Sorbonne Université, Algèbre 2, année 2025-2026

Feuille de TD numéro 2 : anneaux et corps

Exercice 1.

(1) Vérifier que $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau.

(2) Montrer que cet anneau n'est ni commutatif ni intègre.

Exercice 2.

(1) Tout sous-anneau d'un anneau est-il un idéal ?

(2) Tout idéal d'un anneau est-il un sous-anneau ?

(3) Quels sont les sous-anneaux de $(\mathbb{Z}, +, \times)$? Quels sont ses idéaux ?

(4) Quels sont les idéaux d'un corps ?

Exercice 3.

(1) Montrer que l'ensemble des nombres décimaux, $\mathbb{D} = \{n/10^k \mid n \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\}$, muni de l'addition et de la multiplication, est un anneau.

(2) Déterminer ses inversibles.

Exercice 4. Soit A un anneau. On appelle centre de A et l'on note $Z(A)$ l'ensemble des éléments $a \in A$ tels que, pour tout $b \in A$, $ab = ba$. Démontrer que $Z(A)$ est un sous-anneau de A.

Exercice 5. Soit A un anneau fini. Démontrer que A est intègre si et seulement si A est un corps (on pourra considérer l'application $\varphi_a : x \in A \mapsto ax \in A$ pour $a \neq 0$ fixé).

Exercice 6. Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{Q}$. Démontrer que $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.

Exercice 7. Soit A un anneau.

(1) Prouver qu'il existe un unique morphisme d'anneaux $\varphi : \mathbb{Z} \to A$.

(2) Montrer qu'il existe un entier $n \geq 0$ tel que $\ker(\varphi) = n\mathbb{Z}$, puis que si A est intègre alors n est premier ou nul.

(3) On suppose que $n = 0$ et que A est un corps. Démontrer que A contient un sous-corps isomorphe à $\mathbb{Q}$.

Exercice 8. Soient $\mathbb{K}, \mathbb{K}'$ des corps, et soit $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{K}'$ un morphisme de corps. Montrer que φ est injectif.

Exercice 9. Démontrer que l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement s'il est intègre si et seulement si n est premier.

Exercice 10. Soit A un anneau intègre et $a \in A$. Montrer que l'équation $x^2 = a$ possède au plus deux solutions dans A, puis montrer que ce n'est plus vrai si A n'est pas intègre.

Exercice 11. On définit $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$.

(1) Démontrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est un sous-corps de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

(2) Démontrer que l'application $\varphi : \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ qui envoie $x + y\sqrt{2}$ sur $x - y\sqrt{2}$ est un automorphisme de corps.

(3) Démontrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est isomorphe à $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - 2)$.

(4) Démontrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension 2 et en donner une base.

Exercice 12. Le but de cet exercice est d'illustrer l'utilité des anneaux dans la résolution de problèmes arithmétiques, ici la détermination des solutions des équations de Pell-Fermat $x^2 - 2y^2 = \pm 1$. On définit $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$. Pour $u = x + y\sqrt{2}$, on pose $\bar{u} = x - y\sqrt{2}$ et $N(u) = u\bar{u}$.

(1) Démontrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$. Est-ce un sous-corps ?

(2) Démontrer que, pour tous $u, v \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, on a $N(uv) = N(u)N(v)$.

(3) Démontrer qu'un élement $u \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est inversible si et seulement si $N(u) = \pm 1$.

(4) Démontrer que le groupe des inversibles $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^*$ est infini. Nous allons préciser sa structure dans les questions suivantes.

(5) Soit $u = x + y\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]^*$ tel que $u > 1$. Démontrer que $-1 < \bar{u} < 1$ puis en déduire que $x \geq 1$ et $y \geq 1$.

(6) Plus difficile : montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^*$ est isomorphe à $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (il s'agit d'un cas particulier d'un théorème beaucoup plus général appelé théorème des unités de Dirichlet).

(7) En déduire que $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ est solution de l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$ (respectivement $x^2 - 2y^2 = -1$) si et seulement si $x + y\sqrt{2} = \pm(1 + \sqrt{2})^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$ pair (respectivement $n \in \mathbb{Z}$ impair).

Exercice 13. Déterminer le groupe des inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ (s'inspirer de l'exercice précédent).

Exercice 14. Soit φ un automorphisme de corps de $\mathbb{R}$.

(1) Montrer que $\varphi(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$.

(2) Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$. Montrer que $\varphi(x) \leq \varphi(y)$.

(3) Montrer que φ est l'identité de $\mathbb{R}$.

(4) Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un élément $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{K}$ tel que α^2 appartienne à $\mathbb{K}$. On définit $K[\alpha] = \{x + y\alpha \mid x, y \in \mathbb{K}\}$. Peut-on avoir $K[\alpha] = \mathbb{R}$?

Exercice 15. Soit $\mathbb{K}$ un corps.

(1) Soit $a \in \mathbb{K}$. Prouver que l'anneau $\mathbb{K}[X]/(X - a)$ est isomorphe à $\mathbb{K}$.

(2) Montrer que l'anneau $\mathbb{K}[X]/(X^n)$ n'est pas intègre si $n \geq 2$.

(3) Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{K}[X]/(X^2)$.

Exercice 16. Soit A un anneau commutatif, soit I un idéal de A. On dit que I est maximal s'il est propre (i.e., différent de A) et s'il est maximal pour l'inclusion parmi les idéaux propres de A. On appelle *idéal engéndré par une partie* $P \subset A$ le plus petit idéal de A (pour l'inclusion) qui contient P. Plus explicitement, cet idéal est l'ensemble des sommes de la forme $a_1p_1 + \cdots + a_np_n$ avec $n \geq 1$, $a_i \in A$ et $p_i \in P$.

(1) On suppose que I est maximal. Montrer que A/I est un corps.

(2) On suppose que A/I est un corps. Montrer que I est maximal.

Exercice 17. Soit A un anneau commutatif et I, J deux idéaux. Montrer que si $I+J=A$, alors $A/(I\cap J)$ est isomorphe à $A/I \times A/J$.