underline{Q}} \otimes \mathcal{E}'X' \arrow[l, "\widehat{\mathcal{E}}\otimes\mathrm{id}"']
\end{tikzcd} \qquad (X' \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}')$$

et nous démontrons que $\beta'_{(\mathcal{E},\check{\mathcal{E}}),(\mathcal{E}',\check{\mathcal{E}}')}(X')$ est un $\otimes$-isomorphisme, et $\beta'_{(\mathcal{E},\check{\mathcal{E}}),(\mathcal{E}',\check{\mathcal{E}}')}$ est fonctoriel en $(\mathcal{E},\check{\mathcal{E}}),(\mathcal{E}',\check{\mathcal{E}}')$. Ces démonstrations faites (elles sont analogues à celles de β), nous pouvons écrire

$$(\beta,\beta')\colon LM \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_{\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\,\mathrm{ACU}}(\underline{C},\underline{Q})\times\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\,\mathrm{ACU}}(\underline{C}',\underline{Q})}.$$

Donc les foncteurs L, M sont des équivalences qu'on appelle les *équivalences canoniques* entre $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\,\mathrm{ACU}}(\underline{C}\times\underline{C}',\underline{Q})$ et $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\,\mathrm{ACU}}(\underline{C},\underline{Q})\times\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\,\mathrm{ACU}}(\underline{C}',\underline{Q})$. Le lemme est ainsi démontré. $\square$

Lemma 4.45. *Soient $\underline{Q}$ une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte* ACU*:*

$$(a, c, (\underline{1}_{\underline{Q}}, g, d))$$

et $(\mathcal{E}, \check{\mathcal{E}})$ un $\otimes$-foncteur ACU *de $\underline{C}$ dans $\underline{Q}$ tel que $\mathcal{E}FX'$ soit inversible dans $\underline{Q}$ pour tout $X' \in \operatorname{Ob} \underline{C}'$. Alors il existe un $\otimes$-foncteur* ACU *$(\eta, \check{\eta})\colon \underline{C}' \to \underline{Q}$ et un isomorphisme de foncteurs μ tels que*

$$\mu_{X'}\colon \mathcal{E}FX' \otimes \eta X' \xrightarrow{\sim} \underline{1}_{\underline{Q}} \tag{4.46}$$

pour tout $X' \in \operatorname{Ob} \underline{C}'$.

Proof. Puisque $\mathcal{E}FX'$ est inversible dans $\underline{Q}$, il existe un objet et un isomorphisme dans $\underline{Q}$, notés respectivement par $\eta X'$ et $\mu_{X'}$, tels qu'on ait la relation (4.46). Pour tout $X' \in \operatorname{Ob} \underline{C}'$ choisissons $\eta X', \mu_{X'}$ vérifiant (4.46). Soit $u'\colon X' \xrightarrow{\sim} Y'$ une fléche de $\underline{C}'$ (rappellons-nous que la catégorie sous-jacente de $\underline{C}'$ est un grupoïde), alors il existe une flèche et une seule notée $\eta u'$, $\eta u'\colon \eta X' \to \eta Y'$ (Proposition 2.130) rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}FX' \otimes \eta X' \arrow[r, "\mu_{X'}"] \arrow[dr, "\mathcal{E}Fu' \otimes \mathrm{id}"'] & \underline{1}_{\underline{Q}} & \mathcal{E}FY' \otimes \eta Y' \arrow[l, "\mu_{Y'}"'] \\
& \mathcal{E}FY' \otimes \eta X' \arrow[ur, "\mathrm{id} \otimes \eta u'"'] &
\end{tikzcd} \tag{4.47}$$

De plus nous définissons pour tout couple (X', Y'), $X', Y' \in \operatorname{Ob} \underline{C}'$ l'isomorphisme

$$\check{\eta}_{X',X'}\colon \eta X' \otimes \eta Y' \xrightarrow{\sim} \eta(X' \otimes Y')$$

par le diagramme commutatif
(4.48)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}F(X' \otimes Y') \otimes \eta(X' \otimes Y') \arrow[r, "\mu_{X' \otimes Y'}"] & \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[r, "d"] & \underline{1}_{\underline{Q}} \otimes \underline{1}_{\underline{Q}} \\
\mathcal{E}F(X' \otimes Y') \otimes (\eta X' \otimes \eta Y') \arrow[u, "\mathrm{id} \otimes \check{\eta}"] & (\mathcal{E}FX' \otimes \mathcal{E}FY') \otimes (\eta X' \otimes \eta Y') \arrow[l, "\check{\mathcal{E}F} \otimes \mathrm{id}"'] \arrow[r, dashed] & (\mathcal{E}FX' \otimes \eta X') \otimes (\mathcal{E}FY' \otimes \eta Y') \arrow[u, "\mu_{X'} \otimes \mu_{Y'}"']
\end{tikzcd}$$

ce qu'on peut toujours réaliser puisque $\mathcal{E}F(X' \otimes Y')$ est inversible, donc régulier.

Nous allons montrer que $(\eta, \check{\eta})\colon \underline{C}' \to \underline{Q}$ est un $\otimes$-foncteur ACU et μ un isomorphisme de foncteurs. D'abord η est un foncteur en vertu de la Proposition 2.130. Pour démontrer que $\check{\eta}_{X' \otimes Y'}$ est fonctoriel en X', Y', nous démontrons qu'il est fonctoriel en une variable, par exemple X', la démonstration pour l'autre variable étant analogue. Considérons donc le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{E}FX' \otimes \mathcal{E}FY') \otimes (\eta X' \otimes \eta Y') \arrow[r, "\check{\mathcal{E}F} \otimes \check{\eta}"] \arrow[d, "(\mathcal{E}Fu' \otimes \mathrm{id}) \otimes (\eta u' \otimes \mathrm{id})"'] & \mathcal{E}F(X' \otimes Y') \otimes \eta(X' \otimes Y') \arrow[d, "\mathcal{E}F(u' \otimes \mathrm{id}) \otimes \eta(u' \otimes \mathrm{id})"] \\
(\mathcal{E}FX'_1 \otimes \mathcal{E}FY') \otimes (\eta X'_1 \otimes \eta Y') \arrow[r, "\check{\mathcal{E}F} \otimes \check{\eta}"] & \mathcal{E}F(X'_1 \otimes Y') \otimes \eta(X'_1 \otimes Y')
\end{tikzcd}$$

dont la commutativité résulte du fait que $\check{\mathcal{E}F} \otimes \check{\eta}$ est fonctoriel en X' (Diagramme (4.47) et (4.48)). Or ce diagramme est le contour extérieur du diagramme suivant dans lequel la commutativité de la région (II) résulte de la fonctorialité de $\check{\mathcal{E}F}$:

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{E}FX' \otimes \mathcal{E}FY') \otimes (\eta X' \otimes \eta Y') \arrow[r, "\check{\mathcal{E}F} \otimes \check{\eta}"] \arrow[d, "(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \otimes (\eta u' \otimes \mathrm{id})"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & \mathcal{E}F(X' \otimes Y') \otimes \eta(X' \otimes Y') \arrow[d, "\mathcal{E}F(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \otimes \eta(u' \otimes \mathrm{id})"] \\
(\mathcal{E}FX' \otimes \mathcal{E}FY') \otimes (\eta X'_1 \otimes \eta Y') \arrow[r, "\check{\mathcal{E}F} \otimes \check{\eta}"] \arrow[d, "(\mathcal{E}Fu' \otimes \mathrm{id}) \otimes (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id})"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & \mathcal{E}F(X' \otimes Y') \otimes \eta(X'_1 \otimes Y') \arrow[d, "\mathcal{E}F(u' \otimes \mathrm{id}) \otimes \eta(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id})"] \\
(\mathcal{E}FX'_1 \otimes \mathcal{E}FY') \otimes (\eta X'_1 \otimes \eta Y') \arrow[r, "\check{\mathcal{E}F} \otimes \check{\eta}"] & \mathcal{E}F(X'_1 \otimes Y') \otimes \eta(X'_1 \otimes Y')
\end{tikzcd}$$

On en déduit la commutativité de la région (I) qui, à son tour, est le contour extérieur du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{E}FX' \otimes \mathcal{E}FY') \otimes (\eta X' \otimes \eta Y') \arrow[r, "\check{\mathcal{E}F} \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \otimes (\eta u' \otimes \mathrm{id})"'] & \mathcal{E}F(X' \otimes Y') \otimes (\eta X' \otimes \eta Y') \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \check{\eta}"] \arrow[d, "\mathcal{E}F(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \otimes (\eta u' \otimes \mathrm{id})"'] & \mathcal{E}F(X' \otimes Y') \otimes \eta(X' \otimes Y') \arrow[d, "\mathcal{E}F(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \otimes \eta(u' \otimes \mathrm{id})"'] \\
(\mathcal{E}FX' \otimes \mathcal{E}FY') \otimes (\eta X'_1 \otimes \eta Y') \arrow[r, "\check{\mathcal{E}F} \otimes \mathrm{id}"] & \mathcal{E}F(X' \otimes Y') \otimes (\eta X'_1 \otimes \eta Y') \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \check{\eta}"] & \mathcal{E}F(X' \otimes Y') \otimes \eta(X'_1 \otimes Y')
\end{tikzcd}$$

dont la région à gauche est manifestement commutative, ce qui implique la commutativité de la région à droite et par suite celle du diagramme

$$\begin{tikzcd}
\eta X' \otimes \eta Y' \arrow[r, "\check{\eta}"] \arrow[d, "\eta u' \otimes \mathrm{id}"'] & \eta(X' \otimes Y') \arrow[d, "\eta(u' \otimes \mathrm{id})"] \\
\eta X'_1 \otimes \eta Y' \arrow[r, "\check{\eta}"] & \eta(X'_1 \otimes Y')
\end{tikzcd}$$

puisque $\mathcal{E}F(X' \otimes Y')$ est régulier. D'où la fonctorialité de $\check{\eta}$ en X'. Nous avons ainsi le $\otimes$-foncteur $(\eta, \check{\eta})\colon \underline{C}' \to \underline{Q}$.

Prouvons la compatibilité du $\otimes$-foncteur $(\eta, \check{\eta})\colon \underline{C}' \to \underline{Q}$ avec les contraintes de commutativité. Pour cela, considérons le diagramme ci-dessous dans lequel la commutativité des régions (I),(V) résulte de la définition de $\check{\eta}$ (Diagramme (4.48)); celle de (II) de la fonctorialité de c et de la relation $c_{\underline{1}_Q, \underline{1}_Q} = \mathrm{id}$; celle de (III),

(VII) découle de la Proposition 2.17; celle de (IV) vient de la compatibilité du $\otimes$-foncteur $(\mathcal{E}F, \check{\mathcal{E}F})$ avec les contraintes de commutativité; celle de (V),(VI), (VIII) est évidente; enfin celle du circuit extérieur est la définition de $\eta c'$ (Diagramme (4.47)).

$$
\begin{tikzcd}
\underline{1}_Q \arrow[d, "d"'] \arrow[from=1-1, to=2-5, phantom, "(\mathrm{I})"] \\
\underline{1}_Q \otimes \underline{1}_Q \arrow[d, equal] & (\mathcal{E}FX' \otimes \eta X') \otimes (\mathcal{E}FY' \otimes \eta Y') \arrow[l, "\mu_{X'} \otimes \mu_{Y'}"'] \arrow[r, dashed] \arrow[d, "c"'] \arrow[dl, phantom, "(\mathrm{II})"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & (\mathcal{E}FX' \otimes \mathcal{E}FY') \otimes (\eta X' \otimes \eta Y') \arrow[r, "\check{\mathcal{E}F} \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "c \otimes \mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IV})"] & \mathcal{E}F(X' \otimes Y') \otimes (\eta X' \otimes \eta Y') \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \check{\eta}"] \arrow[d, "\mathcal{E}Fc' \otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{V})"] & \mathcal{E}F(X' \otimes Y') \otimes \eta(X' \otimes Y') \arrow[d, "\mathcal{E}Fc' \otimes \mathrm{id}"] \arrow[ullll, "\mu_{X' \otimes Y'}"'] \\
\underline{1}_Q \otimes \underline{1}_Q \arrow[d, equal] & (\mathcal{E}FY' \otimes \eta Y') \otimes (\mathcal{E}FX' \otimes \eta X') \arrow[l, "\mu_{Y'} \otimes \mu_{X'}"'] \arrow[r, dashed] \arrow[d, equal] \arrow[dl, phantom, "(\mathrm{VI})"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VII})"] & (\mathcal{E}FY' \otimes \mathcal{E}FX') \otimes (\eta X' \otimes \eta Y') \arrow[r, "\check{\mathcal{E}F} \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes c"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{VIII})"] & \mathcal{E}F(Y' \otimes X') \otimes (\eta X' \otimes \eta Y') \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \check{\eta}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes c"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{IX})"] & \mathcal{E}F(Y' \otimes X') \otimes \eta(X' \otimes Y') \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \eta c"] \\
\underline{1}_Q \otimes \underline{1}_Q & (\mathcal{E}FY' \otimes \eta Y') \otimes (\mathcal{E}FX' \otimes \eta X') \arrow[l, "\mu_{Y'} \otimes \mu_{X'}"'] \arrow[r, dashed] & (\mathcal{E}FY' \otimes \mathcal{E}FX') \otimes (\eta Y' \otimes \eta X') \arrow[r, "\check{\mathcal{E}F} \otimes \mathrm{id}"] & \mathcal{E}F(Y' \otimes X') \otimes (\eta Y' \otimes \eta X') \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \check{\eta}"] & \mathcal{E}F(Y' \otimes X') \otimes \eta(Y' \otimes X') \arrow[dllll, "\mu_{X' \otimes Y'}"] \\
\underline{1}_Q \arrow[u, "d"] \arrow[from=5-1, to=4-5, phantom, "(\mathrm{X})"]
\end{tikzcd}
$$

On en déduit la commutativité de la région (IX) qui, à facteur régulier près, exprime la compatibilité de $(\eta, \check{\eta})$ avec les contraintes de commutativité. Prouvons la compatibilité de $(\eta, \check{\eta})$ avec les contraintes d'associativité. Pour cela, considérons le diagramme

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{E}F(X'\otimes(Y'\otimes Z'))\otimes\eta(X'\otimes(Y'\otimes Z')) \arrow[d, "\mu_{X'\otimes(Y'\otimes Z')}"'] & & \\
\underline{1}_{Q} \arrow[d, "d"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & (\mathcal{E}FX'\otimes\mathcal{E}F(Y'\otimes Z'))\otimes(\eta X'\otimes\eta(Y'\otimes Z')) \arrow[ul, "\check{\mathcal{E}F}\otimes\check{\eta}"'] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & (\mathcal{E}FX'\otimes(\mathcal{E}FY'\otimes\mathcal{E}FZ'))\otimes(\eta X'\otimes(\eta Y'\otimes\eta Z')) \arrow[l, "(\mathrm{id}\otimes\check{\mathcal{E}F})\otimes(\mathrm{id}\otimes\check{\eta})"'] \arrow[d, dashed] \\
\underline{1}_{Q}\otimes\underline{1}_{Q} \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes d"'] & (\mathcal{E}FX'\otimes\eta X')\otimes(\mathcal{E}F(Y'\otimes Z')\otimes\eta(Y'\otimes Z')) \arrow[l, "\mu_{X'}\otimes\mu_{Y'\otimes Z'}"'] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{III})"] & (\mathcal{E}FX'\otimes\eta X')\otimes((\mathcal{E}FY'\otimes\mathcal{E}FZ')\otimes(\eta Y'\otimes\eta Z')) \arrow[l, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes(\check{\mathcal{E}F}\otimes\check{\eta})"'] \arrow[d, dashed] \\
\underline{1}_{Q}\otimes(\underline{1}_{Q}\otimes\underline{1}_{Q}) & & (\mathcal{E}FX'\otimes\eta X')\otimes((\mathcal{E}FY'\otimes\eta Y')\otimes(\mathcal{E}FZ'\otimes\eta Z')) \arrow[ll, "\mu_{X'}\otimes(\mu_{Y'}\otimes\mu_{Z'})"']
\end{tikzcd}
\tag{4.49}
$$

dans lequel la commutativité des régions (I),(III) résulte de la définition de $\check{\eta}$ (Diagramme (4.48)) et celle de la région (II) est donnée par la fonctorialité des contraintes a, c. On en déduit la commutativité du circuit extérieur. De la même manière, on démontre la commutativité du diagramme

(4.50)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}F((X'\otimes Y')\otimes Z')\otimes\eta((X'\otimes Y')\otimes Z') \arrow[d, "\mu_{(X'\otimes Y')\otimes Z'}"'] & (\mathcal{E}F(X'\otimes Y')\otimes\mathcal{E}Z')\otimes(\eta(X'\otimes Y')\otimes\eta Z') \arrow[l, "\check{\mathcal{E}}F\otimes\check{\eta}"'] \\
\underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[d, "d"'] & \\
\underline{1}_{\underline{Q}}\otimes\underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[d, "d\otimes\mathrm{id}"'] & \\
(\underline{1}_{\underline{Q}}\otimes\underline{1}_{\underline{Q}})\otimes\underline{1}_{\underline{Q}} & \\
((\mathcal{E}FX'\otimes\eta X')\otimes(\mathcal{E}FY'))\otimes(\mathcal{E}FZ'\otimes\eta Z') \arrow[u, "(\mu_{X'}\otimes\mu_{Y'})\otimes\mu_{Z'}"] & ((\mathcal{E}FX'\otimes\mathcal{E}FY')\otimes\mathcal{E}Z')\otimes((\eta(X'\otimes\eta Y')\otimes\eta Z') \arrow[l, dashed] \arrow[uuuu, "(\check{\mathcal{E}}F\otimes\mathrm{id})\otimes(\check{\eta}\otimes\mathrm{id})"']
\end{tikzcd}$$

Cela étant, considérons le diagramme

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\underline{1}_Q \otimes (\underline{1}_Q \otimes \underline{1}_Q) & \underline{1}_Q \otimes \underline{1}_Q \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes d"'] \arrow[r, "d\otimes \mathrm{id}"] & (\underline{1}_Q \otimes \underline{1}_Q) \otimes \underline{1}_Q & ((\mathcal{E}FX' \otimes \eta X') \otimes (\mathcal{E}FY' \otimes \eta Y')) \otimes (\mathcal{E}FZ' \otimes \eta Z') \arrow[l, "(\mu_{X'}\otimes\mu_{Y'})\otimes\mu_{Z'}"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & \arrow[l, dashed] \\
\arrow[r, phantom, "(\mathrm{VII})"] & \underline{1}_Q \arrow[u, "d"] \arrow[rr, phantom, "(\mathrm{II})"] & & \mathcal{E}F((X' \otimes Y') \otimes Z') \otimes \eta((X' \otimes Y') \otimes Z') \arrow[lll, "\mu_{(X'\otimes Y')\otimes Z'}"'] & \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\check{\eta}"'] \\
& \mathcal{E}F(X' \otimes (Y' \otimes Z')) \otimes \eta(X' \otimes (Y' \otimes Z')) \arrow[u, "\mu_{X'\otimes(Y'\otimes Z')}"] \arrow[rr, "\mathcal{E}Fa'\otimes\mathrm{id}"] & & \mathcal{E}F((X' \otimes Y') \otimes Z') \otimes \eta(X' \otimes (Y' \otimes Z')) \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\eta a'"'] & \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\check{\eta}"'] \\
& (\mathcal{E}FX' \otimes \mathcal{E}F(Y' \otimes Z')) \otimes (\eta X' \otimes \eta(Y' \otimes Z')) \arrow[u, "\check{\mathcal{E}F}\otimes\check{\eta}"] \arrow[rr, phantom, "(\mathrm{IV})"] & & (\mathcal{E}F(X' \otimes Y') \otimes \mathcal{E}FZ') \otimes (\eta X' \otimes \eta(Y' \otimes Z')) \arrow[u, "\check{\mathcal{E}F}\otimes\check{\eta}"'] & \\
& (\mathcal{E}FX' \otimes (\mathcal{E}FY' \otimes \mathcal{E}FZ')) \otimes (\eta X' \otimes (\eta Y' \otimes \eta Z')) \arrow[u, "(\mathrm{id}\otimes\check{\mathcal{E}F})\otimes(\mathrm{id}\otimes\check{\eta})"] \arrow[rr, "a\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, dashed] & & ((\mathcal{E}FX' \otimes \mathcal{E}FY') \otimes \mathcal{E}FZ') \otimes (\eta X' \otimes (\eta Y' \otimes \eta Z')) \arrow[u, "(\check{\mathcal{E}F}\otimes\mathrm{id})\otimes(\mathrm{id}\otimes\check{\eta})"'] & \arrow[l, equal] \\
& \mathcal{E}FX' \otimes \eta X') \otimes ((\mathcal{E}FY' \otimes \eta Y') \otimes (\mathcal{E}FZ' \otimes \eta Z')) \arrow[uuuuul, "\mu_{X'}\otimes(\mu_{Y'}\otimes\mu_{Z'})"] \arrow[rrr, dashed, dash] & & &
\end{tikzcd}
$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, dash, dashed] & ((\mathcal{E}FX' \otimes \mathcal{E}FY') \otimes \mathcal{E}FZ') \otimes ((\eta X' \otimes \eta Y') \otimes \eta Z') \arrow[r, "(\check{\mathcal{E}F} \otimes \mathrm{id}) \otimes \mathrm{id}"] & (\mathcal{E}F(X' \otimes Y') \otimes \mathcal{E}FZ') \otimes ((\eta X' \otimes \eta Y') \otimes \eta Z') \arrow[d, "\check{\mathcal{E}F} \otimes \mathrm{id}"] \\
{} \arrow[r, dash] & \mathcal{E}F((X' \otimes Y') \otimes Z') \otimes (\eta(X' \otimes \eta Y') \otimes \eta Z') \arrow[d, phantom, "(\mathrm{III})"] & \mathcal{E}F((X' \otimes Y') \otimes Z') \otimes ((\eta X' \otimes \eta Y') \otimes \eta Z') \arrow[l, "\mathrm{id} \otimes (\check{\eta} \otimes \mathrm{id})"'] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes a^{-1}"] \\
{} \arrow[r, dash] & \mathcal{E}F((X' \otimes Y') \otimes Z') \otimes (\eta X' \otimes \eta(Y' \otimes Z')) \arrow[d, phantom, "(\mathrm{V})"] & \mathcal{E}F((X' \otimes Y') \otimes Z') \otimes (\eta X' \otimes (\eta Y' \otimes \eta Z')) \arrow[l, "\mathrm{id} \otimes (\mathrm{id} \otimes \check{\eta})"'] \arrow[d, "\check{\mathcal{E}F}^{-1} \otimes \mathrm{id}"] \\
 & & (\mathcal{E}F(X' \otimes Y') \otimes \mathcal{E}FZ') \otimes (\eta X' \otimes (\eta Y' \otimes \eta Z')) \arrow[d, "(\check{\mathcal{E}F}^{-1} \otimes \mathrm{id}) \otimes \mathrm{id}"] \\
{} & & ((\mathcal{E}FX' \otimes \mathcal{E}FY') \otimes \mathcal{E}FZ') \otimes (\eta X' \otimes (\eta Y' \otimes \eta Z')) \arrow[ll, equal] \arrow[d, dash, dashed] \arrow[l, phantom, "(\mathrm{VI})", shift right=4ex] \\
{} & & {} \arrow[ll, dashed]
\end{tikzcd}$$

dans lequel la commutativité des régions (I), (VII) résulte de celle des diagrammes (4.49), (4.50) respectivement; celle de (II) de la définition de $\eta a'$ (Diagramme (4.47)); celle de (IV) de la compatibilité de $(\mathcal{E}F, \check{\mathcal{E}F})$ avec les contraintes d'associativité; celle de (V) s'obtient en composant les flèches; celle de (VI) est le résultat de la Proposition 2.17; enfin celle du circuit extérieur vient de la fonctorialité de la contrainte d'associativité de $\underline{Q}$, de la compatibilité entre les contraintes d'associativité a et d'unité $(\underline{1}_{\underline{Q}}, g, d)$ de $\underline{Q}$, et de la Proposition 2.17. On en déduit la commutativité de la région (III) qui, à facteur régulier près, exprime la compatibilité de $(\eta, \check{\eta})$ avec les contraintes d'associativité. Enfin, prouvons la compatibilité de $(\eta, \check{\eta})$ avec les unités. Pour cela, il suffit de remarquer que, les $\otimes$-foncteurs $(F, \check{F})$, $(\mathcal{E}, \check{\mathcal{E}})$ étant compatibles avec les unités, on a par conséquent $\mathcal{E}F\underline{1}' = \underline{1}_{\underline{Q}}$, ce qui implique $\eta\underline{1}' = \underline{1}_{\underline{Q}}$. La compatibilité de $(\eta, \check{\eta})$ avec les unités s'obtient aussitôt en appliquant la Proposition 2.160

Enfin l'isomorphisme $\mu_{X'}$ est bien fonctoriel en X' en vertu de la définition de $\eta u'$ (Diagramme (4.47)), ce qui achève la démonstration. $\square$

Remark 4.51. En vertu du Corollaire 2.155, les $\otimes$-isomorphismes d'un $\otimes$-foncteur unifère dans un $\otimes$-foncteur unifère sont les $\otimes$-isomorphismes unifères; par conséquent quand nous avons un $\otimes$-isomorphisme unifère d'un $\otimes$-foncteur unifère dans un $\otimes$-foncteur unifère, nous disons que c'est un $\otimes$-isomorphisme.

Les hypothèses étant toujours celles du Lemme 4.45, nous définissons en plus un $\otimes$-foncteur $(T, \check{T})\colon \underline{C}' \to \underline{C} \times \underline{C}'$ de la manière suivante

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "u'"'] & TX' = (FX', X') \arrow[d, "Tu' = (Fu', u')"] \\ Y' \arrow[r, mapsto] & TY' = (FY', Y') \end{tikzcd}$$

$$\check{T}_{X',Y'}\colon (FX' \otimes FY', X' \otimes Y') \xrightarrow{\check{F} \otimes \mathrm{id}} (F(X' \otimes Y'), X' \otimes Y').$$

Il est clair que $(T, \check{T})$ est un $\otimes$-foncteur ACU. Cela étant, nous avons

Lemma 4.52. *μ est un $\otimes$-isomorphisme du foncteur*

$$(\mathcal{E} \otimes \eta, (\mathcal{E} \check{\otimes} \eta)) \circ (T, \check{T})\colon \underline{C}' \to \underline{Q}$$

dans le foncteur

$$(I_{\underline{Q}}, \check{I_{\underline{Q}}})\colon \underline{C}' \to \underline{Q}$$

$(I_{\underline{Q}}, \check{I_{\underline{Q}}})$ étant le $\otimes$-foncteur $\underline{1}_{\underline{Q}}$ constant (Définition 4.7).

Proof. Prouvons que μ est un $\otimes$-morphisme. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{E}\otimes\eta)TX'\otimes(\mathcal{E}\otimes\eta)TY' \arrow[r, equal] \arrow[ddd, "((\mathcal{E}\check{\otimes}\eta)T)"'] & (\mathcal{E}FX'\otimes\eta X')\otimes(\mathcal{E}FY'\otimes\eta Y') \arrow[r, "\mu_{X'}\otimes\mu_{Y'}"] \arrow[d, dashed] & \underline{1}_{\underline{Q}}\otimes\underline{1}_{\underline{Q}} \\
 & (\mathcal{E}FX'\otimes\mathcal{E}FY')\otimes(\eta X'\otimes\eta Y') \arrow[d, "\check{\mathcal{E}}\otimes\check{\eta}"] & \\
(\mathrm{I}) & \mathcal{E}(FX'\otimes FY')\otimes\eta(X'\otimes Y') \arrow[d, "\mathcal{E}\check{F}\otimes\mathrm{id}"] & (\mathrm{II}) \\
(\mathcal{E}\otimes\eta)T(X'\otimes Y') \arrow[r, equal] & \mathcal{E}F(X'\otimes Y')\otimes\eta(X'\otimes Y') \arrow[r, "\mu_{X'\otimes Y'}"] & \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[uuu, "d"']
\end{tikzcd}$$

dans lequel la commutativité de la région (I) résulte de la définition de $(\mathcal{E}\check{\otimes}\eta)$ (Lemme 4.44), et celle de (II) de la définition de $\check{\eta}$ (Diagramme (4.48)). D'où la commutativité du circuit extérieur, qui montre que μ est un $\otimes$-morphisme. $\square$

Lemma 4.53. *Les hypothèses étant celles du Lemme* 4.45*, on suppose en plus qu'on ait un $\otimes$-foncteur $(\mathcal{E}_1,\check{\mathcal{E}}_1)\colon \underline{C}\to\underline{Q}$ ayant les mêmes propriétés que $(\mathcal{E},\check{\mathcal{E}})$. Soit $(\eta_1,\check{\eta}_1)$ le $\otimes$-foncteur qui correspond à $(\mathcal{E}_1,\check{\mathcal{E}}_1)$, défini de la même manière que $(\eta,\check{\eta})$. Si $\rho\colon(\mathcal{E},\check{\mathcal{E}})\to(\mathcal{E}_1,\check{\mathcal{E}}_1)$ est un $\otimes$-isomorphisme, alors il existe un $\otimes$-isomorphisme unique $\rho'\colon(\eta,\check{\eta})\to(\eta_1,\check{\eta}_1)$ tel que soit commutatif le diagramme*

(4.54)
$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{E}\otimes\eta,(\mathcal{E}\check{\otimes}\eta))\circ(T,\check{T}) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "(\rho\otimes\rho')T"'] & (I_{\underline{Q}},\check{I}_{\underline{Q}}) \arrow[d, equal] \\
(\mathcal{E}\otimes\eta,(\mathcal{E}\check{\otimes}\eta))\circ(T,\check{T}) \arrow[r, "\mu_1"] & (I_{\underline{Q}},\check{I}_{\underline{Q}}).
\end{tikzcd}$$

Proof. Supposons qu'il existe un $\otimes$-isomorphisme $\rho'\colon(\eta,\check{\eta})\to(\eta_1,\check{\eta}_1)$ tel que le diagramme (4.54) soit commutatif, i.e., pour tout $X'\in\operatorname{Ob}\underline{C}'$, on a la commutativité du diagramme suivant

(4.55)
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}FX'\otimes\eta X' \arrow[r, "\mu_{X'}"] \arrow[dr, "\rho_{FX'}\otimes\mathrm{id}"'] & \underline{1}_{\underline{Q}} & \mathcal{E}_1FX'\otimes\eta_1X' \arrow[l, "(\mu_1)_{X'}"'] \\
 & \mathcal{E}_1FX'\otimes\eta X' \arrow[ur, "\mathrm{id}\otimes\rho'_{X'}"'] &
\end{tikzcd}$$

D'où l'unicité de ρ' puisque $\mathcal{E}_1FX'$ est régulier.

Soit $\rho'_{X'}\colon\eta X'\to\eta_1X'$ défini par le diagramme commutatif (4.55) pour tout $X'\in\operatorname{Ob}\underline{C}'$. Il est manifeste qui $\rho'_{X'}$ est un isomorphisme puisque toutes les flèches figurant dans (4.55) sont des isomorphismes et $\mathcal{E}_1 FX'$ est régulier. Prouvons que $\rho'_{X'}$ est fonctoriel en X'. Soit $u'\colon X' \to Y'$ une fléche de $\underline{C}'$ et considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}FX' \otimes \eta X' \arrow[r, "\rho_{FX'}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathcal{E}Fu'\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(I)}"] & \mathcal{E}_1 FX' \otimes \eta X' \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\rho'_{X'}"] \arrow[d, "\mathcal{E}_1Fu'\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(II)}"] & \mathcal{E}_1 FX' \otimes \eta_1 X' \arrow[d, "\mathcal{E}_1Fu'\otimes\mathrm{id}"] \\
\mathcal{E}FY' \otimes \eta X' \arrow[r, "\rho_{FY'}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\eta u'"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(III)}"] & \mathcal{E}_1 FY' \otimes \eta X' \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\rho'_{X'}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\eta u'"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(IV)}"] & \mathcal{E}_1 FY' \otimes \eta_1 X' \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\eta_1 u'"] \\
\mathcal{E}FY' \otimes \eta Y' \arrow[r, "\rho_{FY'}\otimes\mathrm{id}"] & \mathcal{E}_1 FY' \otimes \eta Y' \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\rho'_{Y'}"] & \mathcal{E}_1 FY' \otimes \eta_1 Y'
\end{tikzcd}$$

dans lequel la région (I) est commutative puisque ρF est fonctoriel en X', tandis que les régions (II), (III) sont commutatives par évidence. D'où la commutativité de la région (IV) est équivalente à celle du circuit extérieur. Or la commutativité de celui-ci résulte du fait que $\rho_{FX'} \otimes \rho'_{X'}$, étant le composé (voir Diagramme (4.55)) de deux flèches $\mu_{X'}, (\mu_1)_{X'}$ qui sont fonctorielles en X' (Lemme 4.45), est fonctoriel en X'. On en déduit la commutativité de (IV), et par suite, la fonctorialité de ρ' puisque $\mathcal{E}_1 FY'$ est régulier. Pour montrer que ρ' est un $\otimes$-morphisme, nous considérons le diagramme

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{E}F(X' \otimes Y') \otimes \eta(X' \otimes Y') \arrow[r, "\rho_{F(X'\otimes Y')}\otimes \mathrm{id}"] & \mathcal{E}_1F(X' \otimes Y') \otimes \eta(X' \otimes Y') \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes \rho'_{X'\otimes Y'}"] & \mathcal{E}_1F(X' \otimes Y') \otimes \eta_1(X' \otimes Y') \\
\mathcal{E}F(X' \otimes Y') \otimes (\eta X' \otimes \eta Y') \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\check{\eta}"'] \arrow[r, "\rho_{F(X'\otimes Y')}\otimes \mathrm{id}"] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{I})"] & \mathcal{E}_1F(X' \otimes Y') \otimes (\eta X' \otimes \eta Y') \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\check{\eta}"'] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes(\rho'_{X'}\otimes\rho'_{Y'})"] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{II})"] & \mathcal{E}_1F(X' \otimes Y') \otimes (\eta_1 X' \otimes \eta_1 Y') \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\check{\eta}_1"'] \\
(\mathcal{E}FX' \otimes \mathcal{E}FY') \otimes (\eta X' \otimes \eta Y') \arrow[u, "\mathcal{E}\check{F}\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[r, "(\rho_{FX'}\otimes\rho_{FY'})\otimes\mathrm{id}"] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{III})"] & (\mathcal{E}_1FX' \otimes \mathcal{E}_1FY') \otimes (\eta X' \otimes \eta Y') \arrow[u, "\check{\mathcal{E}_1F}\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes(\rho'_{X'}\otimes\rho'_{Y'})"] \arrow[ur, phantom, "(\mathrm{IV})"] & (\mathcal{E}_1FX' \otimes \mathcal{E}_1FY') \otimes (\eta_1 X' \otimes \eta_1 Y') \arrow[u, "\check{\mathcal{E}_1F}\otimes\mathrm{id}"'] \\
(\mathcal{E}FX' \otimes \eta X') \otimes (\mathcal{E}FY' \otimes \eta Y') \arrow[u, dashed] \arrow[rr, "(\rho_{FX'}\otimes\rho'_{X'})\otimes(\rho_{FY'}\otimes\rho'_{Y'})"] \arrow[uuu, bend left=60, "(\mathcal{E}\check{F}\otimes\eta)"] \arrow[urr, phantom, "(\mathrm{V})"] & & (\mathcal{E}_1FX' \otimes \eta_1 X') \otimes (\mathcal{E}_1FY' \otimes \eta_1 Y') \arrow[u, dashed] \arrow[uuu, bend right=60, "(\mathcal{E}_1\check{F}\otimes\eta_1)"']
\end{tikzcd}
$$

(VI) (VII)

dans lequel la commutativité des régions (I), (IV) est évidente; celle de (III) résulte du fait que ρF est un $\otimes$-morphisme; celle de (V) de la fonctorialité des contraintes d'associativité et de commutativité de $\underline{Q}$; celle de (VI), (VII) de la définition de $(\mathcal{E}F\check{\ }\otimes \eta)$ et $(\mathcal{E}_1 F\check{\ }\otimes \eta_1)$ (Lemme 4.44); enfin celle du circuit extérieur vient du fait que $\rho F \otimes \rho'$ étant le composé de deux $\otimes$-morphismes μ et μ_1, est un $\otimes$-morphisme (Diagramme (4.55)). D'où la commutativité de la région (II), qui prouve que ρ' est un $\otimes$-morphisme pusique $\mathcal{E}_1 F(X' \otimes Y')$ est régulier. Enfin on a bien le diagramme (4.54) commutatif pusique ρ' est défini par le diagramme commutatif (4.55). On a ainsi démontré l'existence du $\otimes$-isomorphisme ρ'.

Considérons toujours le $\otimes$-foncteur $(T, \check{T})\colon \underline{C}' \to \underline{C} \times \underline{C}'$, et soient $\mathcal{S}$ la partie multiplicative de $\underline{C} \times \underline{C}'$ engendrée par l'ensemble des endomorphismes de la forme $T(c'_{X',X'}) = (Fc'_{X',X'}, c'_{X',X'})$, $(\underline{C} \times \underline{C}')^{\mathcal{S}}$ la catégorie AC quotient de $\underline{C} \times \underline{C}'$ définie par $(\underline{C}', (T, \check{T}))$, $(D, \check{D})\colon \underline{C} \times \underline{C}' \to \underline{P}$ le $\otimes$-foncteur canonique, et $\lambda\colon (D, \check{D}) \circ (T, \check{T}) \xrightarrow{\sim} (I_{\underline{P}}, \check{I}_{\underline{P}})$ le $\otimes$-isomorphisme canonique (Définition 4.7). Donc nous avons ici, pour la catégorie $\underline{P}$,

$$\operatorname{Ob} \underline{P} = \{(X, X')\colon X \in \operatorname{Ob} \underline{C},\, X' \in \operatorname{Ob} \underline{C}'\}$$

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{P}}((X, X'), (Y, Y')) \;=\; &\{[A', B', (u, u')]\colon A', B' \in \operatorname{Ob} \underline{C}',\\ &(u, u')\colon (X \otimes FA', X' \otimes A') \to (Y \otimes FB', Y' \otimes B')\}\end{aligned}$$

où $[A'_1, B'_1, (u_1, u'_1)] = [A'_2, B'_2, (u_2, u'_2)]$ si et seulement s'il existe des objets C'_1, C'_2 et des isomorphismes dans $\underline{C}'$

$$\begin{aligned} u'&\colon A'_1 \otimes C'_1 \to A'_2 \otimes C'_2\\ v'&\colon B'_1 \otimes C'_1 \to B'_2 \otimes C'_2\end{aligned}$$

tels que soit commutatif dans $(\underline{C} \times \underline{C}')^{\mathcal{S}}$ le diagramme

$$
\begin{tikzcd}
(X \otimes F(A'_1 \otimes C'_1), X' \otimes (A'_1 \otimes C'_1)) \arrow[d, "(\mathrm{id} \otimes Fu', \mathrm{id} \otimes u')", "\wr"'] & (X \otimes (FA'_1 \otimes FC'_1), X' \otimes (A'_1 \otimes C'_1)) \arrow[l, "(\mathrm{id} \otimes \check{F}, \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})"', "\sim"] \arrow[r, "(a, a')", "\sim"'] & ((X \otimes FA'_1) \otimes FC'_1, (X' \otimes A'_1) \otimes C'_1) \arrow[d, "(u_1 \otimes \mathrm{id}, u'_1 \otimes \mathrm{id})"] \\
(X \otimes F(A'_2 \otimes C'_2), X' \otimes (A'_2 \otimes C'_2)) & & ((Y \otimes FB'_1) \otimes FC'_1, (Y' \otimes B'_1) \otimes C'_1) \\
(X \otimes (FA'_2 \otimes FC'_2), X' \otimes (A'_2 \otimes C'_2)) \arrow[u, "(\mathrm{id} \otimes \check{F}, \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})"', "\wr"] \arrow[d, "(a, a')", "\wr"'] & & (Y \otimes (FB'_1 \otimes FC'_1), Y' \otimes (B'_1 \otimes C'_1)) \arrow[u, "(a, a')"', "\wr"] \arrow[d, "(\mathrm{id} \otimes \check{F}, \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})", "\wr"'] \\
((X \otimes FA'_2) \otimes FC'_2, (X' \otimes A'_2) \otimes C'_2) \arrow[d, "(u_2 \otimes \mathrm{id}, u'_2 \otimes \mathrm{id})"] & & (Y \otimes F(B'_1 \otimes C'_1), Y' \otimes (B'_1 \otimes C'_1)) \arrow[d, "(\mathrm{id} \otimes Fv', \mathrm{id} \otimes v')", "\wr"'] \\
((Y \otimes FB'_2) \otimes FC'_2, (Y' \otimes B'_2) \otimes C'_2) & (Y \otimes (FB'_2 \otimes FC'_2), Y' \otimes (B'_2 \otimes C'_2)) \arrow[l, "(a, a')"', "\sim"] \arrow[r, "(\mathrm{id} \otimes \check{F}, \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})", "\sim"'] & (Y \otimes F(B'_2 \otimes C'_2), Y' \otimes (B'_2 \otimes C'_2))
\end{tikzcd}
$$

le $\otimes$-foncteur $(D,\check{D})$ canonique est défini par

$$\begin{tikzcd}
(X,X') \arrow[r, mapsto] \arrow[d] & D(X,X')=(X,X') \arrow[d, "{D(u,u')=[A',A',(u\otimes \mathrm{id}_{FA'},u\otimes \mathrm{id}_{FA'})]}"] \\
(Y,Y') \arrow[r, mapsto] & D(Y,Y')=(Y,Y')
\end{tikzcd}$$

$$\check{D}_{(X,X'),(Y,Y')} = \mathrm{id}_{(X,X')\otimes(Y,Y')},$$

A' étant un objet quelconque de $\underline{C}'$, et le $\otimes$-isomorphisme canonique λ par

$$\lambda_{X'} = [\underline{1}', X', (c_{FX',F\underline{1}'}, c'_{X',\underline{1}'})]\colon (FX',X') \xrightarrow{\sim} 1_{\underline{P}} = (F\underline{1}', \underline{1}').$$

Comme ici les $\otimes$-catégories $\underline{C}\times\underline{C}'$, $\underline{P}$ sont munies des contraintes d'unités, prouvons que $(D,\check{D})$ est encore unifère. Pour cela il suffit de remarquer que

$$D(\underline{1},\underline{1}') = (\underline{1},\underline{1}') \xrightarrow{[A',A',(\widehat{F}\otimes \mathrm{id},\mathrm{id})]} (F\underline{1}',\underline{1}') = 1_{\underline{P}}$$

et d'appliquer la Proposition 2.160.

□

Enfin notons par $(\mathcal{D},\check{\mathcal{D}})$ les composeé des $\otimes$-foncteurs

$$\underline{C} \xrightarrow{(i,\check{i})} \underline{C}\times\underline{C}' \xrightarrow{(D,\check{D})} \underline{P}$$

et par $(\xi,\check{\xi})$ le composé des $\otimes$-foncteurs

$$\underline{C}' \xrightarrow{(i',\check{i}')} \underline{C}\times\underline{C}' \xrightarrow{(D,\check{D})} \underline{P}.$$

$(\mathcal{D},\check{\mathcal{D}})$ et $(\xi,\check{\xi})$ sont manifestement des $\otimes$-foncteurs ACU comme étant des composés des $\otimes$-foncteurs ACU (Propositions 2.142, 2.146 et 2.151). Cela étant, nous avons la proposition

Proposition 4.56. *La $\otimes$-catégorie* ACU $\underline{P}$ *et le $\otimes$-foncteur* ACU $(\mathcal{D},\check{\mathcal{D}})$ *possèdent les propriétés suivants:*

(1) *$\mathcal{D}FX'$ est inversible dans $\underline{P}$ pour tout $X'\in \mathrm{Ob}\,\underline{C}'$.*
(2) *Pour tout $\otimes$-foncteur* ACU $(\mathcal{E},\check{\mathcal{E}})$ *de $\underline{C}$ dans une $\otimes$-catégorie* ACU $\underline{Q}$ *tel que $\mathcal{E}FX'$ soit inversible dans $\underline{Q}$ pour tout $X'\in \mathrm{Ob}\,\underline{C}'$, il existe un $\otimes$-foncteur* ACU $(E',\check{E}')$ *de $\underline{P}$ dans $\underline{Q}$, et un $\otimes$-isomorphisme $\tau\colon(\mathcal{E},\check{\mathcal{E}}) \xrightarrow{\sim} (E',\check{E}')\circ(\mathcal{D},\check{\mathcal{D}})$; le couple $((E',\check{E}'),\tau)$ est unique (à isomorphisme près), i.e., s'il existe un autre $\otimes$-foncteur* ACU $(E'_1,\check{E}'_1)$ *de $\underline{P}$ dans $\underline{Q}$ et un autre $\otimes$-isomorphisme $\tau_1\colon(\mathcal{E},\check{\mathcal{E}}) \xrightarrow{\sim} (E'_1,\check{E}'_1)\circ(\mathcal{D},\check{\mathcal{D}})$, alors $(E',\check{E}')$ est isomorphe*

à $(E'_1, \check{E}'_1)$ par un $\otimes$-isomorphisme τ' tel que soit commutatif le diagramme suivant

(4.57)
$$\begin{tikzcd} (\mathcal{E}, \check{\mathcal{E}}) \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, equal] & (E', \check{E}') \circ (\mathcal{D}, \check{\mathcal{D}}) \arrow[d, "\tau'\mathcal{D}"] \\ (\mathcal{E}, \check{\mathcal{E}}) \arrow[r, "\tau_1"] & (E'_1, \check{E}'_1) \circ (\mathcal{D}, \check{\mathcal{D}}) \end{tikzcd}$$

Proof.

(1) En vertu de la définition des foncteurs $\mathcal{D}$, ξ, nous pouvons définir l'isomorphisme $\nu_{X'}\colon \mathcal{D}FX' \otimes \xi X' \xrightarrow{\sim} \underline{1}_{\underline{P}}$, $X' \in \operatorname{Ob}\underline{C}'$, par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}FX' \otimes \xi X' \arrow[rr, "\nu_{X'}"] \arrow[d, equal] & & \underline{1}_{\underline{P}} \\ (FX', \underline{1}') \otimes (\underline{1}, X') = (FX' \otimes \underline{1}, \underline{1}' \otimes X') & & (FX', X') \arrow[ll, "D(d_{FX'}, g'_{X'})"'] \arrow[u, "\lambda_{X'}"'] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{D}FX'$ est donc inversible. Remarquons que ν n'est autre que le composé des $\otimes$-isomorphismes:

$$(\mathcal{D} \otimes \xi, \mathcal{D} \check{\otimes} \xi) \circ (T, \check{T}) \xrightarrow{\alpha_{(D,\check{D})}T} (D, \check{D}) \circ (T, \check{T}) \xrightarrow{\lambda} (I_{\underline{P}}, \check{I}_{\underline{P}}),$$

$\alpha_{(D,\check{D})}$ étant défini dans le Lemme 4.44, d'où ν est un $\otimes$-isomorphisme.

(2) Soit $(\mathcal{E}, \check{\mathcal{E}})$ un $\otimes$-foncteur ACU de $\underline{C}$ dans une $\otimes$-catégorie ACU $\underline{Q}$ tel que $\mathcal{E}FX'$ soit inversible dans $\underline{Q}$ pour tout $X' \in \operatorname{Ob}\underline{C}'$. En vertu des Lemmes 4.45 et 4.52, il existe un $\otimes$-foncteur ACU $(\eta, \check{\eta})\colon \underline{C}' \to \underline{C}$ et un $\otimes$-isomorphisme $\mu\colon (\mathcal{E} \circ \eta, \mathcal{E} \check{\circ} \eta) \circ (T, \check{T}) \xrightarrow{\sim} (I_{\underline{Q}}, \check{I}_{\underline{Q}})$. L'application de la Proposition 4.34 nous donne un $\otimes$-foncteur ACU unique $(E', \check{E}')\colon \underline{P} \to \underline{Q}$ tel que

$$(\mathcal{E} \circ \eta, \mathcal{E} \check{\circ} \eta) = (E', \check{E}') \circ (D, \check{D})$$

$(E', \check{E}')$ étant défini par

$$E'(X, X') = \mathcal{E}X \otimes \eta X',\ \check{E}' = \mathcal{E} \check{\circ} \eta.$$

Pour tout $X \in \operatorname{Ob}\underline{C}$, définissons l'isomorphisme $\tau_X\colon \mathcal{E}X \xrightarrow{\sim} E'\mathcal{D}X$ par le diagramme commutatif

(4.58)
$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}X \otimes \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \widehat{\eta}"] & \mathcal{E}X \otimes \eta\underline{1}' \arrow[d, equal] \\ \mathcal{E}X \arrow[u, "d_{\mathcal{E}X}"] \arrow[r, "\tau_X"] & E'\mathcal{D}X \end{tikzcd}$$

$\widehat{\eta}\colon \underline{1}_{\underline{Q}} \to \eta\underline{1}'$ étant l'isomorphisme venant de la compatibilité de $(\eta, \check{\eta})$ avec les unités. On vérifie aussitôt que τ_X est fonctoriel en X. Prouvons que τ est un $\otimes$-morphisme. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}X \otimes \mathcal{E}Y \arrow[r, "d_{\mathcal{E}X} \otimes d_{\mathcal{E}Y}"] \arrow[dddd, "\check{\mathcal{E}}"'] & (\mathcal{E}X \otimes \underline{1}_{\underline{Q}}) \otimes (\mathcal{E}Y \otimes \underline{1}_{\underline{Q}}) \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes\widehat{\eta})\otimes(\mathrm{id}\otimes\widehat{\eta})"] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{II})"] & (\mathcal{E}X \otimes \eta\underline{1}') \otimes (\mathcal{E}Y \otimes \eta\underline{1}') \arrow[d] \arrow[dddd, bend left=60, "(\check{E'\mathcal{D}})"] \\
 & (\mathcal{E}X \otimes \mathcal{E}Y) \otimes (\underline{1}_{\underline{Q}} \otimes \underline{1}_{\underline{Q}}) \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes(\widehat{\eta}\otimes\widehat{\eta})"] \arrow[d, "\check{\mathcal{E}}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{III})"] & (\mathcal{E}X \otimes \mathcal{E}Y) \otimes (\eta\underline{1}' \otimes \eta\underline{1}') \arrow[d, "\check{\mathcal{E}}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, phantom, "(\mathrm{V})"] & {} \\
{} \arrow[r, phantom, "(\mathrm{I})"] & \mathcal{E}(X \otimes Y) \otimes (\underline{1}_{\underline{Q}} \otimes \underline{1}_{\underline{Q}}) \arrow[r, "\mathcal{E}(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes(\widehat{\eta}\otimes\widehat{\eta})"] \arrow[ddr, phantom, "(\mathrm{IV})"] & \mathcal{E}(X \otimes Y) \otimes (\eta\underline{1}' \otimes \eta\underline{1}') \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\widehat{\eta}"] \\
 & & \mathcal{E}(X \otimes Y) \otimes \eta(\underline{1}' \otimes \underline{1}') \\
\mathcal{E}(X \otimes Y) \arrow[r, "d_{\mathcal{E}(X\otimes Y)}"] & \mathcal{E}(X \otimes Y) \otimes \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\widehat{\eta}"] \arrow[uu, "\mathrm{id}\otimes d"] & \mathcal{E}(X \otimes Y) \otimes \eta\underline{1}' \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\eta d'"]
\end{tikzcd}$$

dans lequel la région (I) est commutative en vertu de la Proposition 2.170; (II) de la fonctorialité des contraintes d'associativité et de commutativité dans $\underline{Q}$; (III) de l'évidence; (IV) de la compatibilité de $(\eta, \check{\eta})$ avec les contraintes d'unité; (V) de la définition de $(E', \check{E}')$ et $(\mathcal{D}, \check{\mathcal{D}})$. D'oú la commutativité du circuit extérieur qui exprime que τ est un $\otimes$-morphisme, compte tenu de la définition de τ (Diagramme (4.58)).

Enfin soient $(E_1', \check{E}_1')$ et τ_1 tels que $\tau_1\colon (\mathcal{E}, \check{\mathcal{E}}) \xrightarrow{\sim} (E_1', \check{E}_1') \circ (\mathcal{D}, \check{\mathcal{D}})$. Pour tout $X' \in \operatorname{Ob} \underline{C}'$, définissons l'isomorphisme $\mu_{X'}\colon E'\mathcal{D}FX' \otimes E'\xi X' \xrightarrow{\sim} \underline{1}_{\underline{Q}}$ par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
E'\mathcal{D}FX' \otimes E'\xi X' \arrow[r, "\mu_{X'}"] \arrow[d, "\check{E}'"] & \underline{1}_{\underline{Q}} \arrow[d, "\widehat{E}'"] \\
E'(\mathcal{D}FX' \otimes \xi X') \arrow[r, "E'\nu_{X'}"] & E'(\underline{1}_{\underline{P}}).
\end{tikzcd}$$

Par sa définition, $\mu_{X'}$ est bien fonctoriel en X'. Montrons que

$$\mu\colon (E'\mathcal{D} \otimes E'\xi, (E'\mathcal{D} \check{\otimes} E'\xi)) \circ (T, \check{T}) \to (I_{\underline{Q}}, \check{I}_{\underline{Q}})$$

est un $\otimes$-morphisme. En vertu de la définition de μ, il nous suffit de prouver que

$$\check{E}'\colon (E'\mathcal{D} \otimes E'\xi, (E'\mathcal{D} \check{\otimes} E'\xi)) \circ (T, \check{T}) \to (E', \check{E}') \circ (\mathcal{D} \otimes \xi, \mathcal{D} \check{\otimes} \xi) \circ (T, \check{T})$$

est un $\otimes$-morphisme, puisque, ν étant un $\otimes$-morphisme, il en est de mème donc de $E'\nu$. Pour cela, considérons le diagramme ci-dessous dans lequel la commutativité de la région (I) résulte de la Proposition 2.172; celle de (II), (III) de la fonctorialité de $\check{E}'$; celle de (IV), (V),(VI),(VII) des définitions de $((E'\mathcal{D} \check{\otimes} E'\xi)T), (E'\mathcal{D} \check{\otimes} E'\xi), (E'(\mathcal{D} \check{\otimes} \xi)), (E'(\mathcal{D} \check{\otimes} \xi)T)$ resp. D'oú la commutativité du circuit extérieur qui exprime que $\check{E}'$ est un $\otimes$-morphisme. Il faut remarquer qu'ici il y a un abus de notation, ce n'est pas $\check{E}'$ qui est un $\otimes$-morphisme, mais c'est le morphisme fonctoriel

$$e_{X'} = \check{E}'_{\mathcal{D}FX', \xi X'} \colon E'\mathcal{D}FX' \otimes E'\xi X' \to E'(\mathcal{D}FX' \otimes \xi X').$$

$$
\begin{tikzcd}
(E'\mathcal{D}FX'\otimes E'\xi X')\otimes(E'\mathcal{D}FY'\otimes E'\xi Y') \arrow[r, "\check{E}'\otimes\check{E}'"] \arrow[d, dashed] \arrow[dddd, bend right=60, "E'\mathcal{D}\check{\otimes}E'\xi"'] \arrow[dddddd, bend right=80, "(E'\mathcal{D}\check{\otimes}E'\xi)T"'] & E'(\mathcal{D}FX'\otimes\xi X')\otimes E'(\mathcal{D}FY'\otimes\xi Y') \arrow[d, "\check{E}'"] \arrow[dddd, bend left=60, "(E'(\check{\mathcal{D}}\otimes\eta))"] \arrow[dddddd, bend left=80, "(E'(\mathcal{D}\check{\otimes}\eta)T)"] \\
(E'\mathcal{D}FX'\otimes E'\mathcal{D}FY')\otimes(E'\xi X'\otimes E'\xi Y') \arrow[d, "\check{E}'\otimes\check{E}'"'] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{(I)}"] & E'((\mathcal{D}FX'\otimes\xi X')\otimes(\mathcal{D}FY'\otimes\xi Y')) \arrow[d, dashed] \\
E'(\mathcal{D}FX'\otimes\mathcal{D}FY')\otimes E'(\xi X'\otimes\xi Y') \arrow[r, "\check{E}'"] \arrow[d, "E'\check{\mathcal{D}}\otimes E'\check{\xi}"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(II)}"] & E'((\mathcal{D}FX'\otimes\mathcal{D}FY')\otimes(\xi X'\otimes\xi Y')) \arrow[d, "E'(\check{\mathcal{D}}\otimes\check{\eta})"] \\
E'\mathcal{D}(FX'\otimes FY')\otimes E'\xi(X'\otimes Y') \arrow[r, "\check{E}'"] \arrow[d, equal] & E'(\mathcal{D}(FX'\otimes FY')\otimes\xi(X'\otimes Y')) \arrow[d, equal] \\
(E'\mathcal{D}\otimes E'\xi)(FX'\otimes FY', X'\otimes Y') \arrow[d, "(E'\mathcal{D}\otimes E'\xi)(\check{T})"] \arrow[r, phantom, "\mathrm{(III)}"] & E'(\mathcal{D}\otimes\xi)(FX'\otimes FY', X'\otimes Y') \arrow[d, "E'(\mathcal{D}\otimes\xi)(\check{T})"] \\
(E'\mathcal{D}\otimes E'\xi)(F(X'\otimes Y'), X'\otimes Y') \arrow[d, equal] & E'(\mathcal{D}\otimes\xi)(F(X'\otimes Y'), X'\otimes Y') \arrow[d, equal] \\
E'\mathcal{D}F(X'\otimes Y')E'\xi(X'\otimes Y') \arrow[r, "\check{E}'"] & E'(\mathcal{D}F(X'\otimes Y')\otimes\xi(X'\otimes Y'))
\end{tikzcd}
$$

Ensuite, de la même manière nous définissons le $\otimes$-isomorphisme

$$\mu_1\colon (E_1'\mathcal{D} \otimes E_1'\xi, (E_1'\mathcal{D} \check{\otimes} E_1'\xi)) \circ (T, \check{T}) \xrightarrow{\sim} (I_{\underline{Q}}, \check{I}_{\underline{Q}}).$$

Les deux $\otimes$-isomorphismes τ et τ_1 nous donnent le $\otimes$-isomorphisme

$$\rho\colon (E'\mathcal{D}, (\check{E'}\mathcal{D})) \to (E_1'\mathcal{D}, (\check{E_1'}\mathcal{D}))$$

par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{E}, \check{\mathcal{E}}) \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, equal] & (E'\mathcal{D}, (\check{E'}\mathcal{D})) \arrow[d, "\rho"] \\
(\mathcal{E}, \check{\mathcal{E}}) \arrow[r, "\tau_1"] & (E_1'\mathcal{D}, (\check{E_1'}\mathcal{D})).
\end{tikzcd} \tag{4.59}$$

En vertu du Lemme 4.53, nous avons un $\otimes$-isomorphisme unique

$$\rho'\colon (E'\xi, \check{E'}\xi) \to (E_1'\xi, (\check{E_1'}\xi))$$

tel que soit commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(E'\mathcal{D} \otimes E'\xi, (E'\mathcal{D} \check{\otimes} E'\xi)) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "(\rho\otimes\rho')T"'] & (I_{\underline{Q}}, \check{I}_{\underline{Q}}) \arrow[d, equal] \\
(E_1'\mathcal{D} \otimes E_1'\xi, (E_1'\mathcal{D} \check{\otimes} E_1'\xi)) \arrow[r, "\mu_1"] & (I_{\underline{Q}}, \check{I}_{\underline{Q}}).
\end{tikzcd} \tag{4.60}$$

Or d'aprés le Lemme 4.44, nous avons le $\otimes$-isomorphisme

$$\alpha_{(E,\check{E})}\colon (Ei \otimes Ei', (Ei \check{\otimes} Ei')) \to (E, \check{E})$$

qui est par conséquent fonctoriel en $(E, \check{E})$, i.e., si $\tau\colon (E, \check{E}) \to (E_1, \check{E}_1)$ est un $\otimes$-morphisme unifère, alors le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
(Ei \otimes Ei', (Ei \check{\otimes} Ei')) \arrow[r, "\alpha_{(E,\check{E})}"] \arrow[d, "\tau i\otimes\tau i'"'] & (E, \check{E}) \arrow[d, "\tau"] \\
(E_1 i \otimes E_1 i', (E_1 i \check{\otimes} E_1 i')) \arrow[r, "\alpha_{(E_1,\check{E}_1)}"] & (E_1, \check{E}_1)
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Prenons ici $(E, \check{E}) = (E'D, (E'\check{D})), (E_1, \check{E}_1) = (E_1'D, (E_1'\check{D}))$. Soit $\tau\colon (E'D, (E'\check{D})) \to (E_1'D, (E_1'\check{D}))$ le $\otimes$-isomorphisme défini par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(E'\mathcal{D} \otimes E'\xi, (E'\mathcal{D} \check{\otimes} E'\xi)) \arrow[r, "\alpha_{(E'D, E'\check{D})}"] \arrow[d, "\rho\otimes\rho'"'] & (E'D, E'\check{D}) \arrow[d, "\tau"] \\
(E_1'\mathcal{D} \otimes E_1'\xi, (E_1'\mathcal{D} \check{\otimes} E_1'\xi)) \arrow[r, "\alpha_{(E_1'D, E_1'\check{D})}"] & (E_1'D, E_1'\check{D}).
\end{tikzcd} \tag{4.61}$$

Puisque le foncteur L est une équivalence (Lemme 4.44), on voit aussitôt que $\rho = ri$, $\rho' = ri'$.

Les diagrammes commutatifs (4.60) et (4.61) nous donne la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
(E'D, E'\check{D}) \circ (T, \check{T}) \arrow[d, "\tau T"'] & (E'\mathcal{D} \otimes E'\xi, (E'\mathcal{D} \check{\otimes} E'\xi)) \circ (T, \check{T}) \arrow[l, "\alpha_{(E'D, E'\check{D})}"'] \arrow[r, "\mu"] & (I_{\underline{Q}}, \check{I}_{\underline{Q}}) \arrow[d, equal] \\
E_1'D, E_1'\check{D}) \circ (T, \check{T}) & (E_1'\mathcal{D} \otimes E_1'\xi, (E_1'\mathcal{D} \check{\otimes} E_1'\xi)) \circ (T, \check{T}) \arrow[l, "\alpha_{(E_1'D, E_1'\check{D})}"'] \arrow[r, "\mu_1"] & (I_{\underline{Q}}, \check{I}_{\underline{Q}})
\end{tikzcd}$$

Par conséquent, en vertu de la Proposition 4.43, nous avons un $\otimes$-isomorphisme $\tau'\colon E' \to E_1'$ tel que $\tau = \tau' D$. Dans le diagramme commutatif (4.59) remplaçons ρ par $\tau' Di = \tau'\mathcal{D}$. Nous obtenons bien le diagramme commutatif (4.19), ce qui achéve la demonstration. On voit aussitôt que si la catégorie sous-jacente de la catégorie $\underline{C}$ est un groupoïde, et si, pour tout $X \in \mathrm{Ob}\underline{C}$, il existe $Y \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}, X' \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}'$, tels que $X \otimes Y \simeq FX'$, alors $\underline{P}$ est une Pic-catégorie.

$\square$

Definition 4.62. $\underline{P}$ est appelée la $\otimes$-*catégorie de fractions* de $\underline{C}$ définie par $(\underline{C}', (F, \check{F}))$ et $(\mathcal{D}, \check{\mathcal{D}})$ le $\otimes$-*foncteur canonique* de $\underline{C}$ dans $\underline{P}$.

4.2.2. Pic-*enveloppe d'une* $\otimes$-*catégorie* ACU.

Definition 4.63. Soit $\underline{C}^{\mathrm{is}}$ la $\otimes$-catégorie ACU déduite de la $\otimes$-catégorie ACU $\underline{C}$ en enlevant les flèches qui ne sont pas des isomorphismes. La $\otimes$-catégorie de fractions de $\underline{C}^{\mathrm{is}}$ définie par $(\underline{C}^{\mathrm{is}}, (\mathrm{id}_{\underline{C}^{\mathrm{is}}}, \mathrm{id}))$ est une Pic-catégorie notée $\mathrm{Pic}(\underline{C})$. Le couple $(\mathrm{Pic}(\underline{C}), (\mathcal{D}, \check{\mathcal{D}}))$ est appelé la Pic-*enveloppe* de $\underline{C}$, $(\mathcal{D}, \check{\mathcal{D}})$ étant le $\otimes$-foncteur canonique de $\underline{C}^{\mathrm{is}}$ dans $\mathrm{Pic}(\underline{C})$.

$\mathrm{Pic}(\underline{C})$ est donc une Pic-catégorie définie de la manière suivante:

$$\mathrm{Ob}\,\mathrm{Pic}(\underline{C}) = \{(A_1, A_2) | A_1, A_2 \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}\}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Pic}(\underline{C})}((A_1,A_2),(B_1,B_2)) \;=\; \{[X,Y,(u_1,u_2)] | (A_1\otimes X, A_2\otimes X) &\xrightarrow{(u_1,u_2)} (B_1\otimes Y, B_2\otimes Y),\\ (u_1,u_2)&\in \mathrm{Fl}\,(\underline{C}^{\mathrm{is}}\times\underline{C}^{\mathrm{is}})\}\end{aligned}$$

où $[X,Y,(u_1,u_2)] = [U,V,(v_1,v_2)]$ si et seulement s'il existe des objets C, D et des isomorphismes

$$\begin{aligned} u &: X\otimes C \xrightarrow{\sim} U\otimes D\\ v &: Y\otimes C \xrightarrow{\sim} V\otimes D\end{aligned}$$

de $\underline{C}$ tels que soit commutatif dans $(\underline{C}^{\mathrm{is}}\times\underline{C}^{\mathrm{is}})^{\mathcal{S}}$ le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(A_1\otimes(X\otimes C), A_2\otimes(X\otimes C)) \arrow[r, "(a,a)"] \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes u,\mathrm{id}\otimes u)"'] & ((A_1\otimes X)\otimes C, (A_2\otimes X)\otimes C) \arrow[r, "(u_1\otimes\mathrm{id}, u_2\otimes\mathrm{id})"] & ((B_1\otimes Y)\otimes C, (B_2\otimes Y)\otimes C) \\
(A_1\otimes(U\otimes D), A_2\otimes(U\otimes D)) \arrow[d, "(a,a)"'] & & (B_1\otimes(Y\otimes C), B_2\otimes(Y\otimes C)) \arrow[u, "(a,a)"'] \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes v,\mathrm{id}\otimes v)"] \\
((A_1\otimes U)\otimes D, (A_2\otimes U)\otimes D) \arrow[r, "(v_1\otimes\mathrm{id}, v_2\otimes\mathrm{id})"] & ((B_1\otimes V)\otimes D, (B_2\otimes V)\otimes D) & (B_1\otimes(V\otimes D), B_2\otimes(V\otimes D)) \arrow[l, "(a,a)"']
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{S}$ étant la partie multiplicative de $\underline{C}^{\mathrm{is}}\times\underline{C}^{\mathrm{is}}$ engendrée par les endomorphismes de la forme $(c_{X,X}, c_{X,X}), X\in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$.

Puisque $\mathrm{Pic}(\underline{C})$ est une Pic-catégorie, sous groupes $\pi_0(\mathrm{Pic}(\underline{C})), \pi_1(\mathrm{Pic}(\underline{C}))$ sont des groupes abéliens (voir §3.2.1) dont les lois de composition sont notées additivement. Si on note $(\overline{A_1,A_2})$ les éléments de $\pi_0(\mathrm{Pic}(\underline{C}))$, $(A_1,A_2)\in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Pic}(\underline{C})$, alors

$$(4.64)\qquad (\overline{A_1,A_2}) + (\overline{B_1,B_2}) = (\overline{A_1\otimes B_1, A_2\otimes B_2})$$

D'autre part, soit $[X,Y,(u_1,u_2)]\in \mathrm{Aut}(\underline{1},\underline{1}) = \pi_1(\mathrm{Pic}(\underline{C}))$, i.e., nous avons deux isomorphismes $u_1\colon \underline{1}\otimes X\to \underline{1}\otimes Y, u_2\colon \underline{1}\otimes X\to\underline{1}\otimes Y$. $\underline{1}$ étant régulier, ce qui nous donne deux isomorphismes $v_1,v_2\colon X\to Y$ tels que $u_1 = \mathrm{id}_{\underline{1}}\otimes v_1, u_2 = \mathrm{id}_{\underline{1}}\otimes v_2$. Prouvons que

$$[X,Y,(u_1,u_2)] = [X,X,(\mathrm{id}\otimes v_2^{-1}v_1,\mathrm{id})].$$

Nous avons en effet la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
(\underline{1}\otimes X, \underline{1}\otimes X) \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes v_1, \mathrm{id}\otimes v_2)"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & (\underline{1}\otimes Y, \underline{1}\otimes Y) \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes v_2^{-1}, \mathrm{id}\otimes v_2^{-1})"] \\
(\underline{1}\otimes X, \underline{1}\otimes X) \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes v_2^{-1}v_1, \mathrm{id})"] & (\underline{1}\otimes X, \underline{1}\otimes X)
\end{tikzcd}$$

dans $\underline{C}^{\mathrm{is}}\times\underline{C}^{\mathrm{is}}$ et a fortiori dans $(\underline{C}^{\mathrm{is}}\times\underline{C}^{\mathrm{is}})^{\mathcal{S}}$. D'où l'égalité voulue en vertu de la Remarque 4.17(1). Donc chaque élément de $\pi_1(\mathrm{Pic}(\underline{C}))$ peut s'écrire sous la forme $[X,X,(\mathrm{id}_{\underline{1}}\otimes f, \mathrm{id}_{\underline{1}\otimes X})], X\in\mathrm{Ob}\,\underline{C}, f\colon X\xrightarrow{\sim} X$, qu'on notée simplement $(\overline{X,f})$.

Écrire que les deux flèches $[X, X, (\mathrm{id}_{\underline{1}} \otimes f, \mathrm{id}_{\underline{1}\otimes X})], [Y, Y, (\mathrm{id}_{\underline{1}} \otimes g, \mathrm{id}_{\underline{1}\otimes X})]$ sont égales est équivalent à écrire qu'il existe deux isomorphismes $u\colon X \otimes C \to Y \otimes D, v\colon X \otimes C \to Y \otimes D$ dans $\underline{C}$ tels que soit commutatif dans $(\underline{C}^{\mathrm{is}} \times \underline{C}^{\mathrm{is}})^{\mathcal{S}}$ le diagramme

$$
\begin{tikzcd}
(\underline{1} \otimes (X \otimes C), \underline{1} \otimes (X \otimes C)) \arrow[r, "(a,a)"] \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes u, \mathrm{id}\otimes u)"'] & ((\underline{1} \otimes X) \otimes C, (\underline{1} \otimes X) \otimes C) \arrow[r, "((\mathrm{id}\otimes f)\otimes \mathrm{id}, \mathrm{id})"] & ((\underline{1} \otimes Y) \otimes C, (\underline{1} \otimes Y) \otimes C) \\
(\underline{1} \otimes (Y \otimes D), \underline{1} \otimes (Y \otimes D)) \arrow[d, "(a,a)"'] & & (\underline{1} \otimes (X \otimes C), \underline{1} \otimes (X \otimes C)) \arrow[u, "(a,a)"'] \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes v, \mathrm{id}\otimes v)"] \\
((\underline{1} \otimes Y) \otimes D, (\underline{1} \otimes Y) \otimes D) \arrow[r, "((\mathrm{id}\otimes g)\otimes \mathrm{id}, \mathrm{id})"] & ((\underline{1} \otimes Y) \otimes D, (\underline{1} \otimes Y) \otimes D) & (\underline{1} \otimes (Y \otimes D), \underline{1} \otimes (Y \otimes D)). \arrow[l, "(a,a)"']
\end{tikzcd}
$$

Or la commutativité de ce dernier dans $(\underline{C}^{\mathrm{is}} \times \underline{C}^{\mathrm{is}})^{\mathcal{S}}$ est équivalente à celle du diagramme:

$$
\begin{tikzcd}
(X \otimes C, X \otimes C) \arrow[r, "(f\otimes \mathrm{id}_C, \mathrm{id}_{X\otimes C})"] \arrow[d, "(u,u)"] & (X \otimes C, X \otimes C) \arrow[d, "(v,v)"] \\
(Y \otimes D, Y \otimes D) \arrow[r, "(g\otimes \mathrm{id}_D, \mathrm{id}_{Y\otimes D})"] & (Y \otimes D, Y \otimes D)
\end{tikzcd} \tag{4.65}
$$

dans $(\underline{C}^{\mathrm{is}} \times \underline{C}^{\mathrm{is}})^{\mathcal{S}}$ compte tenu de la fonctorialité de la contrainte d'associativité (a, a) et du fait que $(\underline{1}, \underline{1})$ est régulier.

Cela étant, en vertu de la composition des flèches dans $\mathrm{Pic}(\underline{C})$ (Proposition 4.23)

$$(\overline{X, f}) + (\overline{Y, g}) = (\overline{X \otimes Y, f \otimes g}) \tag{4.66}$$

et au cas où $Y = X$

$$(\overline{X, f}) + (\overline{X, g}) = (\overline{X, fg}). \tag{4.67}$$

Remark 4.68. Dire que le diagramme (4.65) est commutatif dans $(\underline{C}^{\mathrm{is}} \times \underline{C}^{\mathrm{is}})^{\mathcal{S}}$ est dire que si l'on pose

$$(U, u) = (g \otimes \mathrm{id}, \mathrm{id})(u, u), \quad (V, v) = (v, v)(f \otimes \mathrm{id}, \mathrm{id})$$

on doit pouvoir décomposer $(U, u), (V, v)$ en des produits (voir Remarque 4.2)

$$
\begin{aligned}
(U, u) &= (U_1 U_2 \dots U_p, u_1 u_2 \dots u_p) \\
(V, v) &= (V_1 V_2 \dots V_q, v_1 v_2 \dots v_q)
\end{aligned}
$$

tels que

$$
\begin{aligned}
& (U_1, u_1)(\varepsilon_1, \varepsilon_1)(U_2, u_2)(\varepsilon_2, \varepsilon_2) \dots (\varepsilon_{p-1}, \varepsilon_{p-1})(U_p, u_p) \\
= \; & (V_1, v_1)(\zeta_1, \zeta_1)(V_2, v_2)(\zeta_2, \zeta_2) \dots (\zeta_{q-1}, \zeta_{q-1})(V_q, v_q)
\end{aligned}
$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{p-1}, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{q-1}$ appartenant à la partie multiplicative $\mathcal{S}$ de $\underline{C}^{\mathrm{is}}$ engendrée par les endomorphismes de la forme $c_{X,X}$, $X \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$. On obtient donc dans $\underline{C}^{\mathrm{is}} \times \underline{C}^{\mathrm{is}}$ la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes C, X \otimes C) \arrow[r, "((v_1\zeta_1 \ldots \zeta_{q-1}v_q)^{-1}(V_1\zeta_1\ldots\zeta_{q-1}V_q), \mathrm{id})"] \arrow[d, "(u_1\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{p-1}u_p, u_1\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{p-1}u_p)"] & (X \otimes C, X \otimes C) \arrow[d, "(v_1\zeta_1\ldots\zeta_{q-1}v_q, v_1\zeta_1\ldots\zeta_{q-1}v_q)"'] \\
(Y \otimes D, Y \otimes D) \arrow[r, "((U_1\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{p-1}U_p)(u_1\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{p-1}u_p)^{-1}, \mathrm{id})"] & (Y \otimes D, Y \otimes D)
\end{tikzcd}$$

ce qui implique la commutativité du diagramme suivant dans $\underline{C}^{\mathrm{is}}$

$$\begin{tikzcd}
X \otimes C \arrow[r, "(v_1\zeta_1\ldots\zeta_{q-1}v_q)^{-1}(V_1\zeta_1\ldots\zeta_{q-1}V_q)"] \arrow[d, "u_1\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{p-1}u_p"'] & X \otimes C \arrow[d, "v_1\zeta_1\ldots\zeta_{q-1}v_q"] \\
Y \otimes D \arrow[r, "(U_1\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{p-1}U_p)(u_1\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{p-1}u_p)^{-1}"] & Y \otimes D
\end{tikzcd}$$

où

$$\begin{aligned}
u &= u_1 \ldots u_p,\ v = v_1 \ldots v_q \\
(g \otimes \mathrm{id})u &= U_1 \ldots U_p,\ v(f \otimes \mathrm{id}) = V_1 \ldots V_q \\
u_1\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{p-1}u_p &= v_1\zeta_1 \ldots \zeta_{q-1}v_q \\
U_1\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{p-1}U_p &= V_1\zeta_1 \ldots \zeta_{q-1}V_q.
\end{aligned}$$

4.3. **Applications.**

4.3.1. *Groupe de Grothendieck et groupe de Whitehead.*

R étant un anneau unitaire, on rappelle les définitions suivantes [1].

Definition 4.69. On appelle *groupe de Grothendieck* des R-modules projectifs à gauche de type fini le groupe abélien $K_0(R)$ engendré par les $[X]$, X étant un R-module projectif à gauche de type fini et les générateurs $[X]$ satisfaisant à la relation

$$[X] = [X'] + [X''] \tag{4.70}$$

si le R-module X est isomorphe à la somme directe $X' \oplus X''$.

Definition 4.71. On appelle *groupe de Whitehead* de R le groupe abélien $K_1(R)$ engendré par les $[(X, f)]$, où X est un R-module projectif à gauche de type fini,

$f\colon X \xrightarrow{\sim} X$ un automorphisme de R-module; les relations entre les générateurs étant

$$[(X, fg)] = [(X, f)] + [(X, g)] \tag{4.72}$$

et

$$[(X, f)] = [(X', f')] + [(X'', f'')] \tag{4.73}$$

s'il existe une suite exacte de R-modules

$$0 \to X' \xrightarrow{\sigma} X \xrightarrow{\theta} X'' \to 0$$

telle qui soit commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "f"] & X'' \arrow[d, "f''"] \\ X' \arrow[r, "\sigma"] & X \arrow[r, "\theta"] & X''. \end{tikzcd}$$

Soit $\mathcal{P}(R)$ la catégorie des R-modules projectifs à gauche de type fini. La catégorie $\mathcal{P}(R)$ muni de la loi $\oplus$ de somme directe et des contraintes d'associativité, de commutativité et d'unité naturelles est évidemment une $\oplus$-catégorie ACU. Posons $\underline{P} = \mathrm{Pic}(\mathcal{P}(R))$. Nous avons les propositions suivantes:

Proposition 4.74. *$\pi_0(\underline{P}) \simeq K_0(R)$.*

Proof. Tout d'abord remarquons qu'on a, en appliquant la formule (4.70)

$$[X] = [X] + [0]$$

pour tout $X \in \mathcal{P}(R)$, et

$$[X] = [Y]$$

si X est isomorphe à Y. Ensuite soit

$$(X_1, X_2) \xrightarrow{[A,B,(u_1,u_2)]} (Y_1, Y_2)$$

un isomorphisme dans $\underline{P}$, ce qui veut dire qu'on a deux R-isomorphismes

$$u_1\colon X_1 \oplus A \to Y_1 \oplus B, u_2\colon X_2 \oplus A \to Y_2 \oplus B.$$

On en conclut

$$[X_1] + [A] = [Y_1] + [B], \quad [X_2] + [A] = [Y_2] + [B]$$

ou

$$[X_1] - [X_2] = [Y_1] - [Y_2].$$

Donc on obtient une application i_0 de $\pi_0(\underline{P})$ dans $K_0(R)$ définie par

$$i_0\colon (\overline{X_1, X_2}) \mapsto [X_1] - [X_2].$$

De plus, en vertu des relations (4.64) et (4.70),

$$\begin{aligned}(\overline{X_1, X_2}) + (\overline{Y_1, Y_2}) &= (\overline{X_1 \oplus Y_1, X_2 \oplus Y_2}) \stackrel{i_0}{\mapsto} [X_1 \oplus Y_1] - [X_2 \oplus Y_2] \\ &= [X_1] + [Y_1] - [X_2] - [Y_2] = [X_1] - [X_2] + ([Y_1] - [Y_2])\end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure que l'application i_0 est un homomorphisme de groupes. D'autre part, considérons l'application de l'ensemble des générateurs de $K_0(R)$ dans $\pi_0(\underline{P})$ définie par

$$[X] \mapsto (\overline{X, 0}).$$

Pour $[X] = [X_1] + [X_2]$, i.e., $X = X_1 \oplus X_2$, nous avons

$$(\overline{X, 0}) = (\overline{X_1 \oplus X_2, 0}) = (\overline{X_1, 0}) + (\overline{X_2, 0}).$$

Donc l'application considérée définit un homomorphisme j_0 du groupe $K_0(R)$ dans le groupe $\pi_0(\underline{P})$. Il est clair que les deux homomorphismes i_0 et j_0 qu'on vient de construire sont inverses l'un de l'autre. On en déduit $\pi_0(\underline{P}) \simeq K_0(R)$. Les isomorphismes i_0 et j_0 sont appelés les *isomorphismes canoniques*. □

Proposition 4.75. *$\pi_1(\underline{P}) \simeq K_1(R)$.*

Proof. Remarquons d'abord que pour tout $[(X, f)]$ on a:

$$[(X, f)] = [(X, f)] + [(0, \mathrm{id})]$$

$$[(X, \mathrm{id})] + [(X, f)] = [(X, f)]$$

$$[(X, f)] + [(X, f^{-1})] = [(X, \mathrm{id})]$$

compte tenu des relations (4.72) et (4.73). On en conclut que $[(0, \mathrm{id})] = [(X, \mathrm{id})]$ est le zéro du groupe $K_1(R)$ et $[(X, f^{-1})]$ est l'opposé de $[(X, f)]$. La relation (4.73) donne aussi

$$[(X, f)] = [(Y, g)] + [(0, \mathrm{id})] = [(Y, g)]$$

s'il existe un R-isomorphisme $u\colon X \to Y$ tel que soit commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "u"] & Y. \end{tikzcd}$$

Ensuite considérons trois isomorphismes dans $\mathcal{P}(R)$

$$X \stackrel{f_1}{\to} Y, \quad Y \stackrel{g}{\to} Y, \quad Y \stackrel{f_2}{\to} X.$$

Puisque le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_1} & Y \\ {\scriptstyle f_1^{-1} g f_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ X & \xrightarrow{f_1} & Y \end{array}$$

est commutatif on a

$$[(Y, g)] = [(X, f_1^{-1} g f_1)].$$

D'autre part, on a

$$f_2 g f_1 = f_2 f_1 f_1^{-1} g f_1$$

ce qui donne en vertu de (4.72)

$$[(X, f_2 g f_1)] = [(X, f_2 f_1)] + [(X, f_1^{-1} g f_1)] = [(X, f_2 f_1)] + [(Y, g)].$$

Plus généralment, soient

$$X \xrightarrow{w_n} Y_{n-1}, Y_{n-1} \xrightarrow{\psi_{n-1}} Y_{n-1}, Y_{n-1} \xrightarrow{w_{n-1}} Y_{n-2}, Y_{n-2} \xrightarrow{\psi_{n-2}} Y_{n-2}, \ldots, Y_1 \xrightarrow{\psi_1} Y_1, Y_1 \xrightarrow{w_1} X$$

des isomorphismes dans $\mathcal{P}(R)$. On obtient de proche en proche

$$\begin{aligned} [(X, w_1\psi_1 \ldots \psi_{n-2} w_{n-1} \psi_{n-1} w_n)] &= [(X, w_1\psi_1 \ldots \psi_{n-2} w_{n-1} \psi_{n-1} w_n)] + [(Y_{n-1}, \psi_{n-1})] \\ &= \ldots [(X, w_1 w_2 \ldots w_n)] + [(Y_1, \psi_1)] + [(Y_2, \psi_2)] + \cdots + [(Y_{n-1}, \psi_{n-1})] \end{aligned}$$

Ces remarques faites, soient $(\overline{X, f}), (\overline{Y, g}) \in \pi_1(\underline{P})$ tels que $(\overline{X, f}) = (\overline{Y, g})$, ce qui veut dire qu'il existe $C, D \in \operatorname{Ob}\mathcal{P}(R)$ et deux isomorphismes de R-modules

$$\begin{array}{rcl} u & : & X \oplus C \to Y \oplus D \\ v & : & X \oplus C \to Y \oplus D \end{array}$$

tels que soit commutatif dans $\mathcal{P}(R)$ le diagramme (Remarque 4.68)

$$\begin{array}{ccc} X \otimes C & \xrightarrow{(v_1\zeta_1\ldots\zeta_{q-1}v_q)^{-1}(V_1\zeta_1\ldots\zeta_{q-1}V_q)} & X \otimes C \\ {\scriptstyle u_1\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{p-1}u_p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v_1\zeta_1\ldots\zeta_{q-1}v_q} \\ Y \otimes D & \xrightarrow{(U_1\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{p-1}U_p)(u_1\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{p-1}u_p)^{-1}} & Y \otimes D \end{array}$$

où

$$\begin{array}{rcl} u & = & u_1 \ldots u_p,\ v = v_1 \ldots v_q \\ (g \otimes \mathrm{id})u & = & U_1 \ldots U_p,\ v(f \otimes \mathrm{id}) = V_1 \ldots V_q \\ u_1\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{p-1} u_p & = & v_1 \zeta_1 \ldots \zeta_{q-1} v_q \\ U_1\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{p-1} U_p & = & V_1 \zeta_1 \ldots \zeta_{q-1} V_q \\ \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_{p-1}, \zeta_1, \ldots, \zeta_{q-1} \in \mathcal{S}, & & \end{array}$$

$\mathcal{S}$ étant la partie multiplicative de $\mathcal{P}(R)^{\mathrm{is}}$ engendrée par les endomorphismes de la forme

$$c_{X,X}\colon X \oplus X \to X \oplus X, (a,b) \mapsto (b,a),$$

$X \in \mathcal{P}(R)$.

En vertu des remarques faites au début de la démonstration et des relations (4.72) et (4.73), nous obtenons

$$\begin{aligned}
[(X,f)] &= [(X,f)] + [(C,\mathrm{id})] = [(X \oplus C, f \oplus \mathrm{id})] \\
&= [(X \oplus C, (v_1\zeta_1 \dots \zeta_{q-1}v_q)^{-1}(V_1\zeta_1 \dots \zeta_{q-1}V_q))] \\
&= [(Y \oplus D, (U_1\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{p-1}U_p)(u_1\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{p-1}u_p)^{-1})] \\
&= [(Y,g)] + [(D,\mathrm{id})] = [(Y,g)].
\end{aligned}$$

On en déduit une application i_1 de $\pi_1(\underline{P})$ dans $K_1(R)$

$$i_1\colon (\overline{X,f)} \mapsto [(X,f)].$$

Elle est aussi un homomorphisme du groupe, compte tenu de (4.66) et (4.73). Définissons maintenant une application j_1 de l'ensemble des genérateurs de $K_1(R)$ dans $\pi_1(\underline{P})$ par

$$j_1\colon [(X,f)] \mapsto (\overline{X,f)}.$$

En vertu de la formule (4.67), nous avons

$$[(X,f)] + [(X,g)] = [(X,fg)] \overset{j_1}{\mapsto} (\overline{X,fg)} = (\overline{X,f)} + (\overline{X,g)}$$

ce qui veut dire que les images par j_1 des générateurs de $K_1(R)$ respectent la relation (4.72). Reste la relation (4.73) à considérer. Soit

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{\sigma} & X & \xrightarrow{\theta} & X'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f''} & & \\
0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{\sigma} & X & \xrightarrow{\theta} & X'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

un diagramme commutatif dans $\mathcal{P}(R)$ où les lignes sont exactes et f', f, f'' des automorphismes. Puisque X'' est projectif, il existe des homomorphismes de R-modules $\sigma'\colon X \to X', \theta'\colon X'' \to X$ tels que

(4.76) $$\sigma'\sigma = \mathrm{id}_{X'}, \theta\theta' = \mathrm{id}_{X''}, \sigma\sigma' + \theta'\theta = \mathrm{id}_X.$$

D'autre part les homomorphismes de R-modules

$$x \mapsto (\sigma' x, \theta x), (x', x'') \mapsto \sigma x' + \theta' x''$$

de X dans $X' \oplus X''$ et de $X' \oplus X''$ dans X sont inverses l'un de l'autre. X et $X' \oplus X''$ sont donc isomorphes par ces isomorphismes. De plus, moyenant les relations (4.76), on vérifie aussitôt que le diagramme

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\binom{\sigma'}{\theta}"] \arrow[d, "f"] & X' \oplus X'' \arrow[d, "\begin{pmatrix} f' & \sigma' f \theta' \\ 0 & f'' \end{pmatrix}"] \\
X \arrow[r, "\binom{\sigma'}{\theta}"] & X' \oplus X''
\end{tikzcd}
\tag{4.77}
$$

est commutatif, où

$$\begin{pmatrix} \sigma' \\ \theta \end{pmatrix} : X \to X' \oplus X'', x \mapsto (\sigma' x, \theta x)$$

$$\begin{pmatrix} f' & \sigma' f \theta' \\ 0 & f'' \end{pmatrix} : X' \oplus X'' \to X' \oplus X'', (x', x'') \mapsto (f' x' + \sigma' f \theta' x'', f'' x''),$$

ce qui implique que

$$\begin{pmatrix} f' & \sigma' f \theta' \\ 0 & f'' \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme. La commutativité du diagramme (4.77) nous donne (Diagramme (4.65))

$$(\overline{X, f}) = \overline{\left(X' \oplus X'', \begin{pmatrix} f' & \sigma' f \theta' \\ 0 & f'' \end{pmatrix}\right)}.$$

Or

$$\begin{pmatrix} f' & \sigma' f \theta' \\ 0 & f'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f' & 0 \\ 0 & f'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{X'} & (f')^{-1} \sigma' f \theta' \\ 0 & \mathrm{id}_{X''} \end{pmatrix}.$$

Donc en vertu des formules (4.66) et (4.67)

$$
\begin{aligned}
(\overline{X, f}) &= \overline{\left(X' \oplus X'', \begin{pmatrix} f' & \sigma' f \theta' \\ 0 & f'' \end{pmatrix}\right)} \\
&= \overline{\left(X' \oplus X'', \begin{pmatrix} f' & 0 \\ 0 & f'' \end{pmatrix}\right)} + \overline{\left(X' \oplus X'', \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{X'} & (f')^{-1} \sigma' f \theta' \\ 0 & \mathrm{id}_{X''} \end{pmatrix}\right)} \\
&= (\overline{X', f'}) + (\overline{X'', f''}) + \overline{\left(X' \oplus X'', \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{X'} & (f')^{-1} \sigma' f \theta' \\ 0 & \mathrm{id}_{X''} \end{pmatrix}\right)}.
\end{aligned}
$$

Prouvons que

$$\overline{\left(X' \oplus X'', \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{X'} & (f')^{-1} \sigma' f \theta' \\ 0 & \mathrm{id}_{X''} \end{pmatrix}\right)} = \overline{\left(X' \oplus X'', \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{X'} & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{X''} \end{pmatrix}\right)}$$

ou plus généralement

$$\overline{\left(X'\oplus X'',\begin{pmatrix}\mathrm{id}_{X'} & h\\ 0 & \mathrm{id}_{X''}\end{pmatrix}\right)}=\overline{\left(X'\oplus X'',\begin{pmatrix}\mathrm{id}_{X'} & 0\\ 0 & \mathrm{id}_{X''}\end{pmatrix}\right)}$$

où $h\colon X''\to X'$ est un homomorphisme de R-modules quelconque (remarquons que bien que h soit quelconque,

$$\begin{pmatrix}\mathrm{id}_{X'} & h\\ 0 & \mathrm{id}_{X''}\end{pmatrix}: X'\oplus X''\to X'\oplus X''$$

est un automorphisme de R-modules, son inverse étant $\begin{pmatrix}\mathrm{id}_{X'} & -h\\ 0 & \mathrm{id}_{X''}\end{pmatrix}$). Pour cela nous devons trouver des R-modules $C,D\in\mathcal{P}(R)$ et des isomorphismes de R-modules

$$\begin{array}{rcl} u & : & (X'\oplus X'')\oplus C\to(X'\oplus X'')\oplus D\\ v & : & (X'\oplus X'')\oplus C\to(X'\oplus X'')\oplus D\end{array}$$

tels que soit commutatif dans $(\mathcal{P}(R)^{\mathrm{is}}\times\mathcal{P}(R)^{\mathrm{is}})^{\mathcal{S}}$ le diagramme

(4.78)

$$\begin{tikzcd}
((X'\oplus X'')\oplus C,(X'\oplus X'')\oplus C) \arrow[r, "\left(\begin{pmatrix}\mathrm{id}_{X'} & h\\ 0 & \mathrm{id}_{X''}\end{pmatrix}\oplus\mathrm{id}_C,\,\mathrm{id}\right)"] \arrow[d, "{(u,u)}"'] & ((X'\oplus X'')\oplus C,(X'\oplus X'')\oplus C) \arrow[d, "{(v,v)}"] \\
((X'\oplus X'')\oplus D,(X'\oplus X'')\oplus D) \arrow[r, "{(\mathrm{id},\mathrm{id})}"] & ((X'\oplus X'')\oplus D,(X'\oplus X'')\oplus D)
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{S}$ étant la partie multiplicative de $\mathcal{P}(R)^{\mathrm{is}}\times\mathcal{P}(R)^{\mathrm{is}}$ engendrée par les endomorphismes de la forme $(c_{X,X},c_{X,X})$, $X\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{P}(R)$, et

$$c_{X,X}\colon X\oplus X\to X\oplus X,\ (a,b)\mapsto(b,a).$$

Prenons $C=D=X''$ et

$$u\colon X'\oplus X''\oplus X''\to X'\oplus X''\oplus X'',\,(x',x'',x_1'')\mapsto(x'+h(x''+x_1''),x''+x_1'',x_1''),$$

$$v\colon X'\oplus X''\oplus X''\to X'\oplus X''\oplus X'',\,(x',x'',x_1'')\mapsto(x'+hx_1'',x''+x_1'',x_1'').$$

On voit aussitôt que u et v sont des isomorphismes de R-modules. Pour montrer que le diagramme (4.78), où on a remplacé C et D par X'' et où u,v sont définis de la manière ci-dessus, est commutatif dans $\mathcal{P}(R)^{\mathrm{is}}\times\mathcal{P}(R)^{\mathrm{is}}$, nous décomposons l'identité $(\mathrm{id}_{X'\oplus X''\oplus X''},\mathrm{id}_{X'\oplus X''\oplus X''})$ en le produit

$$(\mathrm{id}_{X'\oplus X''\oplus X''},\mathrm{id}_{X'\oplus X''\oplus X''})=(\mathrm{id}_{X'\oplus X''\oplus X''},\mathrm{id}_{X'\oplus X''\oplus X''})(\mathrm{id},w)(\mathrm{id},w^{-1})$$

où

$$w = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{X'} & h \\ 0 & \mathrm{id}_{X''} \end{pmatrix} \oplus \mathrm{id}_{X''} \colon X' \oplus X'' \oplus X'' \to X' \oplus X'' \oplus X'';$$

ensuite nous définissons

$$(\varepsilon, \varepsilon) \colon (X' \oplus X'' \oplus X'', X' \oplus X'' \oplus X'') \to (X' \oplus X'' \oplus X'', X' \oplus X'' \oplus X'')$$

par

$$(\varepsilon, \varepsilon) = (\mathrm{id}_{X'} \oplus c_{X'',X''}, \mathrm{id}_{X'} \oplus c_{X'',X''}), \text{ i.e., } \varepsilon(x', x'', x_1'') = (x', x_1'', x'').$$

Il est clair que $(\varepsilon, \varepsilon) \in \mathcal{S}$. Enfin la vérification de la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
(X' \oplus X'' \oplus X'', X' \oplus X'' \oplus X'') \arrow[rr, "\left(\begin{pmatrix} \mathrm{id}_{X'} & h \\ 0 & \mathrm{id}_{X''} \end{pmatrix} \oplus \mathrm{id}_{X''}, \mathrm{id}\right)"] \arrow[d, "(u,u)"'] & & (X' \oplus X'' \oplus X'', X' \oplus X'' \oplus X'') \arrow[d, "(v,v)"] \\
(X' \oplus X'' \oplus X'', X' \oplus X'' \oplus X'') \arrow[rr, "(\mathrm{id},\mathrm{id})(\varepsilon,\varepsilon)(\mathrm{id},w)(\varepsilon,\varepsilon)(\mathrm{id},w^{-1})"] & & (X' \oplus X'' \oplus X'', X' \oplus X'' \oplus X'')
\end{tikzcd}$$

dans $\mathcal{P}(R)^{\mathrm{is}} \times \mathcal{P}(R)^{\mathrm{is}}$ est immédiate, ce qui prouve que (4.78) est commutatif dans $(\mathcal{P}(R)^{\mathrm{is}} \times \mathcal{P}(R)^{\mathrm{is}})^{\mathcal{S}}$, et par suite ((4.2.2)):

(4.79)
$$\overline{\left(X' \oplus X'', \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{X'} & h \\ 0 & \mathrm{id}_{X''} \end{pmatrix}\right)} = (\overline{X' \oplus X'', \mathrm{id}}).$$

Puisque $(\overline{X, \mathrm{id}_X})$ est le zéro du groupe $\pi_1(\underline{P})$ pour tout $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{P}(R)$, ce qu'on peut vérifier aussitôt, on peut donc écrire en vertu de la relation (4.79)

$$\begin{aligned}
[(X', f')] + [(X'', f'')] = [(X, f)] \mapsto (\overline{X, f}) &= (\overline{X', f'}) + (\overline{X'', f''}) + \overline{\left(X' \oplus X'', \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{X'} & (f')^{-1}\sigma' f \theta' \\ 0 & \mathrm{id}_{X''} \end{pmatrix}\right)} \\
&= (\overline{X', f'}) + (\overline{X'', f''}) + (\overline{X' \oplus X'', \mathrm{id}}) \\
&= (\overline{X', f'}) + (\overline{X'', f''})
\end{aligned}$$

i.e., les images par j_1 des générateurs de $K_1(R)$ respectent aussi la relation (4.73), j_1 définit donc un homomorphisme noté aussi j_1 du groupe $K_1(R)$ dans le groupe $\pi_1(\underline{P})$. On vérifie aussitôt que i_1 et j_1 sont inverses l'un de l'autre. On les appelle les *isomorphismes canoniques*. La proposition est ainsi démontrée. □

4.3.2. *Catégorie de suspension.*

Soient $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie ACU, $S \colon \underline{C} \to \underline{C}$ un foncteur de $\underline{C}$ dans $\underline{C}$. On se propose de chercher une catégorie $\underline{\mathcal{P}}$, un foncteur i de $\underline{C}$ dans $\underline{\mathcal{P}}$ et un foncteur p de $\underline{\mathcal{P}}$ dans $\underline{\mathcal{P}}$ tels que le triple $(\underline{\mathcal{P}}, i, p)$ posséde les propriétés suivantes

(1) p est une équivalence de catégorie et $iS \simeq pi$.

(2) Pour tout triple $(\underline{Q}, j, q)$ ayant la propriété (1), il existe un foncteur f et un seul (défini à isomorphisme fonctoriel prés) de $\underline{\mathcal{P}}$ dans $\underline{Q}$ tel que $fi \simeq j, fp \simeq qfi$.

Proposition 4.80. *Le triple* $(\underline{\mathcal{P}}, i, p)$ *existe.*

Proof. Soient $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}, m, n \in \mathbb{N}$. On note $\Phi((X, m), (Y, n))$ l'ensemble suivant

$$\Phi((X, m), (Y, n)) = \{(a, b, u)\colon a, b \in \mathbb{N}, a + m = b + n, u \in \mathrm{Fl}\,\underline{C}, u\colon S^a X \to S^b Y\},$$

où $S^a X = S(\dots(S(SX))\dots)$ et $S^0 X = X$. Soit $R_{(X,m),(Y,n)}$ une relation binaire dans $\Phi((X, m), (Y, n))$ définie de la façon suivante:

$$(a, b, u) R_{(X,m),(Y,n)} (a_1, b_1, u_1)$$

si et seulement s'il existe $c, c_1 \in \mathbb{N}$ tels que $a + c = a_1 + c_1$ (ce qui implique $b + c = b_1 + c_1$) et $S^c u = S^{c_1} u_1$. On vérifie aussitôt qui c'est une relation d'équivalence. On note $\langle a, b, u\rangle$ la classe d'équivalence de (a, b, u).

Soient $\langle a, b, u\rangle \in \Phi((X, l), (Y, m))/R_{(X,l),(Y,m)}$, $\langle c, d, v\rangle \in \Phi((Y, m), (Z, n))/R_{(Y,m),(Z,n)}$, on peut vérifier que la classe d'équivalence

$$\langle a + c, b + d, S^b(v) S^c(u)\rangle \in \Phi((X, l), (Z, n))/R_{(X,l),(Z,n)}$$

ne depend pas des représentants $(a, b, u), (c, d, v)$. On l'appelle *composé* des classes $\langle a, b, u\rangle, \langle c, d, v\rangle$, et on la note

$$\langle c, d, v\rangle\langle a, b, u\rangle = \langle a + c, b + d, S^b(v) S^c(u)\rangle.$$

Il est clair que

$$\langle b, c, v\rangle\langle a, b, u\rangle = \langle a, c, vu\rangle$$

et par suite on voit aussitôt l'associativité du produit des classes ainsi défini. Cela étant, définissons la catégorie $\underline{\mathcal{P}}$ par

$$\begin{aligned} \mathrm{Ob}\,\underline{\mathcal{P}} &= \{(X, m) | X \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}, m \in \mathbb{N}\} \\ \mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{P}}}((X, m), (Y, n)) &= \Phi((X, m), (Y, n))/R_{(X,m),(Y,n)} \end{aligned}$$

la loi de composition des flèches de $\underline{\mathcal{P}}$ étant le produit des classes défini ci-dessus. Ensuite on définit le foncteur i par

$$i\colon \underline{C} \to \underline{\mathcal{P}}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "u"'] & (X, 0) \arrow[d, "{\langle 0,0,u\rangle}"] \\ Y \arrow[r, mapsto] & (Y, 0) \end{tikzcd}$$

et le foncteur p par

$$p\colon \underline{\mathcal{P}} \to \underline{\mathcal{P}}$$

$$\begin{tikzcd}
(X,m) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "{\langle a,b,u\rangle}"'] & (SX,m) \arrow[d, "{\langle a,b,Su\rangle}"] \\
(Y,n) \arrow[r, mapsto] & (SY,n).
\end{tikzcd}$$

Il est clair que $p\langle a,b,u\rangle$ ne dépend pas du représentant (a,b,u). Soit $\widetilde{p}$ un autre foncteur de $\underline{\mathcal{P}}$ dans $\underline{\mathcal{P}}$ défini par

$$\widetilde{p}\colon \underline{\mathcal{P}} \to \underline{\mathcal{P}}$$

$$\begin{tikzcd}
(X,m) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "{\langle a,b,u\rangle}"'] & (X,m+1) \arrow[d, "{\langle a,b,u\rangle}"] \\
(Y,n) \arrow[r, mapsto] & (Y,n+1).
\end{tikzcd}$$

On vérifie aussitôt que

$$\widetilde{p}p = p\widetilde{p} \underset{\xi}{\overset{\sim}{\to}} \mathrm{id}_{\underline{\mathcal{P}}}, \quad \xi_{(X,m)} = [0,1,\mathrm{id}_{SX}] \text{ pour tout } (X,m) \in \operatorname{Ob} \underline{\mathcal{P}}.$$

ce qui montre que p est une équivalence de catégories. Enfin la définition des foncteurs i, p donne $iS = pi$. Le triple $(\underline{\mathcal{P}}, i, p)$ vérifie dons la propriété (1).

Soit $(\underline{\mathcal{Q}}, j, q)$ un autre triple vérifiant la propriété (1), i.e., il existe des isomorphismes fonctoriels β, η, ζ tels que

$$jS \underset{\beta}{\overset{\sim}{\to}} qj, \quad \widetilde{q}q \underset{\eta}{\overset{\sim}{\to}} \mathrm{id}_{\underline{\mathcal{Q}}}, \quad q\widetilde{q} \underset{\zeta}{\overset{\sim}{\to}} \mathrm{id}_{\underline{\mathcal{Q}}}$$

$\widetilde{q}$ étant un quasi-inverse de q. Ces isomorphismes fonctoriels nous donnent l'isomorphisme composé

$$\widetilde{q}jS \underset{\widetilde{q}*\beta}{\overset{\sim}{\to}} \widetilde{q}qj \underset{\eta*j}{\overset{\sim}{\to}} j,$$

par suite nous pouvons définir un foncteur f de $\underline{\mathcal{P}}$ dans $\underline{\mathcal{Q}}$ de la façon suivante

$$f\colon \underline{\mathcal{P}} \to \underline{\mathcal{Q}}$$

$$\begin{tikzcd}
(X,m) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "{\langle a,b,u\rangle}"'] & \widetilde{q}^m jX \arrow[d, "{f\langle a,b,u\rangle}"] \\
(Y,n) \arrow[r, mapsto] & \widetilde{q}^n jY,
\end{tikzcd}$$

$f\langle a,b,u\rangle$ étant défini par le diagramme commutatif
(4.81)

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{q}^{\,m}jX \arrow[d, "f\langle a,b,u\rangle"'] & \widetilde{q}^{\,m+1}jSX \arrow[l, "\widetilde{q}^{\,m}(\eta_{jX}\circ\widetilde{q}(\beta_X))"'] & \widetilde{q}^{\,m+2}jS^2X\ldots \arrow[l, "\widetilde{q}^{\,m+1}(\eta_{jSX}\circ\widetilde{q}(\beta_{SX}))"'] & \widetilde{q}^{\,m+a}jS^aX \arrow[l] \arrow[d, "\widetilde{q}^{\,m+a}ju"] \\
\widetilde{q}^{\,n}jY & \widetilde{q}^{\,n+1}jSY \arrow[l, "\widetilde{q}^{\,n}(\eta_{jY}\circ\widetilde{q}(\beta_Y))"'] & \widetilde{q}^{\,n+2}jS^2Y\ldots \arrow[l, "\widetilde{q}^{\,n+1}(\eta_{jSY}\circ\widetilde{q}(\beta_{SY}))"'] & \widetilde{q}^{\,n+b}jS^bY \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Prouvons que $f\langle a,b,u\rangle$ ne dépend pas du représentant (a,b,u). Soit donc un autre triple (a_1,b_1,u_1) tel que $\langle a_1,b_1,u_1\rangle = \langle a,b,u\rangle$. Il existe alors $c,c_1\in\mathbb{N}$ tels que $a+c=a_1+c_1$ et $S^c(u)=S^{c_1}(u_1)$. Le diagramme commutatif (4.81) nous permet de conclure la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{q}^{\,m}jX \arrow[r, "f\langle a,b,u\rangle"] \arrow[d, "\sim"] \arrow[ddddd, bend right, "\mathrm{id}"'] & \widetilde{q}^{\,n}jY \arrow[d, "\sim"] \arrow[ddddd, bend left, "\mathrm{id}"] \\
\widetilde{q}^{\,m+a}jS^aX \arrow[r, "\widetilde{q}^{\,m+a}ju"] \arrow[d, "\sim"] & \widetilde{q}^{\,n+b}jS^bY \arrow[d, "\sim"] \\
\widetilde{q}^{\,m+a+c}jS^{a+c}X \arrow[r, "\widetilde{q}^{\,m+a+c}jS^cu"] \arrow[d, equal] & \widetilde{q}^{\,n+b+c}jS^{b+c}Y \arrow[d, equal] \\
\widetilde{q}^{\,m+a_1+c_1}jS^{a_1+c_1}X \arrow[r, "\widetilde{q}^{\,m+a_1+c_1}jS^{c_1}u_1"] \arrow[d, "\sim"] & \widetilde{q}^{\,n+b_1+c_1}jS^{b_1+c_1}Y \arrow[d, "\sim"] \\
\widetilde{q}^{\,m+a_1}jS^{a_1}X \arrow[r, "\widetilde{q}^{\,m+a_1}ju_1"] \arrow[d, "\sim"] & \widetilde{q}^{\,n+b_1}jS^{b_1}Y \arrow[d, "\sim"] \\
\widetilde{q}^{\,m}jX \arrow[r, "f\langle a_1,b_1,u_1\rangle"] & \widetilde{q}^{\,n}jY
\end{tikzcd}$$

ce qui donne $f\langle a,b,u\rangle = f\langle a_1,b_1,u_1\rangle$. Le foncteur f ainsi défini, on vérifie aussitôt que $fi=j$. De plus, au moyen des isomorphismes fonctoriels β,η,ζ nous avons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
qf(X,m) \arrow[r, "qf\langle a,b,u\rangle"] \arrow[d, equal] & qf(Y,n) \arrow[d, equal] \\
q\widetilde{q}^{\,m}jX \arrow[d, "\sim"] & q\widetilde{q}^{\,n}jY \arrow[d, "\sim"] \\
q\widetilde{q}^{\,m+a}jS^aX \arrow[r, "q\widetilde{q}^{\,m+a}ju"] \arrow[d, "\sim"] & q\widetilde{q}^{\,n+b}jS^bY \arrow[d, "\sim"] \\
\widetilde{q}^{\,m+a}qjS^aX \arrow[r, "\widetilde{q}^{\,m+a}qju"] \arrow[d, "\sim"] & \widetilde{q}^{\,n+b}qjS^bY \arrow[d, "\sim"] \\
\widetilde{q}^{\,m+a}jS^{a+1}X \arrow[r, "\widetilde{q}^{\,m+a}jSu"] \arrow[d, "\sim"] & \widetilde{q}^{\,n+b}jS^{b+1}Y \arrow[d, "\sim"] \\
\widetilde{q}^{\,m}jSX \arrow[r, "f\langle a,b,Su\rangle"] \arrow[d, equal] & \widetilde{q}^{\,n}jSY \arrow[d, equal] \\
fp(X,m) \arrow[r, "fp\langle a,b,u\rangle"] & fp(Y,n),
\end{tikzcd}$$

i.e., $qf \simeq fp$. Enfin prouvons que f est unique (à isomorphisme fonctoriel prés). Soit $g\colon \underline{\mathcal{P}} \to \underline{\mathcal{Q}}$ un autre foncteur tel que $qg \simeq j$ et $gp \simeq qg$. D'abord remarquons que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
(X,m) \arrow[r, "\langle a,0,\mathrm{id}_{S^aX}\rangle"] \arrow[d, "\langle a,b,u\rangle"'] & (S^aX, a+m) \arrow[d, "\langle 0,0,u\rangle"] \\
(Y,n) \arrow[r, "\langle b,0,\mathrm{id}_{S^bY}\rangle"] & (S^bY, b+n)
\end{tikzcd}$$

est commutatif pour $(X,m),(Y,n)\in\operatorname{Ob}\underline{\mathcal{P}}$, $\langle a,b,u\rangle\in\operatorname{Hom}((X,m),(Y,n))$. Ensuite au moyen des isomorphismes fonctoriels donnés, considérons le diagramme commutatif

$$
\begin{tikzcd}
g(X,m) \arrow[r, "g\langle a,0,\mathrm{id}\rangle"] \arrow[d, "g\langle a,b,u\rangle"'] & g(S^aX,a+m) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "g\langle 0,0,u\rangle"] & \widetilde{q}^{a+m}q^{a+m}g(S^aX,a+m) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\widetilde{q}^{a+m}q^{a+m}g\langle 0,0,u\rangle"] & \widetilde{q}^{a+m}gp^{a+m}g(S^aX,a+m) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\widetilde{q}^{a+m}gp^{a+m}g\langle 0,0,u\rangle"] & \widetilde{q}^{a+m}g(S^{2a+m}X,a+m) \arrow[r, dash, "\widetilde{q}^{a+m}g\langle 0,a+m,\mathrm{id}\rangle"] \arrow[d, "\widetilde{q}^{a+m}\circ\langle 0,0,S^{n+m}u\rangle"] & {} \\
g(Y,n) \arrow[r, "g\langle b,0,\mathrm{id}\rangle"'] & g(S^bY,b+n) \arrow[r, "\sim"'] & \widetilde{q}^{b+n}q^{b+n}g(S^bY,b+n) \arrow[r, "\sim"'] & \widetilde{q}^{b+n}gp^{b+n}(S^bY,b+n) \arrow[r, "\sim"'] & \widetilde{q}^{b+n}g(S^{2b+n}Y,b+n) \arrow[r, dash, "\widetilde{q}^{b+n}g\langle 0,b+n,\mathrm{id}\rangle"'] & {}
\end{tikzcd}
$$

$$\begin{tikzcd}
f(X,m) = \tilde{g}^m jX \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "f\langle a,b,u\rangle"] & \tilde{g}^{a+m} jS^a X \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\tilde{g}^{a+m} ju"] & \tilde{g}^{a+m} giS^a X \arrow[r, equal] \arrow[d, "\tilde{g}^{a+m} giu"] & \tilde{g}^{a+m} g(S^a X, 0) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{g}^{a+m} g\langle 0,0,u\rangle"] & {} \\
f(Y,n) = \tilde{g}^n jY \arrow[r, "\sim"] & \tilde{g}^{b+n} jS^b Y \arrow[r, "\sim"] & \tilde{g}^{b+n} giS^b Y \arrow[r, equal] & \tilde{g}^{b+n} g(S^b Y, 0) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

ce qui permet de conclure que $g \simeq f$. L'assertion est ainsi démontrée. $\square$

Voici une autre variante du triple $(\underline{\mathcal{P}}, i, p)$.

Proposition 4.82. *La catégorie $\underline{\mathcal{P}}$ est équivalente à la catégorie $\underline{\mathcal{P}}'$ définie de la façon suivante*

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ob} \underline{\mathcal{P}}' &= \{(X,m) | X \in \operatorname{Ob} \underline{C}, m \in \mathbb{Z}\} \\
\operatorname{Hom}_{\underline{\mathcal{P}}'}((X,m),(Y,n)) &= \lim_{k\to\infty} \operatorname{Hom}_{\underline{C}}(S^{k+m}X, S^{k+n}Y)
\end{aligned}$$

où k part de la valeur k_0 définie par $k_0 + \min(m,n) = 0$.

Proof. Pour $(X,m),(Y,n) \in \operatorname{Ob} \underline{\mathcal{P}}'$, notons par $\overline{(k,u)}$ la fléche $(X,m) \to (Y,n)$ où $u\colon S^{k+m}X \to S^{k+n}Y$. Ensuite considérons la fonction t de $\underline{\mathcal{P}}$ dans $\underline{\mathcal{P}}'$ définie de la manière suivante:

$$\begin{tikzcd}
(X,m) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\langle a,b,u\rangle"'] & t(X,m)=(X,-m) \arrow[d, "t\langle a,b,u\rangle=\overline{(a+m,u)}"] \\
(Y,n) \arrow[r, mapsto] & t(Y,n)=(Y,-n).
\end{tikzcd}$$

On vérifie aussitôt que t est un foncteur pleinement fidéle. De plus pour chaque objet $(X,m)\in \operatorname{Ob}\underline{\mathcal{P}}'$, on a

$$(X,m)=t(X,-m) \text{ si } m<0$$

$$(X,m) \underset{\overline{(0,\mathrm{id}_{S^mX})}}{\xrightarrow{\sim}} (S^mX,0)=t(S^mX,0) \text{ si } m>0.$$

Par conséquent, t est une équivalence. Enfin considérons le foncteur

$$p'\colon \underline{\mathcal{P}}'\to\underline{\mathcal{P}}'$$

$$\begin{tikzcd}
(X,m) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\overline{(k,u)}"'] & (SX,m) \arrow[d, "\overline{(k,Su)}"] \\
(Y,n) \arrow[r, mapsto] & (SY,n).
\end{tikzcd}$$

on obtient aussitôt $tp=p't$. On en conclut que le triple $(\underline{\mathcal{P}}',i',p')$, avec $i'=ti$, est aussi une solution du problème posé.

□

Dans le cas où le foncteur S est défini par

$$X\mapsto X\otimes Z,$$

Z étant un objet quelconque de $\underline{C}$ différent de l'objet unité $\underline{1}$, on dit que

Definition 4.83. Le tripe $(\underline{\mathcal{P}},i,p)$ est la *catégorie de suspension* de le $\otimes$-catégorie ACU $\underline{C}$ définie par l'objet Z. On retrouve la définition habituelle au cas où $\underline{C}$ est la catégorie homotopique ponctuée $\underline{\mathrm{Htp}}_*$ munie du produit contracté $\wedge$, des contraintes d'associativité, de commutativité, d'unité naturelles; et Z la 1-sphère S^1.

Dans tout ce qui suit du numéro, $(\underline{\mathcal{P}},i,p)$ désigne la catégorie de suspension de la $\otimes$-catégorie ACU $\underline{C}$ définie par l'objet Z. Essayons de définir dans $\underline{\mathcal{P}}$ une loi $\otimes$ et des contraintes d'associativité, de commutativité et d'unité de telle sorte que $\underline{\mathcal{P}}$ en soit une $\otimes$-catégorie ACU, iZ inversible dans $\underline{\mathcal{P}}$, et i immergé dans un couple $(i,\breve{i})$ qui est un $\otimes$-foncteur de la $\otimes$-catégorie ACU $\underline{C}$ dans la $\otimes$-catégorie ACU $\underline{\mathcal{P}}$ compatible avec les contraintes. La chose plus naturelle est de poser

$$(X,m)\otimes(Y,n)=(X\otimes Y,m+n) \tag{4.84}$$

pour $(X, m), (Y, n) \in \operatorname{Ob} \underline{\mathcal{P}}$, et de définir $\langle a_1, b_1, u_1 \rangle \otimes \langle a_2, b_2, u_2 \rangle$ pour $\langle a_1, b_1, u_1 \rangle \colon (X_1, m_1) \to (Y_1, n_1), \langle a_2, b_2, u_2 \rangle \colon (X_2, m_2) \to (Y_2, n_2)$ par le diagramme commutatif

$$
\begin{tikzcd}
((\ldots(X_1 \otimes Z_1) \otimes Z_2 \ldots) \otimes Z_{a_1}) \otimes ((\ldots((X_2 \otimes Z_{a_1+1}) \otimes Z_{a_1+2}) \ldots)) \otimes Z_{a_1+a_2} \arrow[r, "u_1 \otimes u_2"] \arrow[d] & ((\ldots((Y_1 \otimes Z_1) \otimes Z_2) \ldots) \otimes Z_{b_1}) \otimes ((\ldots((Y_2 \otimes Z_{b_1+1}) \otimes Z_{b_1+2}) \ldots)) \otimes Z_{b_1+b_2} \arrow[d] \\
(\ldots((\ldots((X_1 \otimes X_2) \otimes Z_1) \ldots) \otimes Z_{a_1}) \otimes Z_{a_1+1}) \ldots) \otimes Z_{a_1+a_2} \arrow[r, "w"] & (\ldots((\ldots((Y_1 \otimes Y_2) \otimes Z_1) \ldots) \otimes Z_{b_1}) \otimes Z_{b_1+1}) \ldots) \otimes Z_{b_1+b_2}
\end{tikzcd}
\tag{4.85}
$$

en posant

$$\langle a_1, b_1, u_1\rangle \otimes \langle a_2, b_2, u_2\rangle = \langle a_1 + a_2, b_1 + b_2, w\rangle \tag{4.86}$$

les flèches verticals du diag. (4.85) étant construites à l'aide des flèches d'associativité, de commutativité et d'identité; et les Z_i dans ce diagramme tous égaux à Z. Ici nous devons prouver que le produit tensoriel des flèches ainsi défini ne dépend pas des représentants $(a_1, b_1, u_1), (a_2, b_2, u_2)$. Or l'exemple qui suit nous montre qu'il n'en est rien. Considérons le cas où $\underline{C}$ est la catégorie des R-modules munie de la loi $\oplus$ somme directe, R étant un anneau unitaire qulconque. Soient

$$\begin{aligned} \langle 1, 1, f_1 \oplus g_1\rangle &\ :\ (X_1, 0) \to (Y_1, 0) \\ \langle 1, 1, f_2 \oplus g_2\rangle &\ :\ (X_2, 0) \to (Y_2, 0). \end{aligned}$$

Alors, en vertu de la formule (4.86),

$$\langle 1, 1, f_1 \oplus g_1\rangle \otimes \langle 1, 1, f_2 \oplus g_2\rangle = \langle 2, 2, w\rangle,$$

avec w défini par le diagramme commutatif (4.85), qui est ici l'homomorphisme de R-modules suivant

$$w\colon X_1 \otimes X_2 \otimes Z \otimes Z \to Y_1 \otimes Y_2 \otimes Z \otimes Z,$$

$$(x_1, x_2, z_1, z_2) \mapsto (f_1x_1, f_2x_2, g_1z_1, g_2z_2).$$

Or $\langle 1, 1, f_1 \oplus g_1\rangle = \langle 2, 2, f_1 \oplus g_1 \oplus \mathrm{id}_Z\rangle$ et $\langle 2, 2, f_1 \oplus g_1 \oplus \mathrm{id}_Z\rangle \oplus \langle 1, 1, f_2 \oplus g_2\rangle = \langle 3, 3, w\rangle$ avec

$$w\colon X_1 \oplus X_2 \oplus Z \oplus Z \oplus Z \to Y_1 \oplus Y_2 \oplus Z \oplus Z \oplus Z$$

$$(x_1, x_2, z_1, z_2, z_3) \mapsto (f_1x_1, f_2x_2, g_1z_1, z_2, g_2z_3).$$

Regardons $\langle 2, 2, w\rangle$. Nous avons

$$\langle 2, 2, w\rangle = \langle 3, 3, w \oplus \mathrm{id}_Z\rangle,$$

où $w \oplus \mathrm{id}_Z$ est l'homomorphisme

$$w \oplus \mathrm{id}_Z\colon X_1 \oplus X_2 \oplus Z \oplus Z \oplus Z \to Y_1 \oplus Y_2 \oplus Z \oplus Z \oplus Z$$

$$(x_1, x_2, z_1, z_2, z_3) \mapsto (f_1x_1, f_2x_2, g_1z_1, g_2z_2, z_3).$$

Pour $Z \neq 0$ et $g_2 \neq \mathrm{id}_Z$, on a bien $w \oplus \mathrm{id}_Z \neq w$ et par suite $\langle 3, 3, w \oplus \mathrm{id}_Z\rangle \neq \langle 3, 3, w\rangle$, ce qui montre que le produit tensoriel des flèches défini par (4.86) dépend des représentants $(a_1, b_1, u_1), (a_2, b_2, u_2)$ dans le cas de la catégorie des R-modules munie de la loi $\oplus$ somme directe. On peut vérifier qu'il en est de même de la catégorie homotopique ponctuée $\underline{\mathrm{Htp}}_*$ munie du produit contracté $\wedge$.

Revenons au cas général. L'exemple ci-desous nous montre qu'on n peut pas définir un produit tensoriel dans $\underline{\mathcal{P}}$ par les formules (4.84) et (4.86) quand le fléche de symétrie canonique $c_{2,2}$ est différente de l'identité. Si nous supposons $c_{2,2} = \mathrm{id}_{Z\otimes Z}$, alors nous pouvons vérifier que le produit tensoriel des flèches défini par la formule (4.86) ne dépend pas effectivement des représentants $(a_1, b_1, u_1), (a_2, b_2, u_2)$, que la catégorie $\underline{\mathcal{P}}$ munie de cette loi $\otimes$ est bien une $\otimes$-catégorie ACU avec les contraintes venant de façon naturelle des contraintes de la $\otimes$-catégorie ACU $\underline{C}$, et enfin que iZ est inversible dans $\underline{\mathcal{P}}$ puisque le foncteur p est une équivalence. D'où la proposition:

Proposition 4.87. *Soient $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte* ACU*: $(a, c, (\underline{1}, g, d))$, Z un objet de $\underline{C}$, $\mathcal{L}$ la partie multiplicative de $\underline{C}$ engendrée par la fléche de symétrie canonique $c_{Z,Z}$, $\underline{C}^{\mathcal{L}}$ la $\otimes$-catégorie quotient de $\underline{C}$ définie par $\mathcal{L}$, munie de la contrainte* ACU*: $(\bar{a}, \bar{c}, (\underline{1}, \bar{g}, \bar{d}))$ (Définition* 4.5 *et Proposition* 4.6*), et $(\underline{\wp}, j, \pi)$ la catégorie des suspension de la $\otimes$-catégorie* ACU *$\underline{C}^{\mathcal{L}}$ définie par l'objet Z. Alors:*

La catégorie $\underline{\wp}$ munie de la loi $\otimes$ définie par les formules (4.84) *et* (4.86)*, et des contraintes d'associativité $\langle 0, 0, \bar{c}\rangle$ et d'unité $((\underline{1}, 0), \langle 0, 0, \bar{g}\rangle, \langle 0, 0, \bar{d}\rangle)$ est une $\otimes$-catégorie* ACU*. Le couple $(j, \check{j} = \mathrm{id})$ est un $\otimes$-foncteur* ACU *et jZ est inversible dans $\underline{\wp}$.*

Remark 4.88. Les hypothèses étant celles de la Proposition 4.87 et $(\underline{\mathcal{P}}, i, p)$ désignant toujours la catégorie de suspension de $\underline{C}$ définie par Z, on peut décrire la catégorie $\underline{\wp}$ de la façon suivante:

$$\mathrm{Ob}\,\underline{\wp} = \mathrm{Ob}\,\underline{\mathcal{P}}$$

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\wp}}((X, m), (Y, n)) = \{[a, b, u] | a, b \in \mathbb{N}, a + m = b + n, u\colon S^a \to S^b Y\}$$

où $[a_1, b_1, u_1] = [a_2, b_2, u_2]$ si et seulement s'il existe $c_1, c_2 \in \mathbb{N}$ tels que $a_1+c_1 = a_2+c_2$ et $S^{c_1}u_1 = S^{c_2}u_2$ dans $\underline{C}^{\mathcal{L}}$ (pas dans $\underline{C}$ comme le cas de $\underline{\mathcal{P}}$, ce qui fait la différence de $\underline{\wp}$ avec $\underline{\mathcal{P}}$).

Soient $(H, \check{H})$ le $\otimes$-foncteur canonique de $\underline{C}$ dans $\underline{C}^{\mathcal{L}}$ (Définition 4.5) et $(\iota, \check{\iota}) = (j, \check{j}) \circ (H, \check{H})\colon \underline{C} \to \underline{\wp}$.

Proposition 4.89. *Il existe un foncteur f unique (à isomorphisme fonctoriel près) de $\underline{\mathcal{P}}$ dans $\underline{\wp}$ tel que $fi \simeq \iota$ et $fp \simeq \pi f$. Le foncteur f n'est pas fidèle quand la flèche de symétrie canonique $c_{Z,Z}$ est différente de l'identité* $\mathrm{id}_{Z\otimes Z}$.

Proof. D'abord remarquons que le triple $(\underline{\wp}, \iota, \pi)$ vérifie la condition (1) du problème posé, i.e., $\iota S = \pi\iota$ et π est une équivalence. Ensuite considérons le foncteur $f\colon \underline{\mathcal{P}} \to$

$\underline{\wp}$ défini par

$$\begin{tikzcd} (X,m) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\langle a,b,u\rangle"'] & (X,m) \arrow[d, "{[a,b,u]}"] \\ (Y,n) \arrow[r, mapsto] & (Y,n). \end{tikzcd}$$

On vérifie aussitôt que

$$fi = \iota, \quad fp = \pi f.$$

D'où l'unicité de f définie à isomorphisme fonctoriel près (Proposition 4.6). La description de la catégorie $\underline{\wp}$ dans la remarque ci-dessus nous montre immédiatement que le foncteur f n'est pas fidèle pour $c_{Z,Z} \neq \mathrm{id}_{Z,Z}$. $\square$

Nous allons voir s'il est possible de munir la catégorie de suspension $\underline{\mathcal{P}}$ de $\underline{C}$ définie par Z d'une loi $\otimes$ (définie autrement que par les formules (4.84) et (4.86) pusiqu'on y a échoué) et des contraintes de telle sorte que $\underline{\mathcal{P}}$ en soit une $\otimes$-catégorie ACU, iZ inversible dans $\underline{\mathcal{P}}$ et i immergé dans une couple $(i, \check{i})$ qui est un $\otimes$-foncteur ACU de $\underline{C}$ dans $\underline{\mathcal{P}}$. Pour cela posons la définition suivante:

Definition 4.90. Une sous-catégorie $\underline{A}$ d'une $\otimes$-catégorie ACU $\underline{C}$ est $\otimes$-*stable* si elle vérifie:

(1) $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}$, $u_1\colon A_1 \to B_1, u_2\colon A_2 \to B_2 \in \mathrm{Fl}\,\underline{A} \implies A_1 \otimes A_2 \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}$, $B_1 \otimes B_2 \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}$ et $u_1 \otimes u_2\colon A_1 \otimes A_2 \to B_1 \otimes B_2 \in \mathrm{Fl}\,\underline{A}$.
(2) $\underline{1} \in \mathrm{Ob}\,\underline{A}$, et $A \in \mathrm{Ob}\,\underline{A} \implies g_A, g_A^{-1}, d_A, d_A^{-1} \in \mathrm{Fl}\,\underline{A}$.
(3) $A_1, A_2, A_3 \in \mathrm{Ob}\,\underline{A} \implies c_{A_1,A_2}, a_{A_1,A_2,A_3}, a^{-1}_{A_1,A_2,A_3} \in \mathrm{Fl}\,\underline{A}$, $(a, c, (\underline{1}, g, d))$ étant la contrainte ACU de $\underline{C}$.

Tout sous-ensemble $\mathcal{B}$ de $\mathrm{Ob}\,\underline{C}$ est contenue dans une sous-catégorie $\otimes$-stable $\underline{\mathcal{B}}$ telle que, si $\underline{A}$ est une sous-catégorie $\otimes$-stable et $\underline{A} \supset \mathcal{B}$, alors $\underline{A} \supset \underline{\mathcal{B}}$. $\underline{\mathcal{B}}$ est dite sous-catégorie $\otimes$-stable *engendrée* par $\mathcal{B}$. C'est un groupoïde dont les objets son les produits tensoriels des objets appartenant à $\mathcal{B} \cup \{\underline{1}\}$, et dont les flèches sont les produits tensoriels des flèches de la forme $a, a^{-1}, c, c^{-1}, g, g^{-1}, d, d^{-1}, \mathrm{id}$. La catégorie $\underline{\mathcal{B}}$ est évidemment une $\otimes$-catégorie ACU, la loi $\otimes$ et les contraintes de $\underline{\mathcal{B}}$ étant celles de $\underline{C}$.

Cela étant, revenons à notre problème. Soit $\underline{C}'$ la sous-catégorie $\otimes$-stable de $\underline{C}$ engendrée par $\{Z\}$. Les objets de $\underline{C}'$ sont donc les produits tensoriels des objets appartenant à $\{\underline{1}, Z\}$. Soit

$$(F, \check{F})\colon \underline{C}' \to \underline{C}$$

le $\otimes$-foncteur ACU de $\underline{C}'$ dans $\underline{C}$ défini par

$$FX' = X', \quad \check{F}_{X',Y'} = \mathrm{id}_{X'\otimes Y'}$$

pour $X', Y' \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}'$. Désignons par $\underline{P}$ la $\otimes$-catégorie de fractions de $\underline{C}$ définie par $(\underline{C}', (F, \check{F}))$ et par $(\mathcal{D}, \check{\mathcal{D}})$ le $\otimes$-foncteur canonique (Définition 4.62). En vertu de § 4.2.1, $\underline{P}$ es la catégorie suivante

$$\mathrm{Ob}\,\underline{P} = \{(X, X')|X \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}, X' \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}'\}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\underline{P}}((X, X'), (Y, Y')) \;=\; & \{[A', B', (u, u')]|A', B' \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}', \\ & (u, u')\colon (X \otimes A', X' \otimes A') \to (Y \otimes B', Y' \otimes B')\}\end{aligned}$$

où $[A'_1, B'_1, (u_1, u'_1)] = [A'_2, B'_2, (u_2, u'_2)]$ si et seulement s'il existe des objets C'_1, C'_2 et des isomorphismes $u'\colon A_1 \otimes C'_1 \to A_2 \otimes C'_2, v'\colon B'_1 \otimes C'_1 \to B'_2 \otimes C'_2$ de $\underline{C}'$ tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes (A'_1 \otimes C'_1), X' \otimes (A'_1 \otimes C'_1)) \arrow[r, "(a,a)"] \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes u', \mathrm{id}\otimes u')"'] & ((X \otimes A'_1) \otimes C'_1, (X' \otimes A'_1) \otimes C'_1) \arrow[r, "(u_1\otimes\mathrm{id}, u'_1\otimes\mathrm{id})"] & ((Y \otimes B'_1) \otimes C'_1, (Y' \otimes B'_1) \otimes C'_1) \\
(X \otimes (A'_2 \otimes C'_2), X' \otimes (A'_2 \otimes C'_2)) \arrow[d, "(a,a)"'] & & (Y \otimes (B'_1 \otimes C'_1), Y' \otimes (B'_1 \otimes C'_1)) \arrow[u, "(a,a)"'] \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes v', \mathrm{id}\otimes v')"] \\
((X \otimes A'_2) \otimes C'_2, (X' \otimes A'_2) \otimes C'_2) \arrow[r, "(u_2\otimes\mathrm{id}, u'_2\otimes\mathrm{id})"] & ((Y \otimes B'_2) \otimes C'_2, (Y' \otimes B'_2) \otimes C'_2) & (Y \otimes (B'_2 \otimes C'_2), Y' \otimes (B'_2 \otimes C'_2)) \arrow[l, "(a,a)"']
\end{tikzcd}$$

soit commutatif dans $(\underline{C} \times \underline{C}')^{\mathcal{S}}$, $\mathcal{S}$ étant la partie multiplicative de $\underline{C} \times \underline{C}'$ engendrée par l'endomorphisme $(c_{Z,Z}, c_{Z,Z})$.

Considérons le foncteur $R\colon \underline{P} \to \underline{P}$ défini par

$$(X, X') \mapsto (X, X') \otimes (Z, \underline{1}).$$

R est bien une équivalence pusique $(Z, \underline{1})$ est inversible dans $\underline{P}$. Ensuite étudions le foncteur $\mathcal{G}\colon \underline{\mathcal{P}} \to \underline{P}$ donné par

$$\begin{tikzcd}
(X, m) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\langle \alpha, \beta, u \rangle"'] & (X, \underset{m}{\otimes} Z) \arrow[d, "{[\underset{\alpha}{\otimes} Z, \underset{\beta}{\otimes} Z, (\check{u}, \mathring{u})]}"] \\
(Y, n) \arrow[r, mapsto] & (Y, \underset{n}{\otimes} Z)
\end{tikzcd}$$

où

$$\begin{aligned}\underset{m}{\otimes} Z &= (\dots(Z \otimes Z) \otimes Z \dots) \otimes Z \quad \text{si } m > 0 \\ \underset{m}{\otimes} Z &= \underline{1} \quad \text{si } m = 0\end{aligned}$$

(il en de même de $\underset{n}{\otimes}Z, \underset{\alpha}{\otimes}Z, \underset{\beta}{\otimes}Z$). $\check{u}$ est défini par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(\dots((X \otimes \underbrace{Z) \otimes Z)\dots) \otimes Z}_{\alpha \text{ fois}} \arrow[r, "u"] \arrow[d] & (\dots((Y \otimes \underbrace{Z) \otimes Z)\dots) \otimes Z}_{\beta \text{ fois}} \arrow[d] \\
X \otimes (\underset{\alpha}{\otimes}Z) \arrow[r, "\check{u}"] & Y \otimes (\underset{\beta}{\otimes}Z)
\end{tikzcd}$$

lef flèches verticales étant construits à l'aide de la contrainte d'associativité uniquement et dans le cas où $\alpha = 0$ (resp. $\beta = 0$) de la flèche $d_X \colon X \to X \otimes \underline{1}$ (resp. $d_Y \colon Y \to Y \otimes \underline{1}$); $\mathring{u}$ est la flèche

$$(\underset{m}{\otimes}Z) \otimes (\underset{\alpha}{\otimes}Z) \xrightarrow{\mathring{u}} (\underset{n}{\otimes}Z) \otimes (\underset{\beta}{\otimes}Z)$$

construite à l'aide des contraintes d'associativité et d'unité.

Le foncteur $\mathcal{G}$ n'est pas en général fidèle. Prenons l'exemple suivant:

Soit $\underline{C}$ la catégorie de R-modules (R étant un anneau unitaire quelconque) munie de la loi $\oplus$ somme directe, les contraintes d'associativité, de commutativité, d'unité étant les contraintes habituelles. Soit Z un R-module quelconque différent de 0. Considérons dans $\underline{\mathcal{P}}$ les deux flèches suivantes:

$$\langle 4, 4, c_{Z,Z} \oplus \mathrm{id}_{Z,Z}\rangle, \langle 4, 4, \mathrm{id}_{Z,Z} \oplus c_{Z,Z}\rangle \colon (0,0) \to (0,0)$$

où

$$c_{Z,Z} \oplus \mathrm{id}_{Z,Z} \colon Z \oplus Z \oplus Z \oplus Z \to Z \oplus Z \oplus Z \oplus Z, (z_1, z_2, z_3, z_4) \mapsto (z_2, z_1, z_3, z_4)$$

$$\mathrm{id}_{Z,Z} \oplus c_{Z,Z} \colon Z \oplus Z \oplus Z \oplus Z \to Z \oplus Z \oplus Z \oplus Z, (z_1, z_2, z_3, z_4) \mapsto (z_1, z_2, z_{43}, z_3).$$

Nous avons bien

$$\langle 4, 4, c_{Z,Z} \oplus \mathrm{id}_{Z,Z}\rangle \neq \langle 4, 4, \mathrm{id}_{Z,Z} \oplus c_{Z,Z}\rangle.$$

Considérons les images de ces flèches par $\mathcal{G}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}\langle 4, 4, c_{Z,Z} \oplus \mathrm{id}_{Z,Z}\rangle &= \langle Z \oplus Z \oplus Z \oplus Z, Z \oplus Z \oplus Z \oplus Z, (c_{Z,Z} \oplus \mathrm{id}_{Z,Z}, \mathrm{id}_{Z\oplus Z\oplus Z\oplus Z})\rangle \\
\mathcal{G}\langle 4, 4, \mathrm{id}_{Z,Z} \oplus c_{Z,Z}\rangle &= \langle Z \oplus Z \oplus Z \oplus Z, Z \oplus Z \oplus Z \oplus Z, (\mathrm{id}_{Z,Z} \oplus c_{Z,Z}, \mathrm{id}_{Z\oplus Z\oplus Z\oplus Z})\rangle.
\end{aligned}$$

Or le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(Z \oplus Z \oplus Z \oplus Z, Z \oplus Z \oplus Z \oplus Z) \arrow[r, "(c_{Z,Z}\oplus \mathrm{id}_{Z,Z}, \mathrm{id}_{Z\oplus Z\oplus Z\oplus Z})"] \arrow[d, swap, "(c_{Z\oplus Z, Z\oplus Z}, c_{Z\oplus Z, Z\oplus Z})"] & (Z \oplus Z \oplus Z \oplus Z, Z \oplus Z \oplus Z \oplus Z) \arrow[d, "(c_{Z\oplus Z, Z\oplus Z}, c_{Z\oplus Z, Z\oplus Z})"] \\
(Z \oplus Z \oplus Z \oplus Z, Z \oplus Z \oplus Z \oplus Z) \arrow[r, "(\mathrm{id}_{Z\oplus Z}\oplus c_{Z,Z}, \mathrm{id}_{Z\oplus Z\oplus Z\oplus Z})"] & (Z \oplus Z \oplus Z \oplus Z, Z \oplus Z \oplus Z \oplus Z)
\end{tikzcd}$$

est commutatif dans $\underline{C} \times \underline{C}'$, et a fortiori dans $(\underline{C} \times \underline{C}')^{\mathcal{S}}$, ce qui montre que

$$\mathcal{G}\langle 4, 4, c_{Z,Z} \oplus \mathrm{id}_{Z\oplus Z}\rangle = \mathcal{G}\langle 4, 4, \mathrm{id}_{Z\oplus Z} \oplus c_{Z,Z}\rangle.$$

Cet exemple peut s'appliquer dans la catégorie homotopique ponctuée $\underline{\mathrm{Htp}}_*$ où l'on prend pour Z la 1-sphère S^1.

Ces considérations faites, nous pouvons énoncer la proposition suivante:

Proposition 4.91. *Soient $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie* ACU*, Z un objet quelconque de $\underline{C}$ différent de l'objet unité $\underline{1}$, $\underline{C}'$ la sous-catégorie $\otimes$-stable de $\underline{C}$ engendrée par Z, $(F, \check{F})\colon \underline{C}' \to \underline{C}$ le foncteur* ACU *de $\underline{C}'$ dans $\underline{C}$ défini par $FX' = X'$, $\check{F}_{X',Y'} = \mathrm{id}_{X\otimes Y}$, $(\underline{\mathcal{P}}, i, p)$ la catégorie de suspension de $\underline{C}$ défini par Z, $(\underline{P}, (\mathcal{D}, \check{\mathcal{D}}))$ la catégorie de fractions de $\underline{C}$ défini par $(\underline{C}', (F, \check{F}))$, et $\mathcal{G}$ le foncteur de $\underline{\mathcal{P}}$ dans $\underline{P}$ défini par*

$$\begin{tikzcd}
(X, m) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "{\langle \alpha, \beta, u\rangle}"'] & (X, \underset{m}{\otimes} Z) \arrow[d, "{[\underset{\alpha}{\otimes} Z, \underset{\beta}{\otimes} Z, (\check{u}, \mathring{u})]}"] \\
(Y, n) \arrow[r, mapsto] & (Y, \underset{n}{\otimes} Z).
\end{tikzcd}$$

Si le foncteur $\mathcal{G}$ n'est pas fidèle, alors il est impossible de construire dans la catégorie de suspension $\underline{\mathcal{P}}$ une lois $\otimes$ de telle sorte que $\underline{\mathcal{P}}$ en soit une $\otimes$-catégorie ACU*, l'équivalence $p\colon \underline{\mathcal{P}} \to \underline{\mathcal{P}}$ le foncteur $(X, m) \mapsto (X, m) \otimes iZ$, et le foncteur i immergé dans une couple $(i, \check{i})$ qui est un $\otimes$-foncteur* ACU *de $\underline{C}$ dans $\underline{\mathcal{P}}$.*

Proof. Supposons que $\underline{\mathcal{P}}$ soit munie d'une loi $\otimes$ et des contraintes de telle sorte que $\underline{\mathcal{P}}$ en soit une $\otimes$-catégorie ACU, l'équivalence $p\colon \underline{\mathcal{P}} \to \underline{\mathcal{P}}$ le foncteur $(X, m) \mapsto (X, m) \otimes iZ$, ce qui implique que iZ est inversible dans $\underline{\mathcal{P}}$, et le foncteur i immergé dans une couple $(i, \check{i})$ qui est un $\otimes$-foncteur ACU de $\underline{C}$ dans $\underline{\mathcal{P}}$. En vertu de la Proposition 4.56, il existe un $\otimes$-foncteur $(E', \check{E}')$ de $\underline{P}$ dans $\underline{\mathcal{P}}$ tel que $(i, \check{\imath}) \simeq (E', \check{E}') \circ (\mathcal{D}, \check{\mathcal{D}})$, et par suite

$$i \simeq E'\mathcal{D}. \tag{4.92}$$

D'autre part la définition des foncteurs $\mathcal{D}, i, \mathcal{G}, p, R$ nous donne

$$\mathcal{G}i = \mathcal{D} \tag{4.93}$$

$$R\mathcal{G} \simeq \mathcal{G}p \tag{4.94}$$

et compte tenu en plus de (4.92)

$$\begin{aligned} E'R(X,X') &= E'((X,X')\otimes \mathcal{D}Z) \underset{\breve{E}'}{\simeq} E'(X,X')\otimes E'\mathcal{D}Z \\ &\simeq E'(X,X')\otimes iZ = pE'(X,X') \end{aligned}$$

pour tout $(X,X')\in \operatorname{Ob}\underline{P}$. Donc

(4.95) $$E'R \simeq pE'.$$

On en déduit de (4.92), (4.93), (4.94) et (4.95)

$$E'\mathcal{G}i \simeq i, \quad pE'\mathcal{G} \simeq E'\mathcal{G}p.$$

D'où, en appliquant la Proposition 4.80

$$E'\mathcal{G} \simeq \mathrm{id}_{\underline{\mathcal{P}}},$$

i.e., $\mathcal{G}$ est un foncteur fidèle, ce qui est contraire à l'hypothèse. □

References

[1] Bass, H.: K-theory and stable algebra. Publ. Math. IHES, no. 22.
[2] Bénabou, J. Thése, Paris 1966.
[3] Bourbaki. Theorie d'ensembles
[4] ——— Algèbre commutative
[5] ——— Algèbre multilinéaire.
[6] Deligne, P. Champs de Picard strictement commutatifs. SGA 4 XVIII
[7] Eilenberg, S. et Kelly, G.M.: Closed category. Proceedings of the conference on categorical algebra (421-561), Springer Verlag 1965.
[8] Freyd, P. Stable homotopy. Proceedings of the conference on categorical algebra (121-176), Springer Verlag 1965.
[9] Grothendieck, A. Biextensions de faisceaux de groupes, SGA 7, Exposé VII.
[10] ——— Catégories cofibrées additives et complexe cotangent relatif. Lect. Notes in Math. 79, Springer Verlag 1968.
[11] Mac-Lane, S. Categorical Algebra. Bull. Amer. Math. Soc. 71 (1965)
[12] ——— Homology. Springer Verlag 1967.
[13] Mitchell, B.: Theory of categories. Academic Press. New York and London 1965.
[14] Neantro Saavedra-Rivano. Thése, Paris 1970?
[15] ——— Catégories Tanakiennes. Lect. Notes in Math. 265, Springer Verlag 1972.
[16] Spanier, E. Algebraic Topology. Mac-Graw Hill Inc. 1966.

Institut pédagogique no. 2 de Hanoi, Département de mathématiques