Sorbonne Université, Algèbre 2, année 2025-2026

Feuille de TD numéro 1 : groupes

Exercice 1. Les couples suivants sont-ils des groupes ?

- $(\mathbb{N}, +)$;
- $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}), \times)$ et $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$ où $\times$ désigne la multiplication matricielle ;
- $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}), +)$ et $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), +)$ où $+$ désigne l'addition matricielle.

Exercice 2. On munit l'intervalle $I =]-1, +\infty[$ de la loi $*$ définie par la formule

$$x * y = xy + x + y.$$

(1) Montrer que $(I, *)$ est un groupe.

(2) Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to I$ définie par $f(x) = e^x - 1$ est un isomorphisme de groupes.

Exercice 3. Montrer que les groupes $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Q}^*, \times)$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 4.

(1) L'ensemble $\{-1, 1\}$ est-il un sous-groupe de $(\mathbb{Q}, +)$? de $(\mathbb{Q}^*, \times)$?

(2) Montrer que l'ensemble $H = \{x + i\sqrt{3}y \mid x, y \in \mathbb{Q},\ x \neq 0 \text{ ou } y \neq 0\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Exercice 5. Montrer que l'application exp est un morphisme de groupes de $(\mathbb{C}, +)$ vers $(\mathbb{C}^*, \times)$, puis calculer son image et son noyau.

Exercice 6.

Soit $(G, *)$ un groupe dont on note e l'élément neutre. On suppose que, pour tout $g \in G$, $g^2 = e$. Montrer que G est commutatif.

Exercice 7.

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne associative $*$ qui possède un élément neutre e (autrement dit, $(E, *)$ est un monoïde). Pour $x, y \in E$, on dit que x est un *inverse à gauche* de y, et que y est un *inverse à droite* de x, si $x * y = e$. On suppose que tout élément de E possède un inverse à gauche. Montrer que tout élément de E possède un inverse à droite qui coïncide avec son inverse à gauche et en déduire que $(E, *)$ est un groupe.

Exercice 8.

Donner un exemple d'un ensemble E muni d'une loi de composition interne associative avec élément neutre, d'un élément x de E qui possède un inverse à droite mais pas à gauche et d'un élément y de E qui possède un inverse à gauche mais pas à droite.

Exercice 9. Soit $(G, *)$ un groupe, soit H un sous-ensemble de G.

(1) On suppose que H est fini, non vide, et stable sous la loi de G (autrement dit, pour tous $h, h' \in H$, $h * h' \in H$). Montrer que H est un sous-groupe de G.

(2) Montrer que le résultat de la question précédente n'est plus valide si on ne suppose plus que H est fini.

Exercice 10. Soit G un groupe (pour alléger les notations, on ne fait plus apparaître la loi de composition interne) et soient H, K deux sous-groupes de G. Démontrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si H est contenu dans K ou K est contenu dans H.

Exercice 11. Soit G un groupe dont on note e l'élément neutre. Un élément $g \in G$ est dit *d'ordre fini* s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $g^n = e$. On note H le sous-ensemble de G composé des éléments d'ordre fini.

(1) On suppose que G est commutatif. Montrer que H est un sous-groupe de G.

(2) Montrer que H n'est pas un sous-groupe de G en général. On pourra par exemple considérer les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12. Soit G un groupe. On veut démontrer l'énoncé suivant : G est fini si et seulement si G n'a qu'un nombre fini de sous-groupes.

(1) On suppose que G est fini. Montrer que G n'a qu'un nombre fini de sous-groupes.

(2) On suppose que G est infini. Montrer que G possède une infinité de sous-groupes.

Exercice 13. Soient G un groupe fini et H un sous-groupe de G. On définit une relation $\sim$ sur G par $g \sim g'$ si et seulement si $g^{-1}g'$ appartient à H.

(1) Démontrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur G.

(2) En déduire que le cardinal de H divise celui de G (c'est le théorème dit de Lagrange).

Exercice 14.

(1) Soit G un sous-groupe fini de $\mathbb{C}^*$ de cardinal n. Montrer que G est l'ensemble des racines $n$ièmes de l'unité.

(2) Donner un exemple de groupe de cardinal infini dont tous les éléments sont d'ordre fini.

Exercice 15. Soit $n \geq 1$ un entier. Déterminer tous les morphismes de groupes injectifs de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ vers $(\mathbb{C}, +)$ puis vers $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Exercice 16. Soit G un groupe fini de cardinal n et soit φ un morphisme de G vers $\mathbb{C}^*$. Montrer que si φ n'est pas le morphisme trivial alors $\sum_{g \in G} \varphi(g) = 0$.